ARKADIUSZ H. PIEKARA

ELEKTRYCZNOŚĆ I BUDOWA MATERII

CZ. I. ELEKTRYCZNOŚĆ I MAGNETYZM
CZ. II. ELEKTRYCZNOŚĆ I MATERIA



WARSZAWA 1970
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

ARKADIUSZ H. PIEKARA

ELEKTRYCZNOŚĆ I MAGNETYZM

Podręcznik dla szkół wyższych

WYDANIE TRZECIE ROZSZERZONE



WARSZAWA 1970
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

WYDANIE DRUGIE 1955

Okładkę i obwolutę projektował

Zygmunt Ziemka

Redaktor

Tadeusz Maczubski

Redaktor techniczny

Henryk Ulanowski

Korektorzy

Genowefa Koebsch

Barbara Rychter

SPIS RZECZY

Z PRZEDMOWY DO PIERWSZEGO WYDANIA

Wieloletnie doświadczenia i próby w zakresie nauczania fizyki, jakie przeprowadziłem w Rydzynie w latach 1928—1939, złożyły się na tę książkę. Uzupełniałem ją jeszcze w latach wojny i latach powojennych korzystając z doświadczenia, którego nabyłem wykładając w Uniwersytecie Jagiellońskim, a później w Politechnice Gdańskiej.

Jeżeli zacząłem wydawanie „Nauki Fizyki" od „Elektryczności i budowy materii", to uczyniłem to celowo. W naszej literaturze podręcznikowej — jeśli chodzi o naukę elektryczności — istnieje od wielu lat poważna luka spowodowana tym, że ten dział fizyki przeobrażał się tak szybko, iż nieliczne podręczniki utrzymane na nowoczesnym poziomie stawały się wkrótce przestarzałymi. Wynik jest taki, że od wielu już lat — szczególnie od czasu wyczerpania się III tomu „Zasad fizyki" Augusta Witkowskiego — nie mamy podręcznika nowoczesnego.

Równolegle z rozwojem fizyki rozwija się i przeobraża nauczanie tego przedmiotu, zwłaszcza rosną wymagania pod względem ścisłości logicznej i matematycznej, dojrzewa precyzja definicji, jasność pojęć i prostota opisu zjawisk, wreszcie pewne partie materiału nauczania zyskują na ważności, inne natomiast schodzą na plan dalszy lub znikają z systemu nauczania.

Podręcznik fizyki, który nie czyniłby zadość tym wymaganiom, będzie już w chwili narodzin przestarzały. Dlatego pisząc „Elektryczność i budowę materii" zrezygnowałem z wielu tradycyjnych partii, które ciągle jeszcze pokutują w podręcznikach szkolnych, a które nie mają żadnej wartości naukowej i dydaktycznej... Kierowałem się zasadą, by poprzez trudności nie „prześlizgiwać się", lecz by je pokonywać i zawsze doprowadzać czytelnika do pełnego zrozumienia. Dlatego mam nadzieję, że czytelnik tej książki dowie się naprawdę, co to jest napięcie elektryczne, dlaczego je mierzy woltomierz lub elektrometr, co to jest ów tajemniczy „potencjał w punkcie pola", jak wielka i płodna prawda tkwi w teorii Maxwella zjawisk elektromagnetycznych itd., itd.

Podręcznik ten przeznaczony jest zasadniczo dla młodzieży studiującej fizykę w szkołach akademickich rozmaitego typu. Szczególnie pragnąłbym, aby służył on jako wstępna, wprowadzająca książka dla przyszłych młodych fizyków. Najpilniejszą jednak potrzebą, którą książka ta może zaspokoić, jest pomoc nauczycielowi fizyki. Wojna bowiem spowodowała poważne wyrwy w szeregach naszego nauczycielstwa, a nowa reforma szkolnictwa stawia przed nim zwiększone, bardzo wysokie wymagania. Mając tę pomoc na

względzie zaopatrywałem niejednokrotnie opisy doświadczeń w krótkie uwagi metodyczne, przejrzyste rysunki oraz dane liczbowe, zaczerpnięte z własnej praktyki. Dla ułatwienia stosowania materiału podręcznika w szkole średniej, odpowiednie paragrafy zostały oznaczone gwiazdką. Chciałbym również, aby książka ta znalazła się w rękach ucznia poważniej interesującego się fizyką.

Na końcu każdego rozdziału znajdują się liczne zadania rachunkowe z rozwiązaniami oraz zagadnienia opisowe i doświadczalne. Unikałem naiwnych, nierealnych zadań, nie odpowiadających żadnej rzeczywistości, a tak rozpowszechnionych w podręcznikach szkolnych. Zadania, które tutaj opracowałem, zajmują się procesami rzeczywistymi oraz doświadczeniami najzupełniej realnymi. Celem ich jest nie tylko nabycie biegłości w stosowaniu praw, ale również pogłębienie i rozszerzenie wiadomości nabytych przy czytaniu książki. Zagadnienia doświadczalne (oznaczone literą P) są to prace indywidualne, jakie podejmowali z zapałem uczniowie Rydzyny, objawiający zamiłowanie do fizyki. Prace te dadzą studiującemu pewien przedsmak badania naukowego.

„Nauka fizyki" planowana jest w trzech tomach: tom I: „Mechanika i akustyka", tom II: „Ciepło i światło", tom III: „Elektryczność i budowa materii". Tom I jest już w połowie opracowany i jako skrypt pt. „Mechanika ogólna" doczekał się trzech wydań. Tom II jest kwestią dalszych lat (na szczęście drukuje się obecnie nowe opracowanie II tomu doskonałych „Zasad fizyki" A. Witkowskiego). Tom III oddaję do rąk czytelników.

Na zakończenie niech mi wolno będzie złożyć podziękowanie panu Tadeuszowi Łopuszańskiemu, pod wpływem którego kształtowały się i dojrzewały moje pierwsze poczynania dydaktyczne w Rydzynie i któremu książka ta bardzo wiele zawdzięcza. Pragnę również podziękować wszystkim moim współpracownikom z czasu okupacji za bezinteresowną i gorliwą pomoc techniczną, bez której książka nie przetrwałaby wojny.

Zupełnie szczególną wdzięczność autora zaskarbił sobie pan Stanisław Drewniak, drukarz lwowski, który uratował rękopis tej książki w czasie działań wojennych we Lwowie w roku 1939. Bowiem przed wybuchem wojny jedyny rękopis książki (wówczas 8 rozdziałów) został wysłany do Lwowa, gdzie rozpoczęto jej druk. W wyniku wypadków wojennych skład książki został zniszczony, lecz rękopisem nieznanego sobie autora zaopiekował się pan Drewniak, który w czasie nalotów schodził z nim do schronu. Niechże ten fakt przemawia ponad wszelkie pochwały.

A. PIEKARA

Gdańsk, w czerwcu 1948

Z PRZEDMOWY DO DRUGIEGO WYDANIA

W drugim wydaniu niniejszej książki zostały sprecyzowane niektóre ważne pojęcia, jak np. energia pola elektrycznego i magnetycznego. W ciągu tych kilku lat dzielących drugie wydanie od pierwszego przybyły nowe fakty i nowe interpretacje teoretyczne. Z tego względu w dziedzinie promieni kosmicznych należało unowocześnić mechanizm powstawania promieni wtórnych i uwzględnić nowe hipotezy powstawania promieni pierwotnych. W dziedzinie budowy atomu została szerzej i głębiej ujęta istota periodyczności układu Mendelejewa; obszerniej omówiono kwantowanie i zasadę Pauliego. Zmieniono również niektóre terminy — zgodnie z zaleceniami Komisji Terminologicznej Polskiego Towarzystwa Fizycznego.

Oddając do druku drugie wydanie „Elektryczności i budowy materii" pragnąłbym, aby książka ta w większym stopniu niż dotychczas wpłynęła na prace nauczyciela fizyki; aby nauczanie fizyki w szkole średniej bardziej związała z praktyką, z techniką, z życiem. Bowiem związek praktyki z fizyką szkolną jest jeszcze ciągle bardzo luźny; wpływa to ujemnie na styl nauczania, a w rezultacie — na wiedzę ucznia. Związek nauczania fizyki z praktyką nie może polegać jedynie na omawianiu zastosowań praktycznych fizyki. Związać nauczanie fizyki z praktyką — to nie znaczy pozostawić dawny skostniały szkielet nauczania ozdabiając go tylko nowymi zastosowaniami praktycznymi. Praktyka musi mieć wpływ na samą metodę nauczania, musi tkwić w metodzie nauczania. Gdy uczeń przekręca kontakt lampy elektrycznej, gdy włącza grzejnik albo radioodbiornik, gdy kieszonkowym woltomierzem sprawdza napięcie akumulatora — uprawia praktykę doby dzisiejszej. Lecz gdy ten sam uczeń zapoznaje się w szkole z tymi samymi zjawiskami, zostaje przeniesiony do ubiegłego stulecia. Nie przeczę, że doświadczenia z lisim ogonem, czy z elektroforem mogą być pożytecznym urozmaiceniem nauki, lecz tego rodzaju akcesoria wraz z butelkami lejdejskimi, busolami stycznych i oderwanymi definicjami — nie mogą stanowić metody nauczania.

Zważmy, że dzisiejszy amperomierz zbyt daleko odbiega od busoli stycznych, która ciągle jeszcze stanowi ulubiony sprzęt pracowni szkolnych; że zarówno woltomierz montera, jak i naukowca, nie mają nic wspólnego z ową abstrakcyjną definicją różnicy potencjałów, której każemy uczyć się na pamięć naszym uczniom; że maszyna Wimshursta dostarczyć może naukowej rozrywki, lecz nie może mieć poważniejszego znaczenia w me-

todzie nauczania, bo po pierwsze, sposób jej działania osłonięty jest mgłą zarówno przed uczniami, jak i przed nauczycielami, a po drugie, nikomu do niczego nie jest potrzebna. Istnieje wiele przykładów owego oderwania się szkolnej fizyki od życia. Można przejrzeć współczesny podręcznik fizyki i nie znaleźć w nim ani jednej wzmianki o woltomierzu (!).

W książce niniejszej czytelnik dostrzeże próbę ściślejszego powiązania nauczania elektryczności z życiem, powiązania, które tkwi nie w przybudówkach, lecz w metodzie. Zdaję sobie jednak sprawę z tego, że w tej dziedzinie jest jeszcze bardzo wiele do ulepszenia.

A. PIEKARA

Poznań, w maju 1954

PRZEDMOWA DO WYDANIA TRZECIEGO

Książka „Elektryczność i magnetyzm" stanowi pierwszą część podręcznika „Elektryczność i budowa materii". Zawiera ona fundamentalne prawa nauki o elektryczności i magnetyzmie; natomiast druga część podręcznika poświęcona będzie zjawiskom elektrycznym w ciałach stałych, ciekłych i gazowych oraz strukturze materii; ta część będzie miała tytuł „Elektryczność i materia".

Pierwsze dwa wydania mego podręcznika bardzo szybko zniknęły z półek księgarskich. Później, jeszcze przez wiele lat, podręcznik ten poszukiwany był przez młodzież studiującą i przez nauczycieli fizyki. Stało się to zachętą dla autora do podjęcia poważnego wysiłku opracowania wydania trzeciego, rozszerzonego i pogłębionego.

W wydaniu tym oparłem się całkowicie na zracjonalizowanym układzie jednostek metr — kilogram — sekunda — amper, który w skrócie nazywamy układem MKSA. Wszedł on bowiem w skład urzędowego i obecnie jedynie obowiązującego układu jednostek SI (Système International). Niemniej w książce tej omawiam również układy elektrostatyczny i elektromagnetyczny CGS, gdyż w przeciwnym razie książka straciłaby wspólny język z innymi, zwłaszcza dawniejszymi podręcznikami.

Autor z prawdziwą satysfakcją pragnie podkreślić, że już w wydaniu pierwszym (1948) wprowadził układ jednostek MKSA, uważając amper za podstawową jednostkę w nauce o elektryczności. W związku z tym autor rozpoczyna naukę o elektryczności od pojęcia prądu elektrycznego, nie zaś od pojęcia ładunku. Wielu dydaktyków i autorów podręczników, przyzwyczajonych do rozpoczynania nauki o elektryczności od elektrostatyki z jej historycznymi rekwizytami, metody tej nie uznawało. Ponieważ jednak i autor, i wielu czytelników wysoko ocenia zalety tej metody, cieszę się, że w tym względzie układ jednostek SI przybywa z poważną pomocą metodzie nauczania.

W książce niniejszej, podobnie jak w „Mechanice ogólnej", daję wykład fizyki doświadczalnej, wprowadzając *stopniowo* rachunek różniczkowy i całkowy, rachunek wektorowy, liczby zespolone oraz równania różniczkowe. Pragnę w ten sposób złagodzić studentom przejście od fizyki doświadczalnej do fizyki teoretycznej, zmniejszyć abstrakcyjność tej ostatniej, a także podkreślić, że fizyka doświadczalna i teoretyczna stanowią jedną naukę, stanowią jedność nierozłączną.

Mając ten cel na względzie apeluję do czytelników, pragnących naprawdę i poważnie przyswoić sobie wiedzę zawartą w tej książce, a także nauczyć się władać matematyczną

metodą pracy fizyka, aby po przeczytaniu każdego rozdziału przerobili wszystkie zagadnienia rachunkowe, jakie znajdują się na końcu każdego rozdziału. (Objaśnienia do zagadnień może czytelnik znaleźć na końcu rozdz. 1, str. 74). Opracowałem je specjalnie dla tego kursu nauki o elektryczności, rozpoczynając od najłatwiejszych, a kończąc na bardzo trudnych i poważnych. Zagadnienia te mają wieloraki cel. Przerabiając je sumiennie czytelnik nabywa wprawy we władaniu swą wiedzą, zyskuje probierz, że wiedzę tę posiadł, wreszcie rozszerza ją znakomicie, gdyż zagadnienia ukazują mu nowe problemy i nowe prawa, do których, zresztą z jak najtroskliwszą pomocą autora — dochodzi sam swoją pracą. I ta metoda, zwana heurystyczną, powinna dać czytelnikowi dużą satysfakcję.

Przy opracowywaniu trzeciego wydania książki pomoc techniczną nieśli mi: dr T. Krupkowski, mgr J. Kryłow oraz panie M. Dębska i J. Gielecińska. Wszystkim im składam podziękowanie.

A. H. PIEKARA

Warszawa, w sierpniu 1968 r.

Objaśnienie

Paragrafy oznaczone gwiazdką stanowią całość samą w sobie na poziomie licealnym. Zagadnienia dla tego poziomu oznaczone zostały również gwiazdką.

Niezaawansowani czytelnicy mogą pierwsze czytanie podręcznika ograniczyć tylko do paragrafów oznaczonych gwiazdką.

Do zrozumienia całej książki nie są potrzebne żadne wiadomości z nauki elektryczności, natomiast potrzebne są pewne choćby minimalne wiadomości z mechaniki, ciepła i światła.

Rozdział 1

OGÓLNE PRAWA PRĄDU ELEKTRYCZNEGO

A. O natężeniu prądu elektrycznego

*§ **1.1. Źródła prądu elektrycznego.** W dzisiejszych czasach źródła prądu elektrycznego są niezwykle rozpowszechnione. Znamy je — przeważnie powierzchownie — z codziennego użytku. Do najbardziej znanych źródeł prądu elektrycznego należy chyba bateryjka do kieszonkowej latarki elektrycznej, złożona z trzech ogniw Leclanchégo. Ogniwa te mają bardzo różnorodną postać zewnętrzną i wielkość, lecz budowa ich w zasadzie jest ta sama; wyjaśniona będzie w drugiej części tej książki. Z wielu takich ogniw zbudowane są baterie, używane do zasilania pewnego typu radioodbiorników. Rozpowszechnionym również źródłem prądu są akumulatory, które używa się do zasilania instalacji elektrycznej w samochodach oraz do celów laboratoryjnych. Źródłem prądu o największej doniosłości są prądnice (rys. 4.16—4.24, rozdz. 4) zainstalowane w elektrowniach, poruszane za pomocą turbin parowych, wodnych lub silników Diesla. Z elektrowni prąd elektryczny przesyła się grubymi drutami miedzianymi, czyli kablami, do mieszkań, fabryk itp. Kable tworzą rozgałęzioną „sieć" elektryczną. Gdy kontakty lampy elektrycznej wkładamy do gniazd ściennych, przyłączamy ją do sieci elektrycznej, a tym samym do źródła prądu.

*§ **1.2. Różne zjawiska wywołane prądem elektrycznym.** Źródło prądu elektrycznego ma dwa bieguny. Bieguny te często mają postać gniazd służących do wkładania wtyczek albo postać zacisków, do których wkłada się przewód i zaciska śrubą.

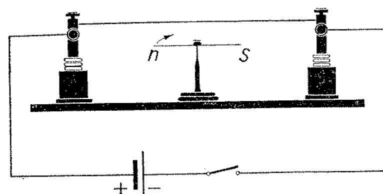
a) Oba bieguny akumulatora łączymy drutem żelaznym. Drut się rozgrzewa. Jeśli jest dość krótki i cienki, rozżarza się i stapia.

b) Nad igłą magnesową busoli albo kompasu umieszczamy poziomo, równolegle do niej, kawałek drutu (rys. 1.1). Z chwilą gdy końce drutu połączymy z biegunami ogniwa lub akumulatora, igła wychyli się tak, jak gdyby do niej zbliżono magnes.

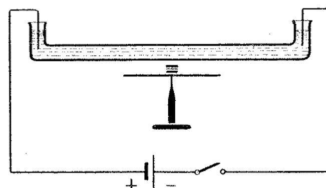
c) Jeśli do doświadczeń a) i b) użyjemy zamiast drutu rurki szklanej napełnionej wodą z dodatkiem kwasu, zasady lub soli (rys. 1.2), to otrzymamy te same zjawiska: cieplne (ciecz się rozgrzewa) i magnetyczne (igła magnetyczna wychyli się). Ale z łatwością zauważymy i trzecie zjawisko: rozkład chemiczny cieczy, który przeważnie objawia się tym, że na jednym lub na obu końcach drutów wydzielają się pęcherzyki gazu.

W celu dokładniejszego zbadania tego zjawiska powtórzmy to doświadczenie w przyrządzie wyobrażonym na rys. 1.3. K i A są to druciki platynowe, zwane *elektrodami*. Jeśli do doświadczenia użyjemy wody zakwaszonej kwasem siarkowym, w probówkach

nad elektrodami zbierać się będą dwa różne gazy, w których w znany z chemii sposób z łatwością rozpoznamy wodór i tlen: wodór pali się, zaś tlen podtrzymuje palenie. Powtórzmy doświadczenie łącząc elektrody z przeciwnymi biegunami akumulatora niż dotychczas. Okaże się, że wodór i tlen zbierają się teraz nad przeciwnymi elektrodami. Więc wydzielanie się wodoru związane jest z jednym biegunem źródła prądu, a wydzie-

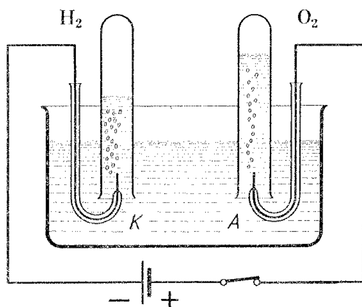


Rys. 1.1. Wychylenie igły magnesowej pod wpływem prądu elektrycznego w drucie. Znak —|├— oznacza źródło prądu; —⟋○— oznacza wyłącznik



Rys. 1.2. Wychylenie igły magnesowej pod wpływem prądu elektrycznego w elektrolicie

lanie się tlenu — z drugim. Elektroda, nad którą zbiera się wodór, została nazwana *katodą*, a biegun źródła prądu z nią połączony nazwany został *biegunem ujemnym* (—). Druga elektroda, nad którą zbiera się tlen, nazywa się *anodą*, a odpowiedni biegun nazywa się *biegunem dodatnim* (+). Zjawisko opisane nosi nazwę *elektrolizy*. Roztwory wodne kwasów, zasad i soli nazywają się *elektrolitami*. Roztwór cukru albo takie ciecze, jak nafta i oleje, w powyższych warunkach nie ulegają rozkładowi chemicznemu: nie są więc elektrolitami.



Rys. 1.3. Elektroliza rozcieńczonego kwasu siarkowego. Na elektrodach wydzielają się wodór (H_2) i tlen (O_2)

Doświadczenia a), b) i c) pouczają nas, że zjawiska obserwowane są zewnętrznymi objawami jakiegoś procesu, który odbywa się w drucie czy w elektrolicie, gdy połączymy go z biegunami źródła prądu. Ów proces, objawiający się nam w postaci zjawisk cieplnych, magnetycznych i chemicznych, nazywa się *prądem elektrycznym*. O prądzie elektrycznym wyrażamy się, że płynie w drucie lub elektrolicie, od jednego bieguna do drugiego. Metale i elektrolity nazywamy *przewodnikami* prądu elektrycznego.

Jeśli bieguny źródła prądu połączymy takimi ciałami, jak: szkło, porcelana, ebonit, guma, nici, papier, parafina, suche drzewo itd., nie zaobserwujemy żadnego z wyżej po-

znanych zjawisk. Mówimy, że prąd elektryczny przez te ciała nie płynie i nazywamy je *izolatorami* lub *dielektrykami*.

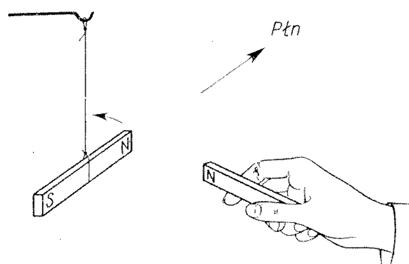
Z doświadczenia przedstawionego na rys. 1.3 widzieliśmy, że oba bieguny źródła prądu posiadają odmienne właściwości. Na katodzie, która jest połączona z biegunem ujemnym, wydziela się wodór, na anodzie, która jest połączona z biegunem dodatnim, wydziela się tlen. Doświadczenie to pozwala nam zawsze odróżnić biegun ujemny od dodatniego. Bieguny można odróżnić od siebie również za pomocą tzw. lampki neonowej, w której prąd przechodzi nie przez włókno metalowe jak w żarówce, lecz przez rozrzedzony neon (gaz szlachetny). Gaz wówczas świeci, ale tylko przy katodzie (por. § 2.3, rys. 2.10).

***§ 1.3. Kierunek prądu elektrycznego.** Gdy mówimy, że prąd elektryczny płynie w drucie, to natychmiast nasuwają się nam dwa pytania: co płynie i w jakim kierunku? Przed przeszło stu laty powstawały na ten temat różne hipotezy. Np. duński fizyk Oersted, który w roku 1820 odkrył wpływ prądu elektrycznego na igłę magnesową (rys. 1.1), wyobrażał sobie prąd elektryczny jako „konflikt elektryczny", czyli jako „zderzenie się" dwóch różnych "sił" elektrycznych, wychodzących z dwóch biegunów baterii. Pojęcie prądu elektrycznego wprowadził w tym samym czasie fizyk francuski Ampère. Prąd elektryczny miał polegać na płynięciu jakiejś bliżej nieznanej, nieważkiej „substancji elektrycznej" w kierunku od bieguna + do bieguna —. Ten hipotetyczny kierunek został ogólnie przyjęty i zachował się do dziś jako „umowa". Dzisiejsza fizyka uczy nas jednak, że takie wyobrażenie nie jest zgodne z rzeczywistością, z doświadczeniem. Doświadczenia, które poznamy w drugiej części tej książki przemawiają za tym, że prąd elektryczny w drucie polega na płynięciu niezwykle drobnych, maleńkich atomów elektrycznych, tzw. elektronów, w kierunku od bieguna ujemnego do dodatniego. Ten kierunek od — do + jest w istocie kierunkiem prądu elektrycznego w metalach.

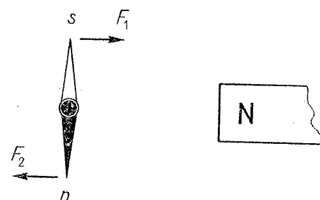
Zwróćmy jednak uwagę, że zarówno w fizyce, jak w elektrotechnice za kierunek prądu elektrycznego postanowiono uważać nadal kierunek dawny, tj. kierunek od + do —. Celem pozostawienia nauce i technice konwencjonalnego (według umowy) kierunku prądu było niewprowadzanie zamętu do reguł i praw dawniej ustalonych. Pozostawmy więc nadal tę umowę w mocy. Pamiętajmy jednak, że gdy mówimy: „prąd płynie od + do —" albo „od punktu *A* do *B*", to w rzeczywistości w przewodniku metalowym elektrony przepływają od — do + albo od punktu *B* do *A*. Kierunek prądu (według umowy) oznaczać będziemy na schematach zwykłą strzałką →. Niemniej w niektórych schematach objaśniających różne zjawiska elektryczne, potrzeba nam będzie pokazać nie kierunek prądu (według umowy), lecz kierunek płynięcia elektronów. Wówczas umieszczać będziemy specjalną strzałkę •→ z punktem na końcu, co ma nam przypominać, że strzałka wskazuje kierunek ruchu elektronów.

***§ 1.4. Pole magnetyczne magnesu.** Magnes posiada dwa końce zwane *biegunami*. Zawieszony na nici, jak to widać na rys. 1.4 z lewej strony, zwraca się stale jednym z końców ku północy. Ten właśnie koniec został nazwany *biegunem północnym* (*N*); przeciwny biegun nazywa się *biegunem południowym* (*S*). Rysunek 1.4 pokazuje, jak łatwo sprawdzić, że dwa bieguny jednoimienne odpychają się; podobnie sprawdzimy, że bieguny różnoimienne przyciągają się.

Jeżeli do igiełki magnesowej busoli zbliżymy magnes, to igiełka wychyli się z pierwotnego położenia, choćby odległość między nią a magnesem była dość znaczna. Jest to objaw sił (F_1, F_2, rys. 1.5), jakie magnes wywiera z odległości na bieguny igiełki. Mówimy, że dookoła każdego magnesu rozciąga się *pole magnetyczne*, tzn. przestrzeń,



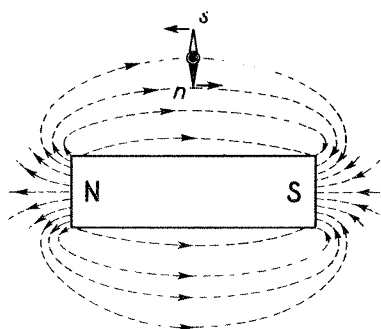
Rys. 1.4. Bieguny jednoimienne magnesów odpychają się



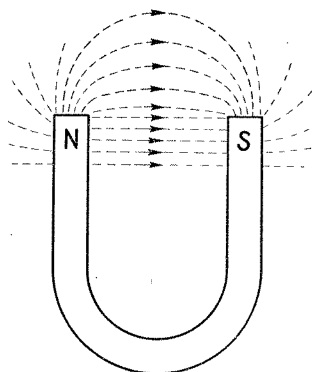
Rys. 1.5. Wychylenie igły magnesowej z pierwotnego położenia wskazuje, że znalazła się ona w zmienionym polu magnetycznym

w której przy zastosowaniu tej czy innej metody dostrzec można działanie sił magnetycznych. Fakt, że igła busoli kieruje się ku północy, wskazuje istnienie *pola magnetycznego ziemskiego*.

Poznamy obecnie interesującą metodę badania pola magnetycznego. Na magnesie sztabkowym kładziemy sztywną tekturę lub taflę szklaną i posypujemy ją opiłkami że-



Rys. 1.6. Linie sił magnesu sztabkowego

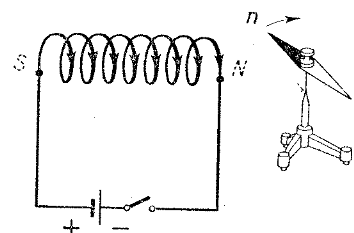


Rys. 1.7. Linie sił magnesu w kształcie podkowy

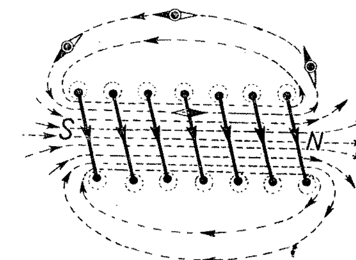
laza. Żeby opiłkom ułatwić układanie się pod wpływem sił pola magnetycznego, wstrząsamy płytką, stukając w nią. Opiłki układają się w linie (rys. 1.6), tak jak je zmuszają do tego siły czynne w polu magnetycznym. Linie te nazywamy *liniami sił pola magnetycznego*. Linie są zakrzywione i łączą oba bieguny. Umawiamy się liniom sił nadawać pewien kierunek, mianowicie kierunek tej siły, która działa na jakikolwiek biegun

północny, który na tej linii umieścimy (np. wprowadzając w pole igiełkę magnesową, patrz rys. 1.6). Ruch bieguna północnego wskazuje od razu kierunek linii sił. Zrozumiałe jest, że jest to kierunek od bieguna *N* do *S*. Wyrażamy to często tak: linie magnetyczne biegną od *N* do *S* albo wychodzą z *N* i wchodzą do *S*; (jest to właściwie wyrażanie się nieścisłe, bo linie ani nie „biegną", ani nie „wychodzą"). Kierunek linii sił zaznaczony jest strzałkami. Strukturę pola magnesu w kształcie podkowy pokazuje rys. 1.7.

*§ **1.5. Pole magnetyczne prądu elektrycznego.** Na wałku drewnianym lub na kawałku rury tekturowej nawińmy kilkadziesiąt zwojów drutu izolowanego i puśćmy przezeń prąd. Rysunek 1.8 pokazuje, że igła magnesowa ustawiona w pobliżu rury wychyla się tak, jakby rura stała się magnesem. Za pomocą igły magnesowej nietrudno sprawdzić, że bieguny *N* i *S* owego „magnesu" znajdują się na obu końcach rury. Bieguny się odwrócą, gdy zmienimy kierunek prądu i znikną bez śladu, gdy prąd przerwiemy. Taki drut nawinięty spiralnie na walcu nazywa się *solenoidem*, a niekiedy *cewką*. Jeśli do wnętrza solenoidu wprowadzić kawałek żelaza, staje się on silnym magnesem. Solenoid z walcem żelaznym, czyli z rdzeniem, nazywa się *elektromagnesem*.



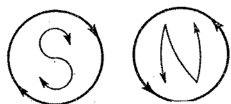
Rys. 1.8. Solenoid z przepływającym prądem zachowuje się jak magnes sztabkowy



Rys. 1.9. Linie sił pola magnetycznego solenoidu

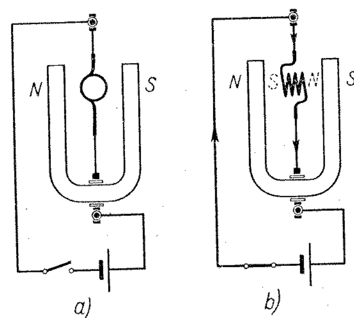
Solenoid, gdy płynie przez niego prąd, własnościami magnetycznymi przypomina magnes sztabkowy. Podobieństwo to wystąpi jeszcze silniej, jeśli zbadamy pole solenoidu za pomocą opiłek żelaznych. W tym celu nawińmy solenoid na płaskiej tekturce przetykając druty przez otwory tak, jak wskazuje rys. 1.9. Przez solenoid puszczamy prąd. Tekturkę posypujemy opiłkami i wstrząsamy. Opiłki układają się wzdłuż linii sił. Ich kierunek wskaże nam igiełka magnesowa, gdyż, jak wiemy, jej biegun *n* podąża wzdłuż linii. Cztery różne położenia igiełki wskazane są na rysunku 1.9. Pole zewnątrz solenoidu przypomina nam pole magnesu sztabkowego (rys. 1.6). Podkreślamy jednak różnicę bardzo istotną: linie sił pola magnesu mają początek i koniec (mianowicie, zaczynają się na biegunie *N*, a kończą się na *S*), natomiast linie pola solenoidu są zamknięte. Zamykają się wewnątrz solenoidu, gdzie tworzą wiązkę linii równoległych. Takie pole, którego linie sił są równoległe, nazywamy polem *jednorodnym*. Zauważmy, że linie sił zewnątrz solenoidu biegną od *N* do *S*, natomiast wewnątrz solenoidu — od *S* do *N* (patrz rys. 1.9). Zatem podobieństwo między polami magnesu i solenoidu zachodzi tylko dla pola zewnątrz solenoidu.

Widzieliśmy, że istnieje zależność pomiędzy kierunkiem prądu, a układem biegunów solenoidu. Opierając się na doświadczeniu potrafimy z łatwością sprawdzić słuszność następującej reguły, która pozwoli nam w każdym wypadku z danego kierunku płynięcia prądu przewidzieć, gdzie się utworzy biegun *N*, a gdzie *S*. Oto ta reguła: gdy patrzymy z zewnątrz, wzdłuż osi solenoidu, na jego biegun i widzimy, że kierunek prądu jest niezgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, to biegun ten jest północny (*N*); w przeciwnym razie jest to biegun południowy. Inną regułę, wykorzystującą specyficzny kształt liter *N* i *S*, ilustruje rys. 1.10.



Rys. 1.10. Reguła występowania biegunów w solenoidzie

***§ 1.6. Działanie magnesu na solenoid z prądem.** W § 1.5 widzieliśmy, że prąd elektryczny wytwarza w solenoidzie i dookoła niego pole magnetyczne, które np. odchyla igłę magnesową. Byliśmy więc świadkami działania prądu elektrycznego na magnes znajdujący się w jego pobliżu. Obecnie poznamy zjawisko odwrotne: zobaczymy, jak magnes działa na przewodnik z prądem. Przewodnik będzie miał na razie postać solenoidu. Inne wypadki poznamy w § 3.19.



Rys. 1.11 Działanie magnesu na solenoid z prądem

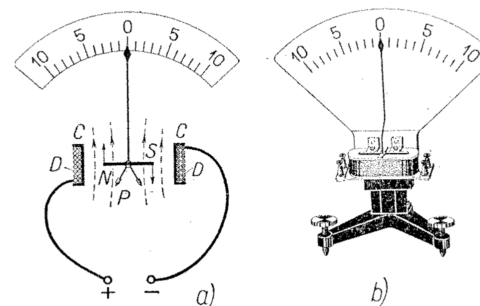
Między biegunami magnesu zawieszamy na cienkim drucie solenoid (rys. 1.11a). Z chwilą puszczenia prądu solenoid obraca się, jak wskazuje rys. 1.11b. Solenoid zachowuje się jak krótki magnes sztabkowy. Bieguny jego *N* i *S* odnajdujemy z łatwością przy pomocy reguły. Bieguny te zostają przyciągnięte odpowiednio ku biegunom *S* i *N* magnesu i solenoid obraca się o pewien kąt. Po wyłączeniu prądu solenoid powraca do pierwotnego położenia; dzieje się to pod wpływem sprężystości drutu, na którym solenoid jest zawieszony.

***§ 1.7. Galwanometry.** Działanie prądu elektrycznego na magnes ruchomy oraz działanie magnesu na przewodnik ruchomy z prądem mogą nam służyć jako wskaźniki przepływu prądu elektrycznego; oznacza to, że przyrząd taki, jaki np. wyobraża rys. 1.11, pokaże nam, czy prąd płynie, czy nie. Zauważmy jednak, że pokazuje on nam coś więcej. Jeżeli bowiem dołączymy go kolejno do różnych źródeł prądu, np. do ogniwa Leclanchégo, a potem do akumulatora, to skręcenie solenoidu w pierwszym wypadku

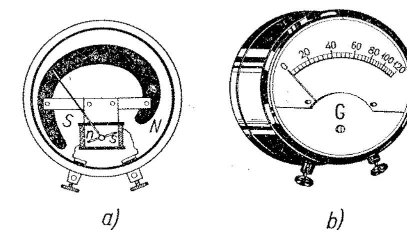
będzie słabe, podczas gdy w drugim — bardzo silne. Zatem prąd elektryczny powoduje słabsze lub silniejsze działanie między nim a magnesem. Świadczy to o tym, że z prądem elektrycznym związana jest jakaś zmienna wielkość fizyczna. Nazywamy ją *natężeniem prądu elektrycznego* i chcemy, aby silniejsze skręcenie solenoidu w naszym doświadczeniu było świadectwem silniejszego prądu, czyli prądu o większym natężeniu. Nietrudno za pomocą doświadczeń stwierdzić, że prąd o większym natężeniu wywołuje jednocześnie silniejsze rozgrzanie drutu i obfitsze wydzielanie gazów podczas elektrolizy.

Skoro silniejszy prąd powoduje większe wychylenie solenoidu, to zjawisko to zastosować można do *mierzenia* natężenia prądu elektrycznego. Należy tylko do solenoidu z rys. 1.11 przymocować wskazówkę, która by poruszała się po odpowiedniej skali. I to będzie prototyp przyrządu służącego do mierzenia natężenia prądu elektrycznego. Taki przyrząd mierzyć będzie natężenie prądu na razie w jakichś dowolnych jednostkach, w „podziałkach skali" (o wyborze właściwej jednostki i wykalibrowaniu przyrządu — patrz § 1.10). Na tej zasadzie zbudowane przyrządy noszą nazwę amperomierzy, miliamperomierzy i galwanometrów, zależnie od tego, czy są przystosowane do mierzenia prądów silnych, słabych czy bardzo słabych.

a) G a l w a n o m e t r y o r u c h o m y m m a g n e s i e. Budowę takiego galwanometru przedstawia schematycznie rys. 1.12; wygląd jego pokazuje rys. 1.12b. Cewkę galwanometru (nieruchomą) stanowi szpulka *CC*, na której nawinięty jest izolowany drut *DD*. Wewnątrz cewki umieszczona jest na osi poziomej igła magnesowa *NS*, do której umo-



Rys. 1.12. Galwanometr z ruchomym magnesem. Typ starszy



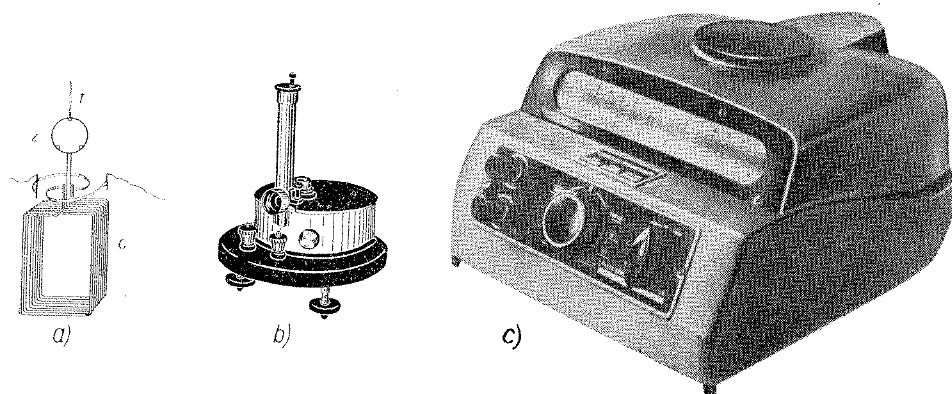
Rys. 1.13. Galwanometr z ruchomym magnesem. Typ nowszy

cowana jest wskazówka; za nią znajduje się skala z podziałką. Ciężarki *P* zmuszają igłę do powrotu do położenia poziomego, a zatem zmuszają wskazówkę do powrotu do położenia zerowego. Gdy puścimy prąd przez cewkę, igła wychyli się pod wpływem pary sił działających na oba bieguny magnesu: przy tym biegun *N* przesunie się w kierunku linii sił. Temu wychyleniu sprzeciwiają się ciężarki *P* i ustala się równowaga. Wskazówka zatrzymuje się na pewnej podziałce wskazując natężenie prądu w pewnych jednostkach, o których bliżej w § 1.10.

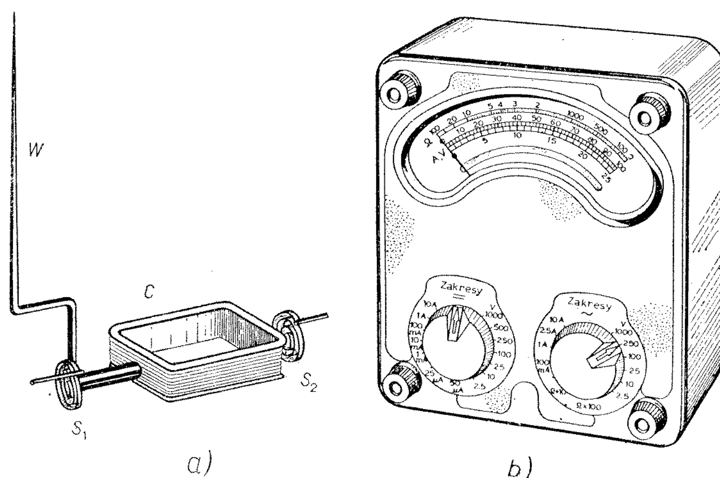
Opisany tu typ galwanometru jest już dzisiaj typem przestarzałym i rzadko spotyka się w laboratoriach. Częściej spotyka się galwanometry w obudowie zamkniętej (rys. 1.13a i b). Siłą zmuszającą wskazówkę do powrotu do położenia zerowego jest siła wy-

wierana przez magnes *NS*. Galwanometry te mogą być zatem używane w dowolnym położeniu.

Galwanometry o ruchomym magnesie ustępują na ogół dokładnością galwanometrom o ruchomej cewce; te ostatnie zostały doprowadzone do wielkiej precyzji i doskonałości.



Rys. 1.14. Galwanometr zwierciadłowy o ruchomej cewce, a) cewka ze zwierciadłem (*z*), b) galwanometr bez oświetlenia (oświetlenie i skala zob. rys. 1.16), c) galwanometr nowoczesny z wbudowanym oświetleniem; z przodu skrzynki widać skalę

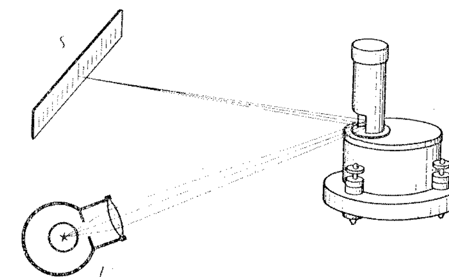


Rys. 1.15. a) Cewka galwanometru wskazówkowego, b) nowoczesny przyrząd wskazówkowy: galwanometr, amperomierz, woltomierz i omomierz w jednej obudowie, na różne zakresy. Przełączniki zmieniają zakresy. Przełącznik prawy służy do pomiarów prądu przemiennego (zob. rozdz. 4)

b) Galwanometry o ruchomej cewce. Sposób działania takiego galwanometru objaśnia już dostatecznie rys. 1.11. Galwanometry tego typu posiadają bardzo małą cewkę *c*, która albo zawieszona jest na bardzo cienkiej taśmie metalowej *t* (rys. 1.14a i b),

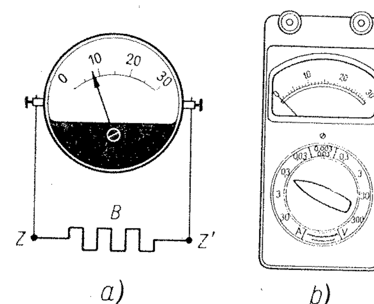
albo jest osadzona na ośce (rys. 1.15a i b). W tych pierwszych — siłą sprowadzającą cewkę do położenia pierwotnego może być siła sprężystości taśmy. W drugim — siłę tę wywierają cienkie sprężynki spiralne S_1 i S_2. Najczulszymi galwanometrami są galwanometry zwierciadłowe o cewce zawieszonej (rys. 1.14), do której umocowane jest,

Rys. 1.16. Urządzenie optyczne do odczytywania odchyleń galwanometru zwierciadłowego. *L* — lampa, *S* — skala



zamiast wskazówki, lekkie zwierciadełko *Z*. Na zwierciadełko to rzuca się wiązkę światła (rys. 1.16). Smuga światła odbitego stanowi swego rodzaju wskazówkę, bardzo długą i nic nie ważącą. Pada ona na białą skalę i tworzy na niej jasną plamkę, która przesuwa się za każdym, choćby najmniejszym obrotem cewki galwanometru. W nowoczesnych galwanometrach oświetlenie znajduje się we wspólnej obudowie z galwanometrem (rys. 1.14c).

***§ 1.8. Amperomierze.** Galwanometr może być przystosowany z łatwością do mierzenia znacznie silniejszych prądów, aniżeli na to pozwala skala galwanometru. Jasną jest rzeczą, że silny prąd nie może być przepuszczony w całości przez cewkę galwanometru, gdyż uszkodziłby ją lub spalił. Postępuje się więc w ten sposób, że zaciski *ZZ'* galwanometru (rys. 1.17a) łączy się odpowiednio dobranym kawałkiem drutu *B*, tzw.

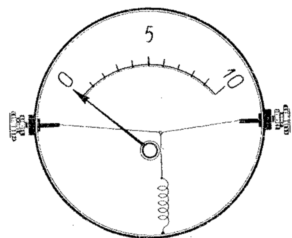


Rys. 1.17. a) Schemat amperomierza, b) przyrząd pomiarowy uniwersalny, służący jako amperomierz na różne zakresy pomiarowe, nastawiane przełącznikiem (jednocześnie może służyć jako woltomierz, zob. § 1.20)

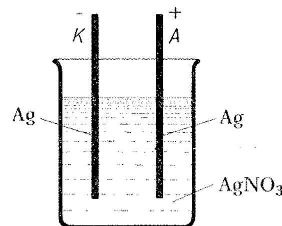
bocznikiem. Gdy prąd, który chcemy zmierzyć, doprowadzimy do zacisków *ZZ'*, to prawie wszystek przejdzie przez bocznik, a tylko bardzo drobna część przejdzie przez cewkę galwanometru i spowoduje wychylenie wskazówki. Wiedząc, jaką część prądu przepuszcza bocznik (por. § 1.35), możemy z wychylenia wskazówki obliczyć natężenie mierzonego prądu. W ten sposób galwanometr zostaje zamieniony na *miliamperomierz* lub na *amperomierz*, zależnie od tego, jaką część prądu zabiera bocznik: to znów zależy od długości, grubości i rodzaju zastosowanego bocznika (bliżej patrz § 1.35). Ampero-

mierz tego rodzaju pokazuje rys. 1.17b. Kilka różnych boczników wbudowanych jest wewnątrz skrzynki. Dołączenia jednego z tych boczników dokonuje się za pomocą przełącznika pokrętnego, widocznego na rysunku.

*§ **1.9. Amperomierze niemagnetyczne.** a) Amperomierze cieplne. Działanie tych przyrządów jest oparte na fakcie, że przewodnik pod wpływem prądu elektrycznego ogrzewa się i powiększa swoją długość. Zmiana jego długości przenosi się za pomocą prostego urządzenia na wskazówkę, która przesuwa się wzdłuż skali. Schematycznie pokazuje to rys. 1.18.



Rys. 1.18. Schemat przedstawiający zasadę amperomierza cieplnego



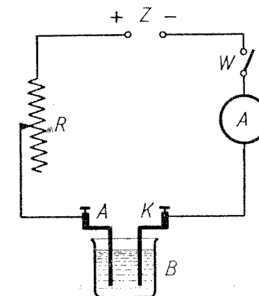
Rys. 1.19. Amperomierz chemiczny („woltametr srebrowy")

b) Amperomierze chemiczne. Prąd przepływa przez roztwór wodny jakiejś soli (np. miedziowej $CuSO_4$, srebrowej $AgNO_3$ itp.) i wydziela na katodzie *K* metal (rys. 1.19). Z łatwością można to sprawdzić ważąc katodę przed doświadczeniem i po doświadczeniu. Im prąd jest silniejszy, tzn. im większe powoduje wychylenie na amperomierzu magnetycznym, tym więcej metalu wydzieli na katodzie w ciągu określonego czasu. Nietrudno również sprawdzić doświadczalnie fakt, że ilość wydzielonego metalu jest wprost proporcjonalna do czasu przepływu prądu.

*§ **1.10. Jednostka natężenia prądu elektrycznego – amper. Kalibrowanie amperomierzy.** Dotychczas nie zapoznaliśmy się jeszcze z jednostką natężenia prądu elektrycznego, czyli z tzw. *amperem* (skrót 1 A). Otóż omówiony wyżej amperomierz chemiczny daje do tego doskonałą okazję. Wprawdzie ścisła, naukowa definicja ampera oparta jest na skutkach magnetycznych prądu i podana będzie później (por. § 3.12), już teraz jednak możemy podać równoważne jej określenie ampera, oparte na skutkach chemicznych prądu elektrycznego. Według tego określenia natężenie 1 ampera ma prąd, który w ciągu 1 sekundy wydzieli na katodzie z roztworu azotanu srebra 1,1183 mg srebra. Jeżeli jakiś prąd wydzieli w ciągu 1 sekundy *i* razy większą ilość srebra, to jego natężenie uważamy za *i* razy większe, czyli *i* amperów.

Z powyższego widać, że pomiary natężenia prądu wymagać będą ważenia elektrody przed doświadczeniem i po doświadczeniu oraz mierzenia czasu. Jest to jednak dość kłopotliwe, dlatego amperomierzy chemicznych nie używa się do zwykłych codziennych pomiarów, jakich w laboratorium wykonywa się bardzo wiele. Do takich pomiarów stosuje się zazwyczaj amperomierze magnetyczne. Natomiast amperomierz chemiczny

stosować można do wycechowania amperomierza magnetycznego albo do sprawdzenia jego skali. Poniżej podajemy łatwy sposób sprawdzenia jakiegokolwiek amperomierza, np. magnetycznego, za pomocą amperomierza chemicznego. Ze źródła prądu *Z* (rys. 1.20) płynie prąd przez amperomierz sprawdzany *A* i amperomierz chemiczny („woltametr



Rys. 1.20. Sprawdzanie lub kalibrowanie amperomierza *A* za pomocą woltametru srebrowego *B*. *W* – wyłącznik, *R* – opornik. Amperomierz *A* może mieć bocznik; na schemacie jednak bocznika nie zaznacza się

srebrowy") *B* w ciągu pewnego czasu *t* (np. 100 s). Katodę *K* woltametru ważymy przed doświadczeniem i po doświadczeniu i otrzymujemy masę *m* osadzonego srebra (np. 559 mg). Natężenie prądu *i* wynosi więc, według definicji ampera:

$$i = \frac{m}{1{,}1183 \cdot t} \tag{1.1}$$

amperów. W naszym przykładzie prąd ma natężenie $\frac{559}{1{,}1183 \cdot 100} = 5$ A. Jeśli przez cały czas doświadczenia wskazówka badanego amperomierza wskazywała rzeczywiście 5 A, to doświadczenie nasze upewniło nas, że amperomierz wskazuje poprawnie.

Jeżeli amperomierz magnetyczny nie ma podziałki albo ma podziałkę dowolną, to za pomocą szeregu doświadczeń opisanych wyżej, wykonywanych z prądem o różnym natężeniu, moglibyśmy wykonać podziałkę wyrażającą prąd w amperach, ewentualnie kreskom dowolnej podziałki przyporządkować liczby wyrażające prąd w amperach. Nazywa się to *kalibrowaniem* amperomierza.

Oprócz jednostki 1 A stosuje się często jednostkę 1000 razy mniejszą: 1 miliamper (1 mA) oraz 1 000 000 razy mniejszą: 1 mikroamper (1 μA). A więc

$$A = 10^3 \text{ mA} = 10^6 \text{ μA}.$$

Wzór (1.1) można napisać również tak:

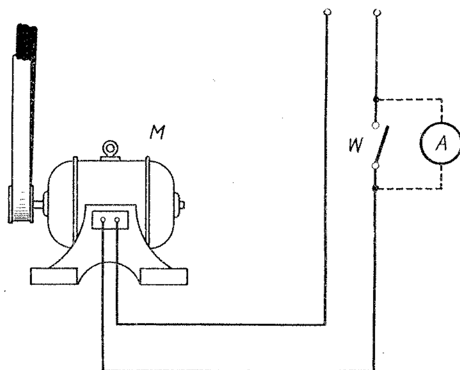
$$m = 1{,}1183 \cdot i \cdot t. \tag{1.1a}$$

$$\text{(mg)} \quad \left(\frac{\text{mg}}{\text{A}\cdot\text{s}}\right) \quad \text{(A)} \quad \text{(s)}$$

Pod wzorem wypisaliśmy jednostki, w jakich należy wyrażać wielkości *m*, *i*, *t*. Współczynnikowi 1,1183 nadaliśmy również jednostkę $\frac{\text{mg}}{\text{A}\cdot\text{s}}$. Oznacza ona, że prąd elektryczny wydziela 1,1183 mg srebra na jeden amper i na jedną sekundę. Wypisywanie jednostek jest korzystne z tego względu, że działania wykonane w sposób formalny na jednostkach,

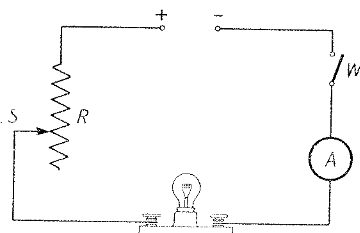
tak jak na liczbach, powinny po prawej stronie wzoru dać jednostkę figurującą po lewej stronie tego wzoru [por. wzór (1.1a)]; jest to szczególnie pożyteczne przy bardziej skomplikowanych obliczeniach.

*§ **1.11. Kilka przykładów praktycznych.** a) Rysunek 1.21 wskazuje, w jaki sposób można zmierzyć natężenie prądu elektrycznego, przepływającego przez silnik elektryczny. Amperomierz należy włączyć do biegunów otwartego wyłącznika *W*; w ten sposób prąd,

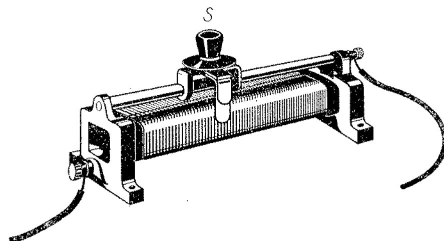


Rys. 1.21. Pomiar natężenia prądu elektrycznego, przepływającego przez silnik elektryczny

zamiast przez drążek wyłącznika, płynie przez amperomierz. Gdy silnik idzie „luzem", tzn. gdy jest nieobciążony, amperomierz wskazuje około 1 A. Z łatwością stwierdzamy ciekawe zjawisko, do którego powrócimy jeszcze w § 1.31, mianowicie, gdy silnik zostanie obciążony, tzn. gdy zacznie poruszać jakąś maszynę (piłę, tokarnię itp.), natężenie



Rys. 1.22. Pomiar natężenia prądu przepływającego przez żarówkę



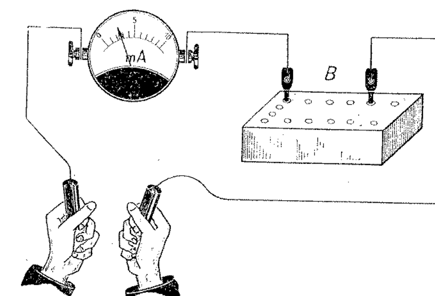
Rys. 1.23. Opornik suwakowy

prądu znacznie wzrośnie. Wynosić ono może kilka lub kilkadziesiąt amperów, zależnie od mocy silnika. W silnikach poruszających tramwaje lub lokomotywy elektryczne płynie prąd rzędu 100 A i więcej.

b) W sposób wskazany na rys. 1.22 mierzymy natężenie prądu przepływającego przez zwykłą żarówkę. *R* jest to opornik, którego wygląd pokazuje rys. 1.23. Jest to w zasadzie bardzo długi kawałek drutu nikielinowego (stop miedzi i niklu, por. tablicę 1, § 1.22), nawinięty np. na wałku porcelanowym. Drut nikielinowy ma tę właściwość, że w bardzo znacznym stopniu osłabia prąd przezeń płynący, tzn. zmniejsza jego natężenie. Mówimy, że stawia prądowi duży opór. Drut miedziany, używany do połączeń, właściwość tę ma

w znacznie mniejszym stopniu. Przesuwając suwak *S* opornika włączamy do obwodu prądu mniej lub więcej zwojów drutu oporowego; przyciemniamy wtedy lub rozjaśniamy żarówkę. Amperomierz pokazuje, że w miarę zmniejszania oporu (zmniejszamy długość drutu oporowego w obwodzie prądu) natężenie prądu rośnie aż do wartości najwyższej, gdy żarówka świeci pełnym blaskiem. Natężenie prądu wynosi dla żarówek najczęściej spotykanych od 0,1 A do 1 A.

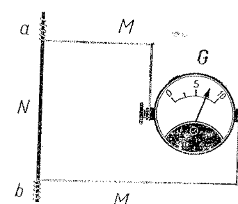
c) Rysunek 1.24 wskazuje, w jaki sposób zmierzyć prąd, płynący przez nasze ciało, gdy w obie ręce uchwycimy przewody połączone ze źródłem prądu. Jeśli źródłem prądu



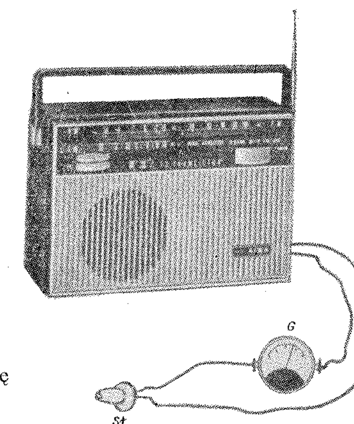
Rys. 1.24. Pomiar prądu przepuszczonego z baterii anodowej *B* przez ciało człowieka

będzie jeden lub kilka akumulatorów, miliamperomierz wskaże drobny ułamek mA; skutku tego prądu nie odczujemy. Jeśli jako źródła prądu użyjemy tzw. baterii anodowej, popłynie prąd kilku mA i odczujemy niemiły wstrząs.

d) Końce krótkiego drutu żelaznego lub lepiej nikielinowego (*N*) połączmy kawałkami drutu miedzianego (*M*) z galwanometrem (rys. 1.25). Jeśli jedno ze spojeń (ale tylko jedno), np. *a*, ogrzejemy, to galwanometr pokaże istnienie prądu elektrycznego w obwodzie. Jeśli ogrzejemy zamiast spojenia *a* spojenie *b*, to popłynie prąd w przeciwnym kierunku.



Rys. 1.25. Pomiar prądu wytwarzanego przez ogniwo termoelektryczne



Rys. 1.26. Pomiar prądu płynącego przez słuchawkę radioodbiornika

nym kierunku. Takie źródło prądu nazywa się *termoogniwem* (patrz część II). Użyjmy do tego doświadczenia czułego galwanometru zwierciadłowego: wystarczy jedno ze spojeń ująć w palce, aby galwanometr wykazał prąd. Jest to prąd bardzo słaby, rzędu 1 μA.

e) Rysunek 1.26 pokazuje sposób pomiaru natężenia prądu płynącego przez słuchawkę aparatu radiowego, tzw. tranzystorowego, jest ono rzędu kilku μA. Można też zmierzyć prąd płynący przez głośnik; jest on znacznie silniejszy, rzędu kilku mA.

B. O napięciu elektrycznym i o oporze

*§ **1.12. Praca prądu elektrycznego.** Z poprzednich doświadczeń widzieliśmy, że prąd elektryczny wykonuje pracę. Praca ta może być mechaniczna, jak np. w silniku elektrycznym, może jednak objawiać się w postaci energii cieplnej, jak np. w oporniku czy w piecyku elektrycznym, albo energii świetlnej, chemicznej itp. Mówimy, że w silniku czy w żarówce energia prądu elektrycznego zamienia się na energię mechaniczną, cieplną świetlną lub inną. Najczęściej spotykaną zamianą jest zamiana energii elektrycznej na energię cieplną. Energia cieplna wydziela się nie tylko w piecykach, żarówkach, wszelkich opornikach, ale nawet w silnikach (objaw szkodliwy) i różnych innych aparatach elektrycznych. Jeżeli w odbiorniku energii elektrycznej nie wydziela się inna energia, jak tylko cieplna, to ilość jej (Q) może nam służyć za miarę energii elektrycznej dostarczonej przez źródło prądu, czyli za miarę pracy prądu elektrycznego (L). Pisząc

$$L = Q \tag{1.2}$$

dajemy wyraz zasadzie zachowania energii. Pracę prądu elektrycznego możemy więc mierzyć w tych samych jednostkach co i energię cieplną, a więc np. w kaloriach (cal) lub dżulach (J), pamiętając, że

$$1\,\mathrm{J} = 0{,}24\ \mathrm{cal}^{*)} \tag{1.3}$$

(Dla przypomnienia zwracamy uwagę, że 1 J jest to praca mechaniczna siły 1 N (niutona) na drodze 1 m, a równanie (1.3) wyraża, że praca 1 J może być zamieniona na 0,24 cal ciepła; jest to fakt doświadczalny, będący wyrazem *pierwszej zasady termodynamiki*.) Na ogół jednak przyjęto pracę prądu elektrycznego mierzyć nie w kaloriach, lecz w dżulach. I chociaż w paragrafie 1.13 mierzyć ją będziemy bezpośrednio w kaloriach, to jednak wynik pomiaru pracy elektrycznej przeliczać będziemy na dżule. A więc zamiast mówić: praca prądu elektrycznego wynosi Q cal, powiemy: praca prądu elektrycznego, wyrażona w dżulach, równa się liczbie kalorii Q podzielonej przez 0,24. A więc

$$L = \frac{1}{0{,}24}\,Q \tag{1.2a}$$

$$(\mathrm{J}) \quad \left(\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{cal}}\right) (\mathrm{cal})$$

(współczynnikowi 0,24 przypisujemy jednostkę cal/J, co oznacza, że 0,24 cal otrzymuje się z 1 J pracy). Pozornie zdawałoby się, że równania (1.2) i (1.2a) są sprzeczne. Tak jednak nie jest. Pamiętajmy bowiem, że w równaniu (1.2) obie strony wyrażone są w tych samych jednostkach, a więc albo w cal, albo w J. Natomiast w równaniu (1.2) praca

* Dokładniej: 0,239 cal.

prądu elektrycznego wyrażona jest w dżulach, a ilość ciepła z niej otrzymana — w kaloriach, co zaznaczone jest pod równaniem.

*§ **1.13. Praca prądu jest proporcjonalna do czasu.** Spiralkę z cienkiego drutu nikielinowego zanurzamy w kalorymetrze napełnionym wodą (może być użyty do tego celu zwykły termos, rys. 1.27, a w braku termosu — zlewka). Przez spiralę przepuszczamy prąd z jednego akumulatora; jego natężenie powinno wynosić około 1 A. Na termometrze zanurzonym w kalorymetrze odczytujemy co minutę temperaturę. Okazuje się, że przyrost temperatury na każdą minutę jest ten sam. A więc co minutę wydziela się ta sama ilość energii cieplnej; czyli: energia cieplna, wydzielona przez prąd elektryczny, jest proporcjonalna do czasu. Innymi słowy praca prądu elektrycznego jest proporcjonalna do czasu (t). Piszemy więc

$$L = Mt, \tag{1.4}$$

gdzie M jest współczynnikiem proporcjonalności.

Łatwo odnajdziemy sens fizyczny współczynnika M. Wyraża on ilość pracy dostarczonej przez prąd elektryczny odbiornikowi energii elektrycznej w ciągu jednostki czasu. Tę wielkość M nazywamy *mocą* prądu elektrycznego. Mierzymy ją w J/s, czyli w watach (W).

Obliczymy moc prądu w doświadczeniu, w którym wyniki pomiarów są następujące:
natężenie prądu $i = 1$ A;
czas przepływu $t = 5$ min $= 300$ s;
całkowity przyrost temperatury wody $\Delta T = 1{,}0°$ (na minutę — $0{,}2°$);
masa wody $m = 130$ g;
równoważnik wodny kalorymetru (wyznaczony poprzednio) $k = 14$ cal/1°.
Ilość ciepła wydzielona w kalorymetrze: $Q = mc\Delta T + k\Delta T = (130\cdot 1\cdot 1{,}0 + 14\cdot 1{,}0)$ cal $= 144$ cal.
Praca elektryczna: $L = \frac{1}{0{,}24}\,Q = 600$ J.
Moc prądu: $M = \frac{L}{t} = \frac{600\ \mathrm{J}}{300\ \mathrm{s}} = 2\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 2$ W.

Z powyższego przykładu widzimy, że 1 W jest to moc stosunkowo bardzo mała. W technice stosujemy więc jednostki większe, mianowicie kilowaty (kW) i megawaty (MW):

$$1\ \mathrm{kW} = 10^3\ \mathrm{W},$$
$$1\ \mathrm{MW} = 10^6\ \mathrm{W}.$$

Wiemy, że 1 J = 1 W·1 s; dlatego niekiedy dżul nazywamy „watosekundą” (W·s). Otóż dżul, jak na stosowane w technice wielkości, jest również bardzo małą jednostką. Dlatego używa się jednostek większych: „kilowatogodzin” (kW·h). Łatwo zrozumieć, że

$$1\ \mathrm{kW\cdot h} = 1000\ \mathrm{W}\cdot 3600\ \mathrm{s} = 3\,600\,000\ \mathrm{J}.$$

*§ **1.14. Moc prądu jest proporcjonalna do natężenia prądu.** Powtórzmy poprzednie doświadczenie z następującą zmianą. Zamiast poprzedniej spiralki weźmy spiralkę dwa razy dłuższą, z tego samego drutu. Po włączeniu prądu przekonamy się, że amperomierz wskazuje prąd dwa razy słabszy. Jednocześnie na termometrze odczytywać będziemy co minutę przyrosty temperatury dwa razy mniejsze niż poprzednio. Wynika stąd, że praca prądu wykonana na każdą jednostkę czasu, a więc moc prądu, jest teraz dwa razy

mniejsza. Wyciągamy stąd wniosek, że *moc prądu M jest proporcjonalna do natężenia prądu i*; piszemy więc

$$M = Ui, \tag{1.5}$$

gdzie U jest współczynnikiem proporcjonalności. Doświadczenie uczy, że wzór (1.5) zachowuje swą ważność również i wtedy, gdy praca prądu zamienia się w inne rodzaje energii aniżeli cieplna, np. w energię mechaniczną, jak w silniku elektrycznym, itp.

Obliczamy moc prądu w ostatnim naszym doświadczeniu. Dane doświadczalne są następujące:
natężenie prądu $i = 0{,}5$ A;
czas przepływu prądu $t = 300$ s;
przyrost temperatury wody $\Delta T = 0{,}5°$ (na minutę $0{,}1°$);
masa wody $m = 130$ g;
równoważnik wodny kalorymetru $k = 14$ cal/1°.
Ilość ciepła wydzielona w kalorymetrze: $Q = mc\Delta T + k\Delta T = (130 \cdot 1 \cdot 0{,}5 + 14 \cdot 0{,}5)$ cal $= 72$ cal.
Praca elektryczna $L = \frac{1}{0{,}24} Q = 300$ J.
Moc prądu $M = \frac{L}{t} = \frac{300 \text{ J}}{300 \text{ s}} = 1$ W, a więc istotnie 2 razy mniejsza niż poprzednio.

***§ 1.15. Napięcie źródła prądu.** Zapytajmy, jaki sens fizyczny ma współczynnik U. Z równania (1.5) napiszemy

$$U = \frac{M}{i}. \tag{1.5a}$$

Widać stąd, że miarą współczynnika U jest moc, jaką wydziela w spiralce prąd o natężeniu 1 A. Z tego równania wynika również, że jednostką współczynnika U jest 1 W/A. W naszym pierwszym doświadczeniu współczynnik ten wynosi $U = \frac{2 \text{ W}}{1 \text{ A}} = 2$ W/A; w drugim doświadczeniu $U = \frac{1 \text{ W}}{0{,}5 \text{ A}} = 2$ W/A. A więc widzimy, że pomimo zmiany spiralki współczynnik U pozostał ten sam.

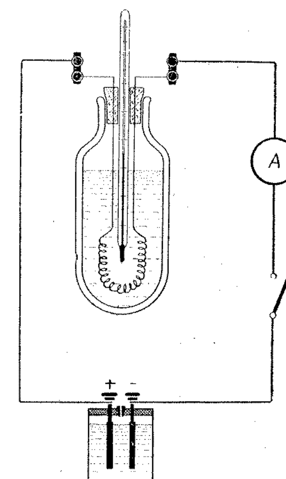
Co charakteryzuje współczynnik U? Na pewno nie spiralkę, bo zmiana krótszej spiralki na dłuższą nie zmieniła współczynnika. Gdy się rozejrzymy po schemacie doświadczenia na rys. 1.27, to podejrzenie nasze na pewno padnie na akumulator. Czy istotnie współczynnik U zależy od rodzaju źródła prądu? Że tak jest, przekonują nas doświadczenia. Gdybyśmy powtórzyli nasze doświadczenie, zastępując akumulator ogniwem Leclanchégo i wykonali także obliczenia jak w § 1.14, to otrzymalibyśmy, według wzoru (1.5a) $U = 1$ W/A. Można by również do tego doświadczenia użyć małej prądnicy; po wykonaniu analogicznych pomiarów otrzymalibyśmy tym razem znacznie więcej, np. $U = 10$ W/A. Liczby powyższe wskazują, że prąd 1 ampera we wszystkich trzech wypadkach nie dostarcza tej samej ilości energii w ciągu tego samego czasu. Moc przypadająca na 1 A jest we wszystkich trzech wypadkach różna. I tak:

a) każdy amper prądu płynącego z akumulatora wytwarza 2 W mocy;

b) każdy amper prądu płynącego z ogniwa Leclanchégo wytwarza około 1 W mocy;

c) każdy amper prądu płynącego ze wspomnianej prądnicy wytwarza 10 W mocy.

Doświadczenia takie przemawiają za tym, że współczynnik U charakteryzuje źródło prądu. Mówi on nam, czy 1 amper prądu wysłanego przez dane źródło prądu zdolny jest, w ciągu np. 1 sekundy, wykonać dużą pracę, czy małą.



Rys. 1.27. Pomiar energii prądu elektrycznego

Współczynnik U nazywamy napięciem elektrycznym panującym na zaciskach źródła prądu. Zatem napięcie U jest to stosunek mocy do natężenia prądu, który tę moc wytwarza: $U = \frac{M}{i}$. Jednostką napięcia jest 1 W/A, zwany inaczej *woltem* (V):

$$1 \text{ V} = \frac{1 \text{ W}}{1 \text{ A}}.$$

Jeżeli na zaciskach źródła prądu panuje napięcie 1 V, oznacza to, że każdy amper daje moc 1 W, tzn. w ciągu 1 s wykonuje pracę 1 J albo dostarcza 0,24 cal ciepła.

A zatem napięcie na zaciskach akumulatora wynosi 2 V, ogniwa Leclanchégo — około 1 V, prądnicy — 10 V. Napięcie sieci oświetleniowej wynosi albo 110 V, albo 120 V, albo — co najczęściej się spotyka — 220 V; są to napięcia znormalizowane, tzn. ustalone umowami międzynarodowymi.

Oprócz jednostki 1 V stosuje się niekiedy jednostkę 1000 razy mniejszą, 1 miliwolt (1 mV):

$$1 \text{ mV} = 10^{-3} \text{ V}.$$

Natomiast do wyrażania napięć bardzo wysokich stosuje się jednostkę 1000 razy większą od 1 V, czyli 1 kilowolt (1 kV):

$$1 \text{ kV} = 10^{3} \text{ V}.$$

Niekiedy używa się jednostki jeszcze większej, mianowicie 1 megawolt (1 MV), czyli milion V:

$$1 \text{ MV} = 10^{6} \text{ V}.$$

Łącząc wzory (1.4) i (1.5) otrzymamy wyrażenie na pracę prądu elektrycznego:

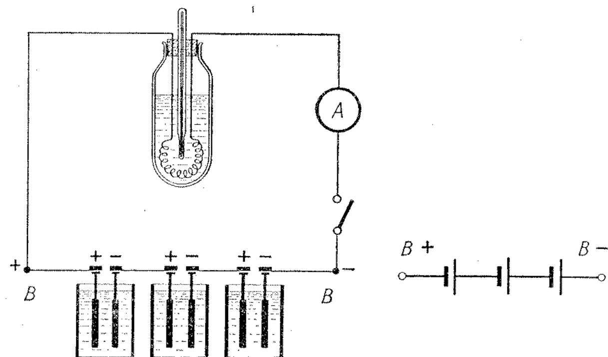
$$L = U \quad i \quad t. \tag{1.6}$$
$$\text{(J)} \quad \text{(V)} \; \text{(A)} \; \text{(s)}$$

Wzór ten mówi, że praca prądu równa się iloczynowi napięcia, natężenia i czasu. Pod wzorem wpisane są dla przypomnienia jednostki, jakimi mierzą się wielkości występujące we wzorze. Jeśli praca zamienia się całkowicie na ciepło, to jego ilość obliczamy ze wzoru

$$Q \;= 0{,}24\; U \quad i \quad t. \tag{1.7}$$
$$\text{(cal)} \quad \frac{\text{cal}}{\text{J}} \quad \text{(V)} \; \text{(A)} \; \text{(s)}$$

Wykonajmy następujące łatwe a pouczające doświadczenie. Zmierzmy prąd, który płynie przez żarówkę dołączoną do kontaktów sieci oświetleniowej (napięcie $U = 220$ V). Miliamperomierz pokazuje $i = 182$ mA $= 0{,}182$ A. Moc, jaka wydziela się w żarówce, przeważnie w postaci ciepła, wynosi: $M = Ui = (220 \cdot 0{,}182)$ W $= 40$ W. (Istotnie, na żarówce wypisane jest „40 W"). A teraz zmierzmy prąd, który płynie przez małą żarówkę z latarki kieszonkowej, dołączonej do biegunów małej bateryjki. Miliamperomierz pokazuje aż 280 mA! A przecież moc, która wydziela się w tej żarówce, jest wiele razy mniejsza niż moc żarówki poprzedniej. Widzimy tu bardzo wyraźnie, że moc nie zależy wyłącznie od natężenia prądu, ale od jeszcze innego czynnika. Tym czynnikiem, jak już wiemy, jest napięcie, które w drugim wypadku jest, oczywiście, znacznie mniejsze, gdyż napięcie bateryjki wynosi zaledwie około 4 V.

***§ 1.16. Napięcie na zaciskach baterii akumulatorów połączonych szeregowo.** Połączmy kilka akumulatorów, np. trzy tak, jak wskazuje rys. 1.28: biegun $-$ pierwszego ogniwa łączymy z biegunem $+$ drugiego i biegun $-$ drugiego z biegunem $+$ trzeciego. Bateria ta nazywa się *baterią szeregową*; biegunami jej są końcowe zaciski B^+ i B^-. Powtórzmy doświadczenie z § 1.14 stosując tę baterię jako źródło prądu (do tych doświadczeń wskazane jest stosowanie akumulatorów dużych, o znacznej ilości płyt, np. 5 lub 7). Zauważymy od razu, że amperomierz wskazuje prąd 3 razy silniejszy niż poprzednio (mianowicie 1,5 A), a jednocześnie temperatura wody wzrasta aż 9 razy szybciej aniżeli w doświadczeniu poprzednim (0,9° na minutę). Z tego ostatniego faktu wnosimy, że moc M prądu jest obecnie 9 razy większa. A ponieważ prąd i jest 3 razy silniejszy, przeto napięcie $U = M/i$ jest obecnie 3 razy większe.



Rys. 1.28. Na zaciskach baterii złożonej z 3 akumulatorów połączonych szeregowo panuje napięcie 3 razy większe niż na zaciskach jednego akumulatora

Tego rodzaju doświadczenia uczą, że napięcie na zaciskach baterii szeregowej, złożonej z n akumulatorów (ogniw), jest n razy wyższe od napięcia jednego akumulatora (ogniwa); inaczej, że napięcia sumują się.

***§ 1.17. Prawo Ohma.** Z doświadczenia ostatniego nie wyciągnęliśmy jeszcze wszystkich wniosków. Na razie pouczyło nas ono, że bateria nasza daje napięcie 3 razy wyższe niż jedno jej ogniwo. Zauważyliśmy przy tym, że i prąd wzrósł trzykrotnie w stosunku do prądu, jaki dawało jedno ogniwo w doświadczeniu z § 14. W doświadczeniu z jednym akumulatorem mieliśmy wyniki $U = 2$ V, $i = 0{,}5$ A. Natomiast doświadczenie z trzema akumulatorami dało $U = 6$ V, $i = 1{,}5$ A. Stwierdzamy więc, że *napięcie i natężenie prądu w spirali są wzajemnie proporcjonalne.* Piszemy więc

$$U = Ri, \tag{1.8}$$

gdzie R jest współczynnikiem proporcjonalności. Doświadczenia najbardziej dokładne zawsze potwierdzają związek (1.8); nosi on nazwę *prawa Ohma.*

***§ 1.18. Opór przewodnika.** Jak zwykle, zapytamy o sens fizyczny współczynnika R. Napiszmy

$$R = \frac{U}{i} \tag{1.8a}$$

i zauważmy, że dla naszej spiralki (dłuższej) z obu doświadczeń (z § 1.14 i 1.16) otrzymujemy ten sam współczynnik R, chociaż użyte napięcia były różne

$$R = \frac{2\ \text{V}}{0{,}5\ \text{A}} = \frac{6\ \text{V}}{1{,}5\ \text{A}} = 4\frac{\text{V}}{\text{A}}.$$

Natomiast dla spiralki dwa razy krótszej (doświadczenie z § 1.13) otrzymujemy

$$R = \frac{2\ \text{V}}{1\ \text{A}} = 2\frac{\text{V}}{\text{A}}.$$

Widzimy więc, że współczynnik R charakteryzuje spiralkę; ogólniej, charakteryzuje wszelki przewodnik prądu. Dla obu naszych spiralek otrzymaliśmy $R = 2$ V/A dla krótszej i $R = 4$ V/A dla dłuższej. Oznacza to, że aby przez każdą z tych spiralek przepuścić prąd o natężeniu 1 A, trzeba do krótszej przyłożyć napięcie 2 V, a do dłuższej 4 V. Mówimy, że dłuższa spiralka stawia prądowi większy opór; dlatego współczynnik R nazywamy oporem albo opornością danego przewodnika. W myśl wzoru (1.8a) powiemy, że *opór przewodnika jest to stosunek przyłożonego napięcia U do natężenia prądu i, który przez niego pod tym napięciem popłynie.*

Jednostką oporu jest „wolt na amper" (1 V/A), który nazwano *omem* (1 Ω):

$$1\Omega = \frac{1\ \text{V}}{1\ \text{A}}.$$

Tysiąc omów nosi nazwę kiloома (kΩ):

$$1\ \text{k}\Omega = 10^3\ \Omega.$$

Milion omów nazywa się megaomem (MΩ):

$$1\ \mathrm{M\Omega} = 10^6\ \Omega.$$

Jednostki te stosuje się szczególnie w radiotechnice, gdzie mamy często do czynienia z wielkimi oporami.

Spostrzegliśmy już, że opór spiralki dwa razy dłuższej jest dwa razy większy. Ogólniej mówiąc, opór przewodnika liniowego jest proporcjonalny do jego długości. Opór zależy także od grubości drutu: im drut jest grubszy, tym jego opór jest mniejszy. Poza tym opór drutu zależy od rodzaju metalu (por. § 1.22). Oporniki wyrabia się ze specjalnego drutu oporowego (np. z drutu nikielinowego) (rys. 1.23); opornik stawia prądowi znaczny opór, zazwyczaj od 1 Ω do kilku tysięcy Ω. Natomiast przewody doprowadzające prąd do różnych aparatów i odbiorników energii elektrycznej są to druty miedziane (izolowane bawełną, jedwabiem, kauczukiem lub tworzywem sztucznym), które stawiają prądowi bardzo mały opór, zazwyczaj rzędu 0,01 Ω.

***§ 1.19. Prawo Joule'a.** Powróćmy do doświadczenia wyobrażonego na rys. 1.27 lub 1.28. Moc wydzielana w spirali wewnątrz termosu wyraża się wzorem (1.5)

$$M = Ui,$$

gdzie U jest napięciem użytego źródła prądu. Z drugiej strony, U możemy wyrazić przy pomocy świeżo poznanego prawa Ohma,

$$U = Ri.$$

Oba te wzory możemy połączyć przez wyrugowanie U. Otrzymujemy wtedy nowy wzór wyrażający moc M, w którym nie występuje napięcie źródła prądu:

$$\underset{(\mathrm{W})}{M} = \underset{(\Omega)}{R}\ \underset{(\mathrm{A})^2}{i^2}. \tag{1.9}$$

Wzór ten powiada, że moc wydzielana w przewodniku (w postaci ciepła!) zależy tylko od jego oporu R i od natężenia prądu i, a mianowicie jest proporcjonalna do oporu i kwadratu natężenia prądu. Stosując ten wzór do obliczenia mocy możemy się nie troszczyć o napięcie źródła prądu, które może być nam niewiadome. Inną postać tego prawa otrzymamy mnożąc obie strony wzoru (1.9) przez czas t:

$$\underset{(\mathrm{J})}{L} = \underset{(\Omega)}{R} \cdot \underset{(\mathrm{A})^2}{i^2} \cdot \underset{(\mathrm{s})}{t}. \tag{1.10}$$

Jeszcze inną postać otrzymamy wyrażając pracę L bezpośrednio w kaloriach (wszak zamienia się ona całkowicie na ciepło):

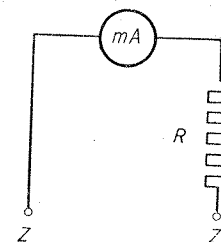
$$\underset{(\mathrm{cal})}{Q} = \underset{\left(\frac{\mathrm{cal}}{\mathrm{J}}\right)}{0{,}24} \cdot \underset{(\Omega)}{R} \cdot \underset{(\mathrm{A})^2}{i^2} \cdot \underset{(\mathrm{s})}{t}. \tag{1.10a}$$

Wzór ten znany jest pod nazwą *prawa Joule'a*.

***§ 1.20. Przyrząd do mierzenia napięcia: woltomierz.** Uprzytomnijmy sobie, że dotychczasowy sposób pomiaru napięcia na zaciskach źródła prądu jest niezwykle kłopotliwy. Polega on na tym, że ze źródła prądu, którego napięcie chcemy zmierzyć, przepuszczamy prąd przez spiralę z drutu oporowego, zanurzoną w kalorymetrze. Mierzymy natężenie prądu (i) i moc wydzielaną w kalorymetrze (M). Stosunek M/i jest szukanym napięciem. Pomiar tego rodzaju jest bardzo mało dokładny ze względu na małą dokładność prymitywnej metody kalorymetrycznej. Poza tym ma jeszcze jedną poważną wadę: podczas pomiaru źródło prądu pracuje, tzn. daje prąd, przez co może się osłabić lub zgoła wyczerpać. Pomiar taki można wykonać bez obawy z dużym akumulatorem; ale wykonany z małym ogniwem Leclanchégo spowodowałby wyczerpanie się ogniwa. Poszukujemy zatem nowej, lepszej i szybszej metody pomiaru napięcia.

Metodę tę wskazuje nam prawo Ohma.

Jak wiemy z § 1.7, galwanometr lub miliamperomierz służą do pomiaru słabych prądów. Weźmy np. miliamperomierz, którego skala ma 30 podziałek, a każda podziałka oznacza 0,1 mA (taki typ przyrządu spotyka się często w laboratoriach nowocześnie wyposażonych). Miliamperomierz ten połączmy szeregowo z opornikiem o wielkim oporze R wynoszącym np. 10 000 Ω (rys. 1.29). Dołączmy do zacisków ZZ źródło prądu



Rys. 1.29. Schemat woltomierza

o napięciu 1 V; z prawa Ohma nietrudno obliczyć, że przez przyrząd przejdzie prąd o natężeniu $i = \frac{U}{R} = \frac{1\ \mathrm{V}}{10\,000\,\Omega} = 0{,}0001\ \mathrm{A} = 0{,}1\ \mathrm{mA}$ (opór cewki miliamperomierza, wobec wielkiego oporu R zaniedbujemy). Zatem wskazówka odchyli się o jedną podziałkę; oznacza to więc, że na zaciskach ZZ panuje napięcie 1 V. Jeżeli do tych zacisków przyłączymy napięcie 30 V, to w myśl prawa Ohma wskazówka wychyli się o 30 podziałek, czyli do końca skali. Widzimy więc, że dołączając szeregowo do miliamperomierza opornik o wielkim oporze, zamieniliśmy go w przyrząd mierzący napięcie. Przyrząd ten, tzn. miliamperomierz wraz z odpowienim opornikiem, nazywa się *woltomierzem*.

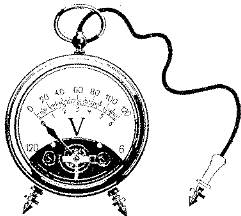
Jeśli opór R wynosić będzie 10 razy więcej niż poprzednio ($R = 100\,000\ \Omega$), woltomierz mierzyć będzie napięcie 10 razy większe niż poprzednio. Dołączmy np. do zacisków ZZ baterię o napięciu 10 V; popłynie wtedy prąd $i = \frac{10\ \mathrm{V}}{100\,000\ \Omega} = 0{,}1\ \mathrm{mA}$, a więc znów wskazówka wychyli się o jedną podziałkę. Każda podziałka oznacza teraz 10 V (poprzednio 1 V). Zatem woltomierz może obecnie mierzyć napięcie do 300 V.

Rozumiemy już, że możemy z łatwością zmieniać zakres napięć mierzonych woltomierzem. Jeśli chcemy, aby nasz woltomierz mierzył napięcia np. do 3 V (tzn. aby jedna podziałka odpowiadała 0,1 V), musimy zastosować opór $R = 1000\ \Omega$.

Nowoczesne woltomierze zawierają w swojej obudowie zestaw kilku oporników. Przez przekręcenie przełącznika umieszczonego na obudowie możemy wybrać taki zakres napięć, jaki nam w danej chwili jest potrzebny. Zazwyczaj woltomierz ma w skrzy-

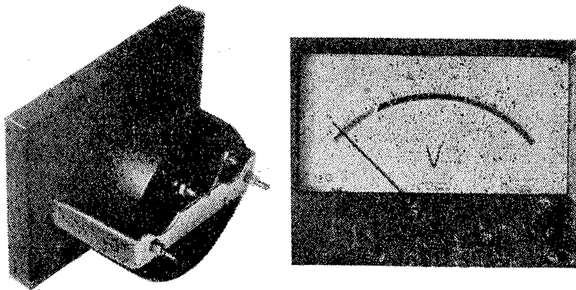
neczce, oprócz oporników szereg różnych boczników, tak że przez odpowiednie przekręcenie przełącznika może się stać amperomierzem, czy miliamperomierzem, o żądanym zakresie natężeń prądu. Taki przyrząd uniwersalny nazywa się *woltamperomierzem*. Inny znów typ woltamperomierzy zaopatrzony jest w szereg oporów i boczników, które dołącza się zewnątrz. Przyrząd przedstawiony na rys. 1.17, o którym w § 1.8 mówiliśmy, że jest amperomierzem, jest w istocie woltamperomierzem. Takie przyrządy są bardzo wygodne w pracy laboratoryjnej.

Wygodnym również typem woltomierza, służącym do szybkiego sprawdzania napięcia, jest dwuzakresowy woltomierz kieszonkowy (rys. 1.30).



Rys. 1.30. Woltomierz kieszonkowy dwuzakresowy

W laboratoriach zainstalowane bywają tzw. tablice rozdzielcze, na których znajdują się różnego rodzaju wyłączniki, bezpieczniki, oporniki, amperomierze, woltomierze itp. Jeden z takich woltomierzy tablicowych pokazuje rys. 1.31.



Rys. 1.31. Woltomierz tablicowy

***§ 1.21. Napięcie na końcach przewodnika.** Zwróćmy uwagę na to, że w doświadczeniach naszych spirala i źródło prądu połączone były bezpośrednio, tzn. przy pomocy paru kawałków grubego drutu miedzianego oraz amperomierza, które stawiają prądowi niezwykle mały opór w stosunku do oporu spirali. Gdyby przewody doprowadzające posiadały znacznie większy opór, albo gdyby do obwodu załączony został opornik R_2 (rys. 1.32), wówczas iloczyn Ui nie miałby już znaczenia mocy wydzielanej w spirali R_1, lecz oznaczałby moc wydzielaną w obu oporach R_1 i R_2. Zatem moc M_1 wydzielana w spirali R_1 jest teraz mniejsza od mocy Ui, ponieważ część tej ostatniej rozprasza się w postaci ciepła w oporniku R_2. Możemy więc napisać:

$$M_1 = U_1 i, \tag{1.11}$$

gdzie $U_1 < U$. Podkreślamy, że U_1 nie jest już napięciem źródła prądu, gdyż jest nim U. Jaki sens fizyczny ma U_1? Zważmy, że ta sama moc $M_1 = U_1 i$ wydzieliłaby się w spirali,

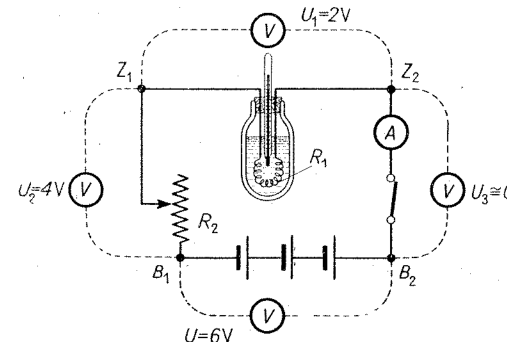
gdyby zamiast źródła prądu o napięciu U dołączonego do zacisków $B_1 B_2$ dołączyć do zacisków $Z_1 Z_2$ spirali słabsze źródło prądu o niższym napięciu U_1 (rys. 1.32). Dlatego wielkość U_1 nazywamy *napięciem na końcach przewodnika* (spirali, żarówki itp.). Ponieważ do obliczenia mocy M_1 możemy zawsze użyć wzoru (1.9), przeto mamy:

$$M_1 = R_1 i^2$$

(R_1 oznacza opór spirali), a stąd, przez porównanie ze wzorem (1.11),

$$U_1 = R_1 i. \tag{1.12}$$

Napięcie na końcach przewodnika równa się iloczynowi jego oporu i natężenia prądu. Napięcie to jest na ogół niższe od napięcia U na zaciskach źródła prądu; jedynie wtedy

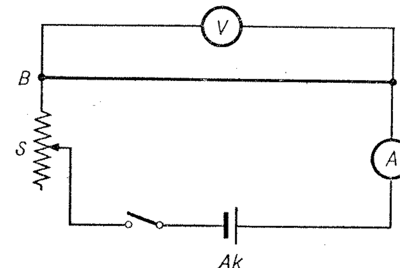


Rys. 1.32. Przykład pomiaru napięć: U — napięcie na zaciskach baterii, U_1 — napięcie na zaciskach odbiornika (spirali), U_2 — napięcie na zaciskach opornika (czyli spadek napięcia na oporniku), U_3 — spadek napięcia na przewodach i amperomierzu (równy $R_3 i$; ponieważ R_3 — opór amperomierza i przewodów jest prawie równy zeru, przeto $U_3 \cong 0$)

oba te napięcia są identyczne, gdy spirala jest bezpośrednio dołączona do źródła prądu, jak to miało miejsce w doświadczeniach z § 1.14 i 1.16.

Napięcia U i U_1 mierzy się woltomierzem, jak wskazuje rys. 1.32.

***§ 1.22. Opór właściwy.** W § 1.18 doszliśmy do wniosku, że opór drutu zależy od jego długości, grubości i rodzaju metalu. Nie wiemy jeszcze dokładnie, jakiego ro-



Rys. 1.33. Najprostszy pomiar oporu: $R = U/i$ (U — napięcie na końcach drutu BC; i — natężenie prądu); Ak — akumulator, S — opornik suwakowy (ok. 10 Ω), zabezpieczający przed zbyt silnym prądem mogącym nagrzać drut lub spalić amperomierz

dzaju jest ta zależność. Pomiary kalorymetryczne były zbyt kłopotliwe, aby można było przy ich pomocy pokusić się o rozwiązanie tego zagadnienia. Obecnie jednak potrafimy w tak łatwy sposób zmierzyć napięcie na końcach przewodnika (rys. 1.33), że pomiar oporu sprowadza się do bardzo prostej czynności. Należy bowiem tylko wspomniane napięcie podzielić przez natężenie prądu i przepływającego przez dany przewodnik: $R = U/i$. Wyznaczywszy w ten sposób opór R dla przewodników o różnych cechach (długość,

grubość, jakość materiału), rozpoznamy z łatwością zależność R od każdej z tych cech. W tym celu należy wykonać trzy serie doświadczeń, mianowicie takich, aby w każdej serii zmieniała się tylko jedna cecha, a inne pozostawały stałe. Poniżej podajemy przykład takiego badania.

a) Mierzymy U i i kolejno dla trzech drutów żelaznych o tym samym przekroju, lecz o różnej długości: 1 m, 2 m, i 3 m. Dla drutów o średnicy 0,3 mm, czyli o przekroju 0,0007 cm, otrzymujemy następujące wyniki:

długość = 1 m . . . . $R = 1{,}4\ \Omega$,
długość = 2 m . . . . $R = 2{,}8\ \Omega$,
długość = 3 m . . . . $R = 4{,}2\ \Omega$.

Wniosek: Opór drutu jest proporcjonalny do jego długości.

b) Mierzymy U i i kolejno dla kilku drutów żelaznych o tej samej długości 1 m, lecz o różnych przekrojach.

Wyniki:

średnica 0,3 mm, pole przekroju = 0,0007 cm^2 ... $R = 1{,}4\ \Omega$,
średnica 0,5 mm, pole przekroju = 0,0020 cm^2 ... $R = 0{,}5\ \Omega$.

Wniosek: Opór drutu jest odwrotnie proporcjonalny do pola jego przekroju.

c) Jak wyżej, mierzymy U i i kilku drutów o tym samym przekroju i tej samej długości, lecz z różnych metali. Dla drutów o długości 1 m i o średnicy 0,3 mm (przekrój 0,0007 cm^2) otrzymujemy następujące wyniki:

miedź . . . . $R = 0{,}25\ \Omega$,
nikielina . . . . $R = 6{,}0\ \Omega$,
żelazo . . . . $R = 1{,}4\ \Omega$.

Wniosek: Opór jednakowych drutów z różnych metali jest różny; bardzo mały dla miedzi, duży — dla nikieliny.

Jeśli oznaczymy długość drutu l, a pole przekroju — s, to wynik doświadczenia da się wyrazić wzorem

$$R = \varrho \frac{l}{s}, \tag{1.13}$$

gdzie ϱ jest współczynnikiem proporcjonalności (a więc niezależnym od l i s), różnym dla różnych metali: dla miedzi jest mały, dla nikieliny — duży. ϱ nazywa się *oporem właściwym* danego metalu (w ogóle ciała). Zmierzywszy R, l i s obliczamy łatwo ϱ:

$$\varrho = R\frac{s}{l}. \tag{1.13a}$$

Sens fizyczny tej nowej wielkości stanie się zrozumiały, jeśli położymy: $s = 1$ cm^2 i $l = 1$ cm; wówczas $\varrho = R$. A zatem: *opór właściwy mierzy się oporem ciała o długości* 1 cm i *o przekroju* 1 cm^2.

W przypadku drutu miedzianego z naszego doświadczenia ($l = 1$ m, $s = 0{,}0007$ cm^2 i $R = 0{,}25\ \Omega$) otrzymujemy:

$$\varrho = 0{,}25\,\Omega \cdot \frac{0{,}0007\ \text{cm}^2}{100\ \text{cm}} = 1{,}7 \cdot 10^{-6}\,\Omega\cdot\text{cm}.$$

Jednocześnie widać z tego obliczenia, że jednostką oporu właściwego jest $\Omega\cdot$cm. Analogiczne obliczenia dla pozostałych drutów dają:

żelazo . . . . $\varrho = 9{,}8 \cdot 10^{-6}\ \Omega\cdot$cm,
nikielina . . . . $\varrho = 42 \cdot 10^{-6}\ \Omega\cdot$cm.

Tablica 1.1 zawiera opory właściwe różnych ciał. Łatwo zauważyć, że liczby powstałe przez odrzucenie czynnika 10^{-4} wyrażają w omach opór drutu o długości 1 m i o przekroju 1 mm^2.

Tablica 1.1

Opór właściwy różnych ciał (w temperaturze pokojowej 18°C)

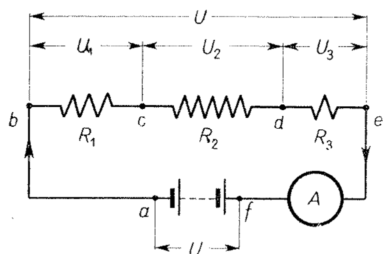
Ciało	Opór właściwy ϱ ($\Omega\cdot$cm)	Uwagi
Metale:		
Srebro	$0{,}016 \cdot 10^{-4}$	dobre przewodniki
Miedź	$0{,}017 \cdot 10^{-4}$	
Złoto	$0{,}022 \cdot 10^{-4}$	
Glin	$0{,}030 \cdot 10^{-4}$	
Cynk	$0{,}061 \cdot 10^{-4}$	
Żelazo	$0{,}098 \cdot 10^{-4}$	przewodniki
Platyna	$0{,}105 \cdot 10^{-4}$	
Nikiel	$0{,}118 \cdot 10^{-4}$	
Stal (0,1% C)	około $0{,}200 \cdot 10^{-4}$	
Ołów	$0{,}208 \cdot 10^{-4}$	
Rtęć	$0{,}958 \cdot 10^{-4}$	
Stopy:		
(Mosiądz (66% Cu+34% Zn)	około $0{,}07 \cdot 10^{-4}$	
Stopy oporowe:		
Nikielina (55% Cu+20% Zn + 25% Ni)	$0{,}42 \cdot 10^{-4}$	
Konstantan (60% Cu + 40% Ni)	$0{,}49 \cdot 10^{-4}$	
Chromonikielina (ok. 80% Ni + ok. 20% Cr + + dodatek Fe)	$1{,}03 \cdot 10^{-4}$	
Cekas (60% Ni + 17% Cr + 23% Fe)	$1{,}12 \cdot 10^{-4}$	
Inne:		
Węgiel do lamp łukowych	około $60 \cdot 10^{-4}$	
Woda destylowana	„ $1 \cdot 10^{+6}$	izolatory
Celuloid	„ $2 \cdot 10^{+10}$	
Szkło zwykłe	„ $5 \cdot 10^{+11}$	
Ebonit	„ $2 \cdot 10^{+15}$	
Parafina	„ $3 \cdot 10^{+18}$	

Opór właściwy metali zależy od temperatury, mianowicie, gdy temperatura metalu wzrasta o 1°, jego opór właściwy powiększa się mniej więcej o 1/250 swej wartości początkowej. Wyjątek stanowią „stopy oporowe", odznaczające się bardzo słabą zależnością ϱ od temperatury (opór właściwy konstantanu prawie zupełnie od temperatury nie zależy). Dlatego oporniki wyrabiane są zwykle albo np. z drutu nikielinowego (techniczne), albo z konstantanowego (precyzyjne). Chodzi bowiem o to, aby w czasie przepływu

prądu, kiedy opornik nagrzewa się, opór jego nie wzrastał. Wzrost bowiem oporu pociągnąłby za sobą osłabienie prądu, a taka niestałość w pracy opornika jest niepożądana. Druty ze stopów odznaczających się dużą wartością oporu właściwego oraz jego niezależnością od temperatury noszą nazwę drutów oporowych.

Specjalną pozycję wśród materiałów oporowych zajmuje chromonikielina oraz inne stopy, zawierające chrom i żelazo (np. cekas). Odznaczają się one dużą wytrzymałością na wysokie temperatury. Mogą normalnie pracować w temperaturach dochodzących do 1000° (żółty żar). Tymczasem takie materiały oporowe, jak nikielina czy konstantan, mogą być stosowane tylko do temperatury około 500°, gdyż w wyższej temperaturze ulegają korozji (utlenieniu). Z tego powodu drutów chromonikielinowych i cekasowych używa się do wyrobu piecyków elektrycznych, grzejników, żelazek do prasowania itp.

***§ 1.23. Szeregowe łączenie przewodników.** Przewodniki R_1, R_2, R_3 na rys. 1.34 połączone są tak, że prąd przepływa przez nie kolejno, jeden po drugim; takie połączenie



Rys. 1.34. Połączenie szeregowe trzech przewodników

nazywamy *szeregowym*. Z łatwością sprawdzamy, włączając amperomierz w różne miejsca obwodu (np. w *a, b, c, d, e, f*), że natężenie prądu wzdłuż całego obwodu jest to samo. Prąd elektryczny zachowuje się tak, jak prąd jakiejś substancji, która po drodze ani się nie rozprasza, ani nie przybywa (np. jak prąd wody w szczelnej rurce). Skoro tak jest, to moc wydzielana w każdym z tych trzech „odbiorników" jest odpowiednio równa:

$$M_1 = U_1 i,$$
$$M_2 = U_2 i,$$
$$M_3 = U_3 i,$$

gdzie U_1, U_2, U_3 oznaczają napięcia na zaciskach odpowiednich odbiorników. Całkowita moc równa jest

$$M = Ui,$$

gdzie U jest napięciem na zaciskach źródła prądu. Ponieważ w myśl zasady zachowania energii

$$M = M_1 + M_2 + M_3,$$

stąd

$$U = U_1 + U_2 + U_3; \tag{1.14}$$

napięcie na końcach układu przewodników połączonych szeregowo równa się sumie napięć

na poszczególnych przewodnikach. Łatwo się o tym przekonać wykonując pomiary przy pomocy woltomierza, jak to wskazuje rys. 1.32.

Wzór $M = Ui$ możemy napisać w inny, znany nam już sposób, mianowicie

$$M = Ri^2,$$

gdzie R ma obecnie znaczenie całkowitego oporu naszego układu przewodników. Ponieważ moce wydzielane w poszczególnych przewodnikach możemy również wyrazić w postaci:

$$M_1 = R_1 i^2,$$
$$M_2 = R_2 i^2,$$
$$M_3 = R_3 i^2,$$

przeto, podstawiając powyższe wartości do wzoru na M, otrzymujemy

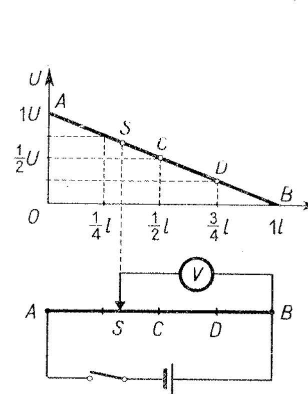
$$R = R_1 + R_2 + R_3; \tag{1.15}$$

opór przewodników połączonych szeregowo równa się sumie oporów poszczególnych przewodników.

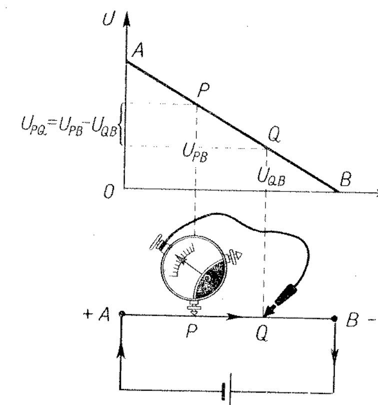
Oczywiście, twierdzenia wyrażone wzorami (1.14) i (1.15) dotyczą dowolnej liczby przewodników.

***§ 1.24. Napięcie na odcinku przewodnika. Potencjał względny.**

Potrafimy zmierzyć napięcie U na przewodniku AB (rys. 1.35). Jeśli zmierzymy napięcie tylko na odcinku CB, będącym połową całego przewodnika (1/2) l, to otrzymamy (1/2) U. Jeżeli pomiar powtórzymy na odcinku DB = (1/4) l, napięcie wyniesie (1/4) U itd.



Rys. 1.35. Pomiar spadku napięcia wzdłuż przewodnika. AB jest to cienki drut nikielinowy (np. od mostku Wheatstone'a, § 1.40); S — suwak (styk posuwany wzdłuż drutu)



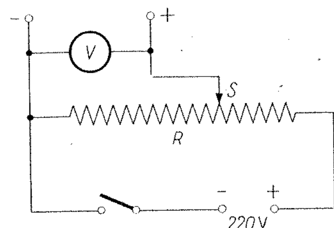
Rys. 1.36. Za pomocą woltomierza kieszonkowego sprawdzamy, że napięcie między punktami P i Q przewodnika jest proporcjonalne do odległości PQ oraz że $U_{PQ} = U_{PB} - U_{QB}$

Ilustruje to wykres na rys. 1.35. Wynik ten wskazuje, że napięcie między jednym końcem przewodnika, np. B, a jakimś punktem dowolnym S, czyli napięcie na odcinku SB jest proporcjonalne do odległości SB. Teoretycznie jest to wynik zupełnie zrozumiały,

napięcie jest bowiem proporcjonalne do oporu danego odcinka przewodnika [wzór (1.12)], ten zaś — do jego długości (§ 1.18)].

Ze wzoru (1.12) wynika również, że napięcie przypadające na jednostkę długości drutu jest stałe (zakładamy, że drut jest wszędzie jednakowo gruby). Stąd wynika, że napięcie między dowolnymi dwoma punktami P i Q przewodnika jest proporcjonalne do ich odległości. Warto to sprawdzić, jak wykazuje rys. 1.36.

Nietrudno teraz zrozumieć urządzenie *dzielnika napięcia* — przyrządu wyobrażonego schematycznie na rys. 1.37. Pozwala on z jakiegokolwiek źródła prądu o napięciu U otrzymać dowolne napięcie od 0 do U. Zasada działania widoczna z rysunku.



Rys. 1.37. Opornik suwakowy ($R \cong 3000\ \Omega$), użyty jako dzielnik napięcia do uzyskania na zaciskach napięć od 0 V do 220 V

Powróćmy jeszcze do rys. 1.36. Oznaczmy przez U_{PB}, U_{QB} i U_{PQ} napięcia, jakie panują między punktami, które wypisane są jako wskaźniki przy symbolu U. Za pomocą woltomierza z łatwością sprawdzimy, że

$$U_{PQ} = U_{PB} - U_{QB} \tag{1.14a}$$

[co zresztą wynika z faktu proporcjonalności U_{PQ} do odległości PQ, jak również z równości (1.14)]. Ażeby w sposób łatwy i krótki wypowiedzieć sens równości (1.14a), wprowadzimy dla napięć U_{PB} i U_{QB} specjalną nazwę. Napięcie U_{PB} między punktami P i B nazywać będziemy *potencjałem punktu P względem punktu B*; podobnie napięcie U_{QB} nazywać będziemy *potencjałem punktu Q względem punktu B*.

Punkt B obraliśmy jako punkt odniesienia. Potencjały U_{PB} i U_{QB} uważać będziemy za liczby dodatnie, jeśli prąd płynie od punktu danego do punktu odniesienia. Jeśli natomiast prąd płynąłby od punktu odniesienia do punktu danego, to jego potencjał uważalibyśmy za ujemny. Równość (1.14a) wypowiemy więc tak: *napięcie między punktami P i Q równa się różnicy potencjałów tych punktów*. Przy tym obojętne jest, który punkt obraliśmy za punkt odniesienia. Niech np. punktem odniesienia będzie punkt A. Wówczas potencjały punktów P i Q będą liczbami ujemnymi, ale mimo to twierdzenie nasze jest słuszne, bowiem

$$U_{PQ} = U_{PA} - U_{QA}. \tag{1.14b}$$

Innymi słowy: *potencjał punktu P jest wyższy od potencjału punktu Q o wartość napięcia na odcinku PQ*.

Wprowadzona przez nas definicja potencjału pociąga za sobą następujące konsekwencje:

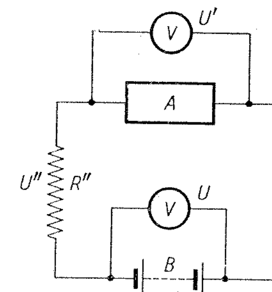
1) potencjał punktu odniesienia jest równy zeru ($U_{BB} = 0$);

2) w przewodniku prąd płynie od punktu o potencjale wyższym do punktu, o potencjale niższym;

3) wzdłuż przewodnika, w którym płynie prąd, potencjał spada w miarę przesuwania się danego punktu w kierunku prądu. W tym sensie mówimy „spadek potencjału wzdłuż przewodnika”.

4) Zamiast mówić, „napięcie między punktami P i Q” można używać terminu „różnica potencjałów punktu P i Q”. Przy tym mówimy zawsze o potencjale „względnym” (w rozdziale następnym zapoznamy się z potencjałem względem ziemi).

***§ 1.25. Napięcie na zaciskach odbiornika energii elektrycznej.** Rysunek 1.38 pokazuje, iż jakiś odbiornik energii elektrycznej A został dołączony przez opór R'' do źródła prądu B. Jeżeli przez U, U' i U'' oznaczymy napięcia na zaciskach źródła prądu, odbiornika i opornika, to mamy w myśl (1.14)



Rys. 1.38. Pomiar napięcia U' na zaciskach odbiornika A i napięcia U na zaciskach baterii B

$$U = U' + U'',$$

ale $U'' = R''i$, stąd

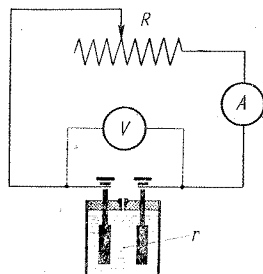
$$U' = U - R''i; \tag{1.16}$$

napięcie na zaciskach jakiegokolwiek odbiornika (silnika, komory *elektrolitycznej, żarówki itp.*) *równa się napięciu na zaciskach źródła prądu, pomniejszonemu o spadek napięcia na dołączonym oporze*. Spadek ten rośnie proporcjonalnie do natężenia prądu pobieranego przez odbiornik.

C. Siła elektromotoryczna i opór wewnętrzny źródła prądu

***§ 1.26. Siła elektromotoryczna i opór wewnętrzny źródła prądu.** W § 1.13, 1.14 i 1.15 wykonaliśmy pierwsze pomiary napięcia na zaciskach akumulatora. Były to pomiary uciążliwe, jak w ogóle pomiary kalorymetryczne, a przy tym mało dokładne. Pomiary te jednak wyjaśniły nam sens fizyczny napięcia i doprowadziły do poznania prawa Ohma, dzięki któremu zdobyliśmy nową, dokładną i szybką metodę mierzenia napięcia, mianowicie woltomierzem. Stosując metodę kalorymetryczną otrzymaliśmy w wyniku, że napięcie akumulatora wynosi 2 V, niezależnie od tego, czy pobieramy prąd 0,5 A, czy też

1 A. Było to jednak słuszne tylko w przybliżeniu, o czym możemy się przekonać przy pomocy dokładniejszego pomiaru, jak wskazuje rys. 1.39. Woltomierz pokazuje nam, iż napięcie na zaciskach akumulatora spada tym więcej, im silniejszy prąd z niego czerpiemy. Spadek ten jest jednak niezwykle mały. W doświadczeniu, którego wyniki zestawione są w tabelce poniżej, spadek napięcia akumulatora wynosi zaledwie 0,03 V na każdy amper obciążenia. Najwyższe napięcie ma akumulator nieobciążony ($i = 0$); oznaczmy je literą E i nazwijmy *siłą elektromotoryczną.*



Rys. 1.39. Pomiar napięcia V akumulatora (lub ogniwa Leclanchégo) w zależności od obciążenia (i)

i (A)	U (V)
0	2 (= E)
1	1,97
2	1,94
3	1,91

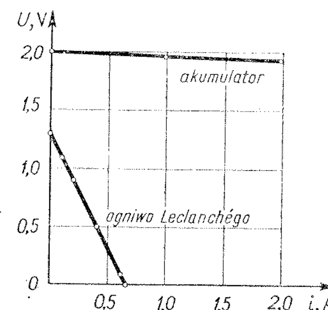
W pierwszym pomiarze natężenie prądu praktycznie jest równe 0, trzeba jednak pamiętać, że sam woltomierz przepuszcza pewien prąd, chociaż bardzo słaby, około 0,001 A. Ten prąd powoduje spadek napięcia odpowiednio proporcjonalny, a więc 0,00003 V; ten mały spadek, będący poza granicami możności zaobserwowania za pomocą woltomierza, można pominąć.

Napięcie akumulatora podczas pracy ($i > 0$) jest mniejsze od siły elektromotorycznej o pewien spadek, który jako proporcjonalny do natężenia prądu możemy oznaczyć przez ri, gdzie r jest współczynnikiem proporcjonalności. Zatem

$$U = E - ri. \tag{1.17}$$

W wypadku naszego akumulatora ri wynosi 0,03 V przy prądzie 1 A, czyli $r = 0{,}03$ V/A $= 0{,}03\ \Omega$. Jeśli wzór ten porównamy ze wzorem (1.16), widzimy, że r ma znaczenie jakiegoś oporu, włączonego w obwód prądu. Tego oporu w obwodzie na rys. 1.39 (poza oporem odbiornika energii elektrycznej), który by odgrywał analogiczną rolę jak opór R'' na rys. 1.38, nie znajdujemy. Musi on istnieć w samym źródle prądu. Z tego powodu nazywamy go *oporem wewnętrznym akumulatora.*

Wykonajmy te same pomiary z innym źródłem prądu, np. z małym ogniwem Leclanchégo. Wyniki przedstawia załączona tabelka na str. 49 oraz wykres na rys. 1.40. Widzimy stąd, że w tym wypadku napięcie spada bardzo znacznie, tzn. więcej woltów na amper niż poprzednio. Spadek ten wynosi, jak łatwo odczytać z wykresu lub z tabeli, 0,2 V na 0,1 A, czyli 2 V/A. A więc opór wewnętrzny ogniwa naszego wynosi 2 Ω (jest zatem kilkadziesiąt razy większy od oporu wewnętrznego akumulatora!).



Rys. 1.40. Wykres napięcia U akumulatora i ogniwa Leclanchégo w zależności od obciążenia

i (A)	U (V)
0	1,3 (= E)
0,1	1,1
0,2	0,9
0,4	0,5
0,6	0,1
0,65	0

Aby zmierzyć r i E, nie potrzeba w zasadzie wykonywać tak wielu pomiarów, sporządzać tabelki i wykresu. Wystarczy wykonać tylko dwa pomiary: zmierzyć napięcie U_1 źródła prądu, gdy daje ono prąd i_1 oraz napięcie U_2, gdy pobieramy prąd i_2. Wówczas możemy dwukrotnie zastosować wzór (1.17):

$$U_1 = E - ri_1,$$
$$U_2 = E - ri_2,$$

skąd obliczamy dwie niewiadome: E i r.

Wzór (1.17) wyraża prawo Ohma dla źródła prądu, ponieważ U oznacza napięcie na zaciskach źródła prądu, E — jego siłę elektromotoryczną, a r — jego opór wewnętrzny. We wzorze tym nie ma nic, co by charakteryzowało część zewnętrzną obwodu. Ale zwróćmy uwagę na to, że zaciski źródła prądu są połączone z oporem zewnętrznym R, a zatem napięcie U jest jednocześnie napięciem na końcach oporu R. W myśl prawa Ohma (1.8) mamy dla tego oporu $U = Ri$.
Łącząc oba te wzory razem otrzymujemy

$$Ri = E - ri,$$

czyli

$$E = (R + r)\,i. \tag{1.17a}$$

W tej postaci wzór powyższy wyraża *prawo Ohma dla całego obwodu* zawierającego źródło prądu i opór zewnętrzny.

Aby lepiej zrozumieć pojęcie oporu wewnętrznego, przedstawmy sobie obrazowo prąd elektryczny jako strumień elektronów. Płyną one od ujemnego bieguna źródła prądu (ogniwa, prądnicy itp.) przez opór zewnętrzny R do dodatniego bieguna. Stąd przepędzane są wskutek pewnych, dotychczas nieznanych nam procesów (chemicznych w aku-

mulatorze, magnetycznych w prądnicy itp.), do ujemnego bieguna i znów rozpoczynają nowy obieg. Płynąc od dodatniego bieguna do ujemnego wewnątrz źródła prądu, przechodzą przez różne przewodniki (płyty i kwas w akumulatorze, druty — w prądnicy), które im stawiają pewien opór r. Elektrony przechodzą więc w swojej drodze kolejno dwa opory: zewnętrzny R i wewnętrzny r, co znajduje swój wyraz we wzorze (1.17a), w którym występuje suma obu tych oporów $(R+r)$.

Jeżeli oba bieguny źródła prądu połączymy krótkim drutem miedzianym $(R \cong 0)$, to prąd ma do przebycia tylko opór wewnętrzny. Jego natężenie [wzór (1.17a)] wynosi wówczas $i = \frac{E}{r}$. Jest to tzw. „prąd zwarcia". W akumulatorze (małe r) prąd zwarcia może wynosić setki amperów; jest więc dla akumulatora bardzo niebezpieczny. Natomiast w ogniwie Leclanchégo (duże r) prąd zwarcia jest bardzo słaby (por. tabelkę na str. 49).

***§ 1.27. Czy woltomierz mierzy siłę elektromotoryczną E?** Ze wzoru (1.17) wynika, że napięcie U na zaciskach źródła prądu jest wtedy tylko równe jego sile elektromotorycznej E, gdy ze źródła nie czerpiemy prądu $(i = 0)$. Lecz już samo przyłączenie woltomierza do zacisków źródła prądu powoduje przepływ prądu, chociaż bardzo słabego. Zatem woltomierz mierząc napięcie na zaciskach, do których jest dołączony, mierzy nie E, lecz $E-ri$. Woltomierz wskazuje więc nieco mniej, niż wynosi siła elektromotoryczna, mianowicie o ri woltów.

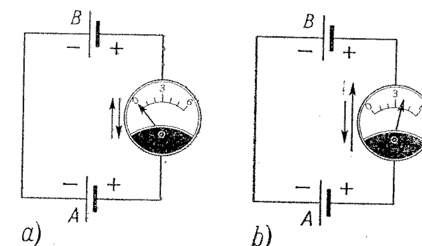
Praktycznie, owa obniżka ri, czyli spadek napięcia na oporze wewnętrznym źródła prądu, może być tak mała, że nie warto jej brać w rachubę. Ma to miejsce w przypadku tych źródeł, których opór wewnętrzny r jest bardzo mały (prądnice, akumulatory, niektóre typy ogniw galwanicznych itp.). Dla naszego akumulatora ów błąd (ri) wyniósł zaledwie $3 \cdot 10^{-5}$ V. Ale już dla ogniwa Leclanchégo ri wynosi około $2\,\Omega \cdot 0{,}001$ A $=$ $= 0{,}002$ V, co stanowi poważniejszy błąd, jeśli mamy zamiar mierzyć napięcie z dokładnością do trzeciego znaku. Jeszcze więcej wynosi ten błąd, jeśli źródło prądu ma opór dziesiątków i setek omów. Siła elektromotoryczna np. ogniwa Westona wynosi 1,018 V, natomiast woltomierz dołączony do niego wskazuje zaledwie około 0,6 V. W takich wypadkach wskazanie woltomierza niczego nam o sile elektromotorycznej ogniwa nie mówi.

Sprawę polepszyłoby trochę zmniejszenie prądu pobieranego przez woltomierz, tzn. zbudowanie woltomierza o znacznie większym oporze (patrz rys. 1.29). Niemniej i taki woltomierz będzie właściwie mierzył nie siłę elektromotoryczną, lecz napięcie na zaciskach ogniwa, chociaż różnica tych dwóch wielkości może być bardzo mała.

Pozostają więc dwie drogi: albo wykonawszy pomiar woltomierzem doliczyć ri, ale do tego trzeba znać zarówno r, jak i, albo obmyślić metodę pomiaru napięcia ogniwa *bez pobierania z niego prądu*. Wtedy napięcie zmierzone będzie identyczne z siłą elektromotoryczną. Metodę taką poznamy w następnym paragrafie.

***§ 1.28. Dokładny pomiar siły elektromotorycznej metodą kompensacji. Potencjometr.** Do ogniwa A dołączmy drugie takie samo ogniwo B, jak pokazuje rys. 1.41a. Za pomocą amperomierza stwierdzamy, że w tak utworzonym obwodzie prąd nie płynie. Wyrażamy to mówiąc, że obie siły elektromotoryczne znoszą się lub kompensują się, albowiem żadne

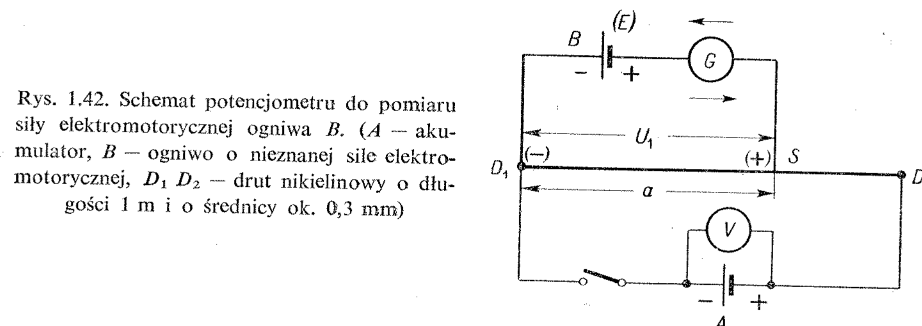
ogniwo nie wywołuje prądu w obwodzie. Inaczej byłoby, gdyby obie siły elektromotoryczne były różne (np. A — akumulator, B — ogniwo Leclanchégo). W tym wypadku amperomierz wskazałby prąd o kierunku wyznaczonym przez większą siłę elektromotoryczną (rys. 1.41b). Widzimy, że tym sposobem możemy stwierdzić równość dwóch sił



Rys. 1.41. a) Dwie jednakowe siły elektromotoryczne $(E_A = E_B)$ znoszą się (kompensują się). Strzałki pokazują obrazowo, że obie siły elektromotoryczne działając osobno wywołałyby prąd w przeciwnych kierunkach. b) Dwie niejednakowe siły elektromotoryczne $(E_A > E_B)$ nie znoszą się. W obwodzie płynie prąd w kierunku zaznaczonym przez większą strzałkę

elektromotorycznych, jeśli ustalimy, że w obwodzie (jak na rys. 1.41a) nie płynie prąd, tzn. że galwanometr wskazuje 0. Tego rodzaju metoda nosi nazwę *metody kompensacyjnej*.

Metoda kompensacyjna łatwo da się zastosować do mierzenia siły elektromotorycznej, jeśli tylko jedną z sił elektromotorycznych, np. ogniwa B, zastąpimy znanym napięciem, które da się dowolnie zmieniać. Skąd wziąć takie napięcie? Oczywiście z dzielnika napięcia.



Rys. 1.42. Schemat potencjometru do pomiaru siły elektromotorycznej ogniwa B. (A — akumulator, B — ogniwo o nieznanej sile elektromotorycznej, $D_1 D_2$ — drut nikielinowy o długości 1 m i o średnicy ok. 0,3 mm)

A więc ogniwo A (rys. 1.41) zastąpmy dzielnikiem napięcia złożonym z drutu D_1D_2 o długości l i z ogniwa A (rys. 1.42) o większej sile elektromotorycznej aniżeli siła elektromotoryczna E ogniwa B, którą mamy zmierzyć. Napięcie ogniwa A podczas pracy (czyli napięcie na końcach drutu D_1D_2) pokazuje woltomierz. Niech ono wynosi U woltów. Wówczas na jednostkę długości drutu wypada napięcie U/l woltów. Między punktami D_1 i S $(D_1S = a)$ panuje wówczas napięcie

$$U_1 = U\frac{a}{l} \qquad (1.18)$$

(por. § 1.24). Jeżeli suwak S ustawimy w takim miejscu drutu, aby w galwanometrze G prąd nie płynął, wówczas $E = U_1$, czyli

$$E = U\frac{a}{l}. \tag{1.19}$$

Ze wzoru tego obliczamy E zmierzywszy U, a i l.

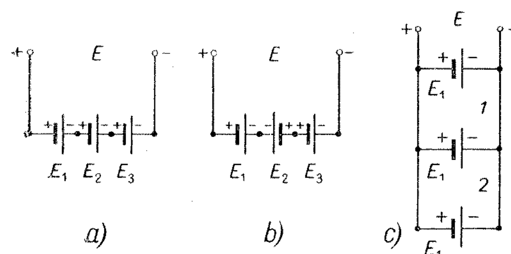
Możemy uniezależnić się od wskazania woltomierza (U), wykonując pomiar dla dwóch ogniw o siłach elektromotorycznych E_1 i E_2:

$$E_1 = U\frac{a_1}{l} \text{ i } E_2 = U\frac{a_2}{l}. \quad \text{Wówczas} \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{a_1}{a_2}.$$

W ten sposób porównujemy siły elektromotoryczne dwóch ogniw. Jeśli siła elektromotoryczna jednego z nich, np. E_2 jest znana, możemy obliczyć E_1. Przyrząd służący do tego celu nazywa się *potencjometrem* (rys. 1.42). Ogniwem o znanej (starannie zmierzonej) sile elektromotorycznej wynoszącej 1,0186 V jest ogniwo Westona.

***§ 1.29. Siła elektromotoryczna baterii ogniw.** Wykonajmy pomiar siły elektromotorycznej baterii ogniw połączonych *szeregowo*. Otrzymamy następujący wynik.

1. *Bateria ogniw połączonych szeregowo ma siłę elektromotoryczną równą sumie sił elektromotorycznych poszczególnych ogniw* (rys. 1.43a).



$E = E_1+E_2+E_3$ $E = E_1-E_2+E_3$ $E = E_1$

$r = r_1+r_2+r_3$ $r = r_1+r_2+r_3$ $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}$

Rys. 1.43. Siła elektromotoryczna baterii ogniw. (Znaki na zaciskach baterii w przypadku *b* zależą od tego, czy E_2 jest większe od E_1+E_3, czy mniejsze)

Jeśli kierunek połączenia niektórych ogniw jest przeciwny niż innych, należy siły elektromotoryczne jednych zaopatrywać znakiem +, natomiast siły elektromotoryczne innych, połączonych przeciwnie niż pierwsze, znakiem —; innymi słowy, siły elektromotoryczne należy dodawać algebraicznie (patrz rys. 1.43b).

Oprócz tego sposobu łączenia ogniw w baterie istnieje jeszcze inny sposób, zwany łączeniem *równoległym*. Sposób ten polega na tym, że wszystkie bieguny dodatnie ogniw łączy się razem i wszystkie bieguny ujemne — razem (rys. 1.43c). Zrozumiałą jest rzeczą, że w ten sposób można łączyć tylko ogniwa o tej samej sile elektromotorycznej. W przeciwnym bowiem razie wewnątrz samej baterii krążyłby prąd, jak w przypadku wskazanym na rys. 1.41b, gdzie dwa różne ogniwa połączone są równolegle. Energia tego prądu

byłaby dla nas stracona, a poza tym ogniwa baterii uległyby wyczerpaniu lub uszkodzeniu. Już sam fakt, że w obwodach takich jak *1* lub *2* wewnątrz baterii (rys. 1.43c) nie krąży prąd, wskazuje, że siła elektromotoryczna baterii (czyli napięcie na jej zaciskach bez pobierania prądu) jest identyczna z siłą elektromotoryczną jednego ogniwa. Przy pomocy pomiaru opisanego w poprzednim paragrafie z łatwością potwierdzimy ten wynik:

2. *Bateria jednakowych ogniw połączonych równolegle ma tę samą siłę elektromotoryczną co jedno ogniwo.*

O słuszności powyższych twierdzeń można przekonać się w daleko prostszy sposób, mianowicie za pomocą woltomierza. Woltomierz, jak wiemy, „fałszuje" nam trochę pomiar wielkości E, błąd (ri) atoli nawet w przypadku ogniw Leclanchégo jest tak mały, że możemy go pominąć.

Oba powyższe twierdzenia stosują się do wszelkich źródeł prądu.

§ 1.30. Wydajność pracy źródła prądu. Napiszmy wzór (1.17) w takiej postaci:

$$E = U+ri. \tag{1.20}$$

Wyraża on, że siła elektromotoryczna źródła jest równa sumie napięcia na zaciskach odbiornika i spadku napięcia na oporze wewnętrznym. Pomnożywszy tę równość przez i otrzymujemy

$$Ei = Ui+ri^2. \tag{1.21}$$

Ui oznacza moc pobieraną przez odbiornik energii elektrycznej, ri^2 natomiast oznacza moc wydzielaną w postaci ciepła przez prąd i w oporze r; jest to więc moc wydzielana w postaci ciepła wewnątrz źródła prądu. Ei ma zatem znaczenie całkowitej mocy wydzielanej w całym obwodzie. Zrozumiałą jest rzeczą, że dla korzystającego z energii elektrycznej praktyczne znaczenie ma tylko moc Ui wydzielana w części zewnętrznej obwodu, natomiast ri^2 jest mocą straconą. Stosunek mocy użytecznej (Ui) do całkowitej (Ei) nazwiemy *wydajnością układu* (η):

$$\eta = \frac{Ui}{Ei} = \frac{U}{E} = \frac{E-ri}{E} = 1-\frac{ri}{E}. \tag{1.22}$$

Wydajność zbliża się do 1, czyli do 100%, gdy opór wewnętrzny źródła prądu jest bliski 0.

Jeśli część zewnętrzna obwodu składa się z oporu R, wówczas $U = Ri$ i wzór (1.20) przyjmie postać

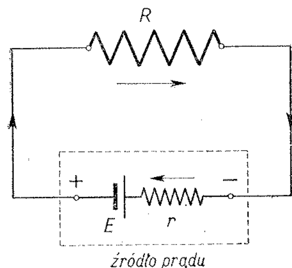
$$E = Ri+ri, \tag{1.20a}$$

znaną już zresztą z § 1.26 (wzór (1.17a)). Wzór ten mówi, że siła elektromotoryczna E czynna w obwodzie równa jest sumie spadków napięcia na oporze zewnętrznym (Ri) i wewnętrznym (ri), tak jakby oba te opory połączone były szeregowo (patrz rys. 1.44). Pomnożywszy ten wzór przez i otrzymujemy równanie mocy

$$Ei = Ri^2+ri^2, \tag{1.21a}$$

które wyraża to samo co i równanie (1.21), mianowicie, że całkowita moc wytwarzana przez źródło prądu (E_i) równa jest sumie mocy wydzielanych w postaci ciepła w zewnętrznej (Ri^2) i wewnętrznej (ri^2) części obwodu.

Z równania tego widzimy, że wydajność uczynimy największą biorąc opór zewnętrzny R bardzo wielki w stosunku do oporu wewnętrznego r. Wówczas jednak osłabimy prąd płynący w obwodzie, a zatem zmniejszymy moc użyteczną $M = Ri^2$. W związku z tym stawiamy sobie pytanie: jak dobrać opór zewnętrzny R w stosunku do oporu wewnętrznego r, aby — rezygnując zresztą z największej wydajności — otrzymać największą moc w zewnętrznej części obwodu (Ri^2)?



Rys. 1.44. Symboliczne przedstawienie źródła prądu: E — siła elektromotoryczna, r — opór wewnętrzny, R — dołączony opór zewnętrzny

Aby odpowiedzieć na to pytanie, obliczmy Ri^2. Ponieważ ze wzoru (1.20a) mamy

$$i = \frac{E}{R+r}, \tag{1.20b}$$

przeto moc M (równa Ri^2) wyrazi się wzorem

$$M = \frac{RE^2}{(R+r)^2}. \tag{1.23}$$

Rozważmy M jako funkcję R: $M = f(R)$. Funkcja ta staje się zerem zarówno dla $R = 0$ (zwarcie), jak i dla $R \to \infty$ (obwód otwarty). A więc dla pewnej wartości R funkcja M ma maksimum. Obliczamy M dla szeregu wartości R, jak pokazuje poniższa tabelka:

$R =$	0	$\frac{1}{3}r$	$\frac{1}{2}r$	r	$2r$	$3r$	$\to \infty$
$M =$	0	$0{,}19 \cdot \frac{E^2}{r}$	$0{,}22 \cdot \frac{E^2}{r}$	$0{,}25 \cdot \frac{E^2}{r}$	$0{,}22 \cdot \frac{E^2}{r}$	$0{,}19 \cdot \frac{E^2}{r}$	$\to 0$

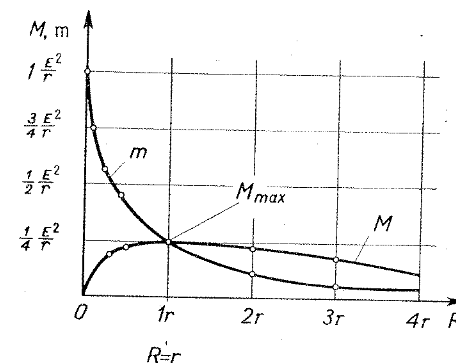
Widzimy stąd, że gdy $R = r$, *tzn. gdy opór zewnętrzny równy jest oporowi wewnętrznemu, wówczas moc wydzielana w oporze zewnętrznym jest największa* (rys. 1.45). Układ taki pracuje jednak z wydajnością równą zaledwie 1/2, albowiem $Ri^2 = ri^2$, czyli tylko połowa mocy wydziela się zewnątrz, połowa rozprasza się wewnątrz źródła prądu.

Do tego samego wniosku można dojść obliczając pochodną funkcji M względem R

$$\frac{dM}{dR} = \frac{r-R}{(R+r)^3}E^2,$$

która staje się zerem dla $R = r$. A więc dla $R = r$ funkcja $M = f(R)$ ma maksimum.

Aby zilustrować powyższe rozważania, wykonajmy następujące paradoksalne doświadczenie. Jako źródło prądu weźmy małą „maszynkę magnetoelektryczną", używaną w aparatach telefonicznych dawnego typu i zwaną „induktorem telefonicznym". Prąd elektryczny wytwarzamy przez kręcenie korbą. Jako odbiornika energii prądu użyjemy: 1) żarówkę z latarki kieszonkowej (która, jak wiadomo normalnie świeci pod napięciem około 4 V i pobiera moc około 1,8 W) i 2) normalną żarówkę sieciową



Rys. 1.45. Wykres mocy wydzielanej zewnątrz $\left(M = Ri^2 = \frac{RE^2}{(R+r)^2}\right)$ oraz mocy wydzielanej wewnątrz źródła prądu $\left(m = ri^2 = \frac{rE^2}{(R+r)^2}\right)$ w zależności od oporu zewnętrznego R

(która świeci się pod napięciem 220 V i zużywa moc około 25 W). Dołączmy więc żarówkę (1): żarówka nie świeci się. Stąd wniosek, że żarówka otrzymuje z generatora o wiele mniej niż 1,8 W potrzebnych jej do świecenia. Czy więc możliwe jest, aby żarówka (2) dołączona do tego generatora zaświeciła się? Pozornie wydaje się, że nie. Wykonajmy jednak doświadczenie, a przekonamy się, że żarówka (2) jednak świeci.

Co sądzimy na podstawie tego doświadczenia o wydajności układu w obu wypadkach? Czy opór wewnętrzny induktora telefonicznego jest mały czy duży?

§ 1.31. Siła przeciwelektromotoryczna odbiornika energii elektrycznej. Jeżeli odbiornik energii elektrycznej składa się tylko z przewodników (oporniki, grzejniki, żarówki), to stosuje się do niego — jak wiemy — prawo Ohma, które wyraża wzór

$$U = Ri.$$

Wówczas cała energia elektryczna zamienia się w odbiorniku na ciepło. Aby ją obliczyć w odniesieniu do jednej sekundy, mnożymy obie strony równości przez i; otrzymujemy

$$Ui = Ri^2, \tag{1.24}$$

co słowami można wyrazić tak: *moc dostarczana odbiornikowi przez źródło prądu* (Ui) *jest równa mocy wydzielanej w nim w postaci ciepła* (Ri^2).

Inaczej rzecz się przedstawia, jeśli odbiornik nie składa się jedynie z przewodników, lecz posiada jeszcze urządzenia, które energię prądu elektrycznego zamieniają na inne postacie energii aniżeli cieplna. Na przykład silnik elektryczny tylko w drobnej części zamienia energię prądu na energię cieplną, głównie zaś — na energię mechaniczną; w komorze elektrolitycznej praca prądu zamienia się głównie na energię chemiczną. Jeśli tę ilość energii elektrycznej, która zamienia się w ciągu 1 sekundy na inną postać energii aniżeli cieplna, oznaczymy przez M', to zasada zachowania energii żąda, by zamiast równości (1.24) spełniona była równość

$$Ui = Ri^2 + M'. \tag{1.25}$$

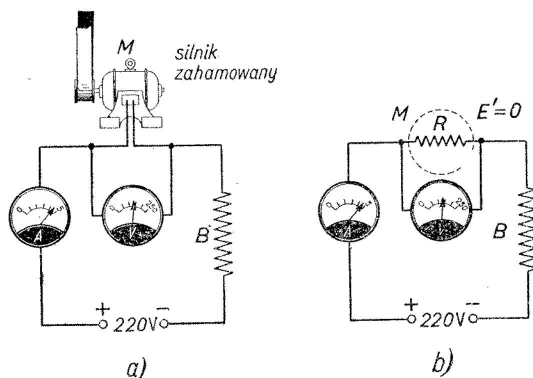
W zastosowaniu do silnika M' oznacza moc wydzielaną przez silnik w postaci pracy mechanicznej, natomiast Ri^2 oznacza moc wydzielaną w jego zwojach w postaci ciepła. Równanie (1.25) napiszmy inaczej:

$$Ui - M' = Ri^2. \tag{1.25a}$$

Podobnie jak przez podzielenie równania (1.24) przez i otrzymuje się prawo Ohma, tak samo przez podzielenie ostatniego równania przez i otrzymamy równanie analogiczne do prawa Ohma

$$U - \frac{M'}{i} = Ri. \tag{1.25b}$$

Równanie to mówi, że w przypadku pracującego odbiornika Ri nie jest już równe U (napięciu na zaciskach odbiornika), lecz jest pomniejszone o wielkość $\frac{M'}{i}$. Prąd jest więc słabszy, mianowicie taki, jaki płynąłby przez opór R pod napięciem $U - \frac{M'}{i}$.



Rys. 1.46. a) Silnik zahamowany pobiera silny prąd przy niskim napięciu na zaciskach. b) Symboliczne przedstawienie silnika jako oporu R

Wnosimy stąd, że odbiornik pracując wytwarza *sam* napięcie o wielkości $\frac{M'}{i}$ działające przeciwnie niż U. To napięcie nazywa się *siłą przeciwelektromotoryczną* odbiornika energii elektrycznej. Oznaczywszy ją literą E', mamy

$$E' = \frac{M'}{i}. \tag{1.26}$$

Równanie (1.25b) napiszemy więc

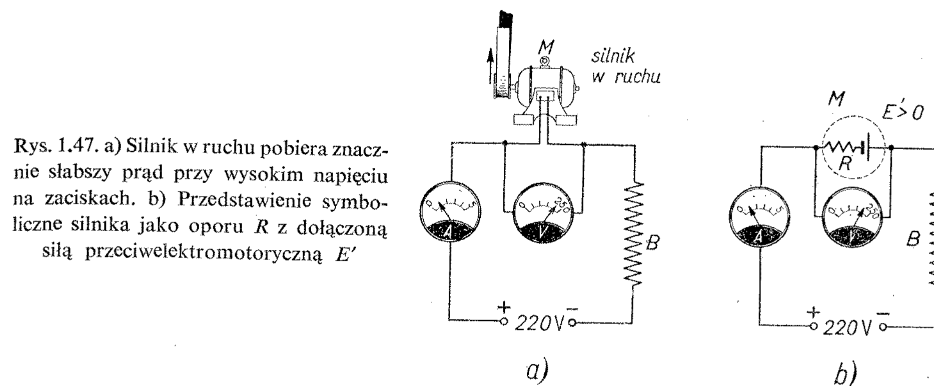
$$U - E' = Ri. \tag{1.25c}$$

Wyraża ono *uogólnione prawo Ohma dla odbiornika*, w którym oprócz ciepła wytwarza się również inna postać energii. Wyprowadziliśmy je bezpośrednio z prawa Ohma i z zasady zachowania energii, mimo że na razie nic nie wiemy o tym, w jaki sposób w odbiorniku wytwarza się siła przeciwelektromotoryczna.

Aby zilustrować równanie (1.25c), wykonajmy interesujące doświadczenie z silnikiem elektrycznym:

a) Silnik całkowicie zahamowany dołączamy do sieci (220 V) przez opornik B (20 Ω) zabezpieczający przed zbyt silnym prądem, mogącym spalić silnik (rys. 1.46a). Woltomierz wskazuje dość niskie napięcie U na zaciskach silnika (132 V), a amperomierz — dość silny prąd i (4.4 A). Silnik w obwodzie tym odgrywa tylko rolę oporu $R = \frac{U}{i}$ (w naszym przykładzie 30 Ω), co symbolicznie pokazuje rys. 1.46b.

b) Silnik uwalniamy i pozwalamy mu wykonywać pracę (rys. 1.47a). Spostrzegamy, że napięcie podnosi się znacznie (w naszym przykładzie do 200 V), natomiast natężenie prądu gwałtownie spada (do 1 A). Silnik zachowuje się więc tak, jakby do danego oporu



Rys. 1.47. a) Silnik w ruchu pobiera znacznie słabszy prąd przy wysokim napięciu na zaciskach. b) Przedstawienie symboliczne silnika jako oporu R z dołączoną siłą przeciwelektromotoryczną E'

R dołączyło się teraz źródło siły elektromotorycznej E' skierowanej tak, jak wskazuje rys. 1.47b. To, co pokazuje nam teraz woltomierz, jest sumą dwóch napięć: napięcia E', czyli siły przeciwelektromotorycznej, oraz napięcia Ri, które nazywamy po prostu „*spadkiem omowym*”,

$$U = E' + Ri. \tag{1.25d}$$

Z łatwością obliczyć możemy siłę przeciwelektromotoryczną silnika:

$$E' = U - Ri. \tag{1.25e}$$

W naszym przykładzie $E' = 200 \text{ V} - 30\,\Omega \cdot 1 \text{ A} = 170 \text{ V}$.

Obliczmy moc, jaką silnik (w przypadku b) zamienia na pracę mechaniczną;

$$M' = E'i = Ui - Ri^2; \tag{1.25f}$$

w przykładzie liczbowym $M' = 220 \text{ V} \cdot 1 \text{ A} - 30\,\Omega \cdot (1 \text{ A})^2 = 170 \text{ W}$. Natomiast moc wydzielana w postaci ciepła wynosi Ri^2 (30 W). Całkowita moc dostarczana silnikowi wynosi Ui (200 W), z czego tylko część, mianowicie $E'i$, zamieniana jest na pracę, reszta natomiast (Ri^2) rozprasza się w silniku w postaci ciepła. Z tego względu stosunek

$$\eta = \frac{E'i}{Ui} = \frac{E'}{U} = 1 - \frac{Ri}{U} \tag{1.27}$$

został nazwany *wydajnością* silnika. W naszym przykładzie wydajność

$$\eta = \frac{170}{200} = 0{,}85,$$

czyli 85%. Część mocy stracona wynosi $\frac{Ri}{U}$; w naszym przykładzie 15%.

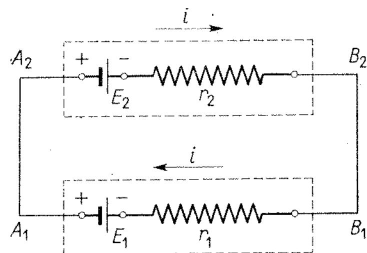
O istnieniu siły przeciwelektromotorycznej wnioskowaliśmy dotychczas z dwóch faktów: ze spadku natężenia prądu i ze wzrostu napięcia na zaciskach silnika, gdy ten zaczął wykonywać pracę. Poniższe doświadczenie pozwoli nam bezpośrednio zaobserwować istnienie siły przeciwelektromotorycznej.

Puszczamy silnik w ruch, jak na rys. 1.47a. Gdy silnik się rozpędzi, wyłączamy prąd. Silnik rozpędem obraca się dalej, a woltomierz, mimo że silnik odłączony jest od sieci, pokazuje w dalszym ciągu znaczne napięcie! Widzimy, że *silnik w ruchu jest rzeczywiście źródłem jakiejś siły elektromotorycznej, której kierunek jest taki* (rys. 1.47b), *że przeciwdziała prądowi zasilającemu silnik*. Jednocześnie widzimy, że ta siła przeciwelektromotoryczna maleje, gdy silnik zwalnia bieg. Zależności te lepiej zrozumiemy, gdy zajmiemy się zbadaniem istoty siły przeciwelektromotorycznej.

§ **1.32. Dalsze uogólnienie prawa Ohma.** Weźmy pod uwagę źródło prądu o sile elektromotorycznej E_1 i o oporze wewnętrznym r_1. Napięcie U_1 na jego zaciskach daje nam wzór (1.17).

$$U_1 = E_1 - r_1 i.$$

Do tego źródła prądu przyłączony jest pewien odbiornik energii elektrycznej o oporze r_2,



Rys. 1.48. Schemat przedstawiający symbolicznie źródło prądu (E_1, r) połączone z odbiornikiem (E_2, r_2)

w którym wytwarza się siła przeciwelektromotoryczna E_2. Napięcie U_2 panujące na jego zaciskach wyraża wzór (1.25d)

$$U_2 = E_2 + r_2 i.$$

Jeśli zaciski tego odbiornika połączone są bezpośrednio z zaciskami źródła prądu (rys. 48), to U_1 i U_2 wyrażają to samo napięcie, zatem

$$E_1 - r_1 i = E_2 + r_2 i,$$

czyli

$$E_1 - E_2 = r_1 i + r_2 i. \tag{1.28}$$

Strona lewa tej równości wyraża różnicę sił, elektromotorycznej i przeciwelektromotorycznej, czynnych w rozważanym obwodzie. Siła przeciwelektromotoryczna jest to nic innego jak siła elektromotoryczna, której kierunek jest taki, że gdyby istniała sama,

wywołałaby prąd o kierunku przeciwnym niż prąd płynący ze źródła prądu. Jeśli zgodzimy się siłę przeciwelektromotoryczną uważać za siłę elektromotoryczną ujemną, tzn. — E_2 za dodatnie, to powiemy, że lewa strona równości (1.28) wyraża sumę (algebraiczną) sił elektromotorycznych, czynnych w danym obwodzie. Wzór (1.28) wyraża tedy następujące prawo: *suma sił elektromotorycznych, czynnych w obwodzie, równa jest sumie spadków napięć na wszystkich oporach obwodu.*

Wzór (1.28) można uogólnić na wypadek, gdy w obwodzie działa więcej sił elektromotorycznych (i przeciwelektromotorycznych). Jeśli niektóre z sił elektromotorycznych działają w kierunku przeciwdziałającym prądowi (tzn. zgodnie z E_2), to należy uważać je za ujemne (patrz rys. 1.43b).

Wówczas wzór (1.28) przybiera postać

$$\Sigma E = (\Sigma r) i, \tag{1.28a}$$

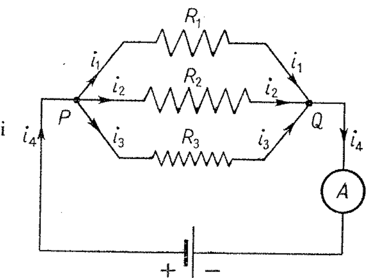
gdzie ΣE oznacza sumę *wszystkich* sił elektromotorycznych, a Σr — sumę *wszystkich* oporów. Inaczej

$$i = \frac{\Sigma E}{\Sigma r}. \tag{1.28b}$$

Wzory powyższe wyrażają prawo Ohma w najogólniejszej postaci; stosuje się ono do obwodów zawierających dowolne źródła prądu i dowolne odbiorniki energii elektrycznej.

D. Rozgałęzienie prądu

*§ **1.33. I prawo Kirchhoffa.** Rysunek 1.49 przedstawia obwód, w którym prąd dochodząc do punktu P rozgałęzia się i przechodzi przez kilka oporów R_1, R_2, R_3, których końce znów schodzą się razem w punkcie Q. O takich oporach mówimy, że są połączone *równolegle*. Zmierzmy amperomierzem natężenie prądu kolejno we wszystkich gałęziach



Rys. 1.49. Schemat rozgałęzienia prądu służący do ilustracji praw Kirchhoffa

$PR_1Q(i_1)$, $PR_2Q(i_2)$ i $PR_3Q(i_3)$ oraz w przewodniku głównym, tzn. tym, który doprowadza prąd do punktu P lub odprowadza go z punktu Q (i_4). Przekonamy się z łatwością, że

$$i_1 + i_2 + i_3 = i_4. \tag{1.29}$$

Związek ten mówi nam również, że prąd elektryczny zachowuje się jak prąd jakiejś substancji (por. § 1.23): rozgałęziwszy się w punkcie P odnajduje się bez uszczerbku w punkcie Q. Równanie (1.29) napiszemy tak

$$i_1+i_2+i_3-i_4=0. \tag{1.29a}$$

Zwróćmy uwagę np. na punkt Q. Uważajmy natężenie prądu wpływającego do tego punktu za dodatnie (tzn. zaopatrujemy je znakiem +), a natężenie prądu wypływającego za ujemne (tzn. zaopatrujemy je znakiem —). Wówczas prawo wyrażone równaniem (1.29a) wypowiemy tak: *suma algebraiczna natężeń prądów wpływających do pewnego punktu obwodu i wypływających z niego równa się zeru.* Jest to *I prawo Kirchhoffa.* Dla dowolnej ilości przewodników, zbiegających się w jakimkolwiek punkcie sieci, prawo to wyraża się ogólniej równaniem

$$\Sigma i=0. \tag{1.29b}$$

*§ **1.34. II prawo Kirchhoffa.** Zwróćmy uwagę na to, że napięcia na końcach oporów R_1, R_2 i R_3 są, w myśl prawa Ohma, odpowiednio równe: $R_1 i_1$, $R_2 i_2$ i $R_3 i_3$. Ale początki i końce tych wszystkich oporów zbiegają się w punktach P i Q, zatem powyższe trzy napięcia są identyczne z napięciem U panującym między punktami P i Q. Napiszemy więc

$$U=R_1 i_1=R_2 i_2=R_3 i_3. \tag{1.30}$$

Dla jakichkolwiek dwóch oporów, np. R_1 i R_2, możemy napisać

$$R_1 i_1=R_2 i_2, \tag{1.30a}$$

czyli

$$\frac{i_1}{i_2}=\frac{R_2}{R_1}. \tag{1.30b}$$

Każde z powyższych równań wyraża, że jeśli opory połączone są równolegle, to *natężenia prądów w poszczególnych przewodnikach są odwrotnie proporcjonalne do ich oporów.* Jest to *II prawo Kirchhoffa.*

*§ **1.35. Bocznik.** Przypomnijmy sobie schemat amperomierza (rys. 1.17a). Jest to galwanometr (opór wewnętrzny g) z dołączonym równolegle bocznikiem, czyli kawałkiem grubego drutu o bardzo małym oporze b. Jeśli przez i_g oraz i_b oznaczymy natężenia prądów płynących przez galwanometr i przez bocznik, to prąd całkowity I płynący przez ten układ (czyli po prostu przez amperomierz) jest

$$I=i_g+i_b.$$

II prawo Kirchhoffa daje poza tym związek

$$\frac{i_b}{i_g}=\frac{g}{b}$$

albo

$$\frac{i_b+i_g}{i_g}=\frac{g}{b}+1,$$

czyli

$$I=i_g\left(\frac{g}{b}+1\right).$$

Otrzymaliśmy więc następujący wynik: jeśli przez galwanometr płynie prąd i_g, to fakt ten dowodzi, że przez amperomierz (galwanometr + bocznik) płynie wówczas prąd I, który jest $\left(\frac{g}{b}+1\right)$ razy większy niż prąd i_g. Wniosek stąd oczywisty, że galwanometr zaopatrzony w bocznik może służyć do mierzenia prądów tysiące razy silniejszych aniżeli mógłby je zmierzyć sam galwanometr. Należy tylko wskazanie przyrządu (i_g) pomnożyć przez liczbę $\left(\frac{g}{b}+1\right)$ dokładnie wyznaczoną dla danego galwanometru i bocznika.

Przykład liczbowy. Przyrząd przedstawiony na rys. 1.17, jeśli jest bez bocznika, daje pełne wychylenie (30 podziałek) pod wpływem prądu 3 mA. Jest to więc najsilniejszy prąd, jaki może on mierzyć. Opór cewki tego galwanometru wynosi 10 Ω. Jaki należy zastosować bocznik, aby można było mierzyć prądy dochodzące do 3 A? Odpowiedź jest prosta: czynnik $\frac{g}{b}+1$ musi wynosić 1000. Stąd $\frac{g}{b}=999$, czyli $b=\frac{1}{999}g=\frac{10}{999}\,\Omega=$ $=0{,}01001\,\Omega$. Właśnie bocznik o takim oporze włącza się równolegle do cewki galwanometru z rys. 1.17b, jeśli przełącznik pokrętny ustawimy w pozycji „3 A". W niektórych typach amperomierzy boczniki dołącza się z zewnątrz do zacisków przyrządu.

*§ **1.36. Opór przewodników połączonych równolegle.** Na rysunku 1.49 prąd o natężeniu i_4 przepływa między punktami P i Q przez wiązkę przewodników pod napięciem U. Stosunek $\frac{U}{i_4}$ ma znaczenie oporu (R), który włączony między punktami P i Q przepuściłby ten sam prąd i_4 pod tym samym napięciem U. Opór R zastąpiłby w zupełności całą wiązkę przewodników R_1, R_2 i R_3. Nazwać by go można oporem zastępczym albo po prostu oporem układu przewodników połączonych równolegle. Mamy więc

$$R=\frac{U}{i_4}.$$

Aby obliczyć R przy pomocy oporów R_1, R_2, R_3, napiszemy I prawo Kirchhoffa

$$i_4=i_1+i_2+i_3;$$

po podzieleniu przez U otrzymujemy

$$\frac{i_4}{U}=\frac{i_1}{U}+\frac{i_2}{U}+\frac{i_3}{U},$$

albo inaczej

$$\frac{1}{\frac{U}{i_4}}=\frac{1}{\frac{U}{i_1}}+\frac{1}{\frac{U}{i_2}}+\frac{1}{\frac{U}{i_3}}.$$

Ale $\frac{U}{i_1}$, $\frac{U}{i_2}$ i $\frac{U}{i_3}$, w myśl prawa Ohma dla poszczególnych przewodników, są to właśnie opory R_1, R_2 i R_3 tych przewodników. Zatem zastąpiwszy mianowniki powyższej równości przez odpowiednie opory otrzymujemy

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}. \quad (1.31)$$

Odwrotność oporu układu przewodników połączonych równolegle równa jest sumie odwrotności oporów poszczególnych przewodników. Dla dowolnej liczby (n) przewodników wzór (1.31) przybiera postać:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}. \quad (1.31a)$$

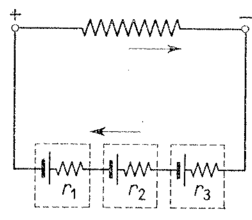
Jeśli wszystkie te przewodniki mają jednakowe opory (oznaczmy je przez R_1), to wzór (1.31a) uprości się znacznie. Mianowicie będziemy mieli

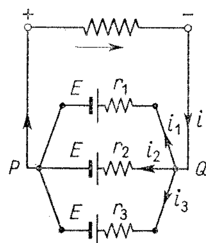
$$\frac{1}{R} = n \cdot \frac{1}{R_1},$$

czyli

$$R = \frac{R_1}{n}. \quad (1.31b)$$

*§ **1.37. Opór wewnętrzny baterii ogniw.** a) Bateria szeregowa. W baterii szeregowej prąd przepływa kolejno przez wszystkie opory wewnętrzne ogniw. Ilustruje to obrazowo rys. 1.50a, gdzie r_1, r_2 i r_3 oznaczają opory wewnętrzne poszczególnych ogniw. W każdym ogniwie wydziela się energia cieplna w ilości $r_1 i^2$, $r_2 i^2$, $r_3 i^2$ na sekundę, zatem





Rys. 1.50. Symboliczne przedstawienie baterii: a) szeregowej i b) równoległej

w całej baterii wydziela się suma tych energii: $(r_1+r_2+r_3)\,i^2$. Jeśli opór wewnętrzny całej baterii oznaczymy przez r, to energia wydzielająca się wewnątrz niej w ciągu sekundy w postaci ciepła jest ri^2. Przez porównanie tych dwóch wielkości otrzymujemy, że $r = r_1+r_2+r_3$. Ogólniej:

$$r = r_1 + r_2 + \ldots + r_n.$$

Zwróćmy uwagę na to, że wzór powyższy nie zmienia się, jeśli w baterii niektóre ogniwa połączone są odwrotnie (rys. 1.43b). Pochodzi to stąd, że i wówczas w ogniwach wydziela się ciepło proporcjonalnie do ich oporów oraz do i^2.

b) Bateria równoległa. Rysunek 1.50b przedstawia baterię złożoną z trzech ogniw o tej samej sile elektromotorycznej E, lecz o różnych oporach wewnętrznych r_1, r_2, r_3. Natężenia prądów płynących przez poszczególne ogniwa są: i_1, i_2, i_3. Natężenie prądu przed rozgałęzieniem jest równe i. Na podstawie I prawa Kirchhoffa mamy

$$i = i_1 + i_2 + i_3.$$

Z drugiej strony, napięcie U na każdym ogniwie jest to samo, gdyż jest identyczne z napięciem między punktami P i Q. Ze wzoru (1.17) mamy

$$U = E - r_1 i_1 = E - r_2 i_2 = E - r_3 i_3.$$

Stąd

$$i_1 = (E-U)\frac{1}{r_1},$$

$$i_2 = (E-U)\frac{1}{r_2},$$

$$i_3 = (E-U)\frac{1}{r_3}.$$

Dodając stronami powyższe równości otrzymujemy

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = (E-U)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right).$$

Jeśli całą baterię uważać będziemy za jedno źródło prądu o tej samej sile elektromotorycznej E i o oporze r, to cały prąd i będzie przez to źródło przechodził; będziemy wówczas mieli $U = E - ri$, czyli

$$i = (E-U)\frac{1}{r}.$$

Porównując ostatnie dwie równości ze sobą mamy

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}.$$

Ogólnie, dla dowolnej liczby ogniw (n)

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots + \frac{1}{r_n}.$$

Jeśli wszystkie ogniwa mają ten sam opór wewnętrzny r_1, to opór całej baterii wynosi

$$r = \frac{r_1}{n},$$

czyli jest n razy mniejszy. Otrzymane wzory mówią nam, że *opór wewnętrzny baterii szeregowej czy równoległej oblicza się zupełnie tak samo, jak opór zespołu przewodników połączonych szeregowo lub równolegle.*

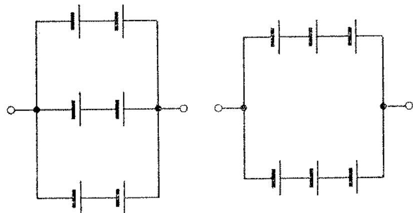
§ **1.38. Jak łączyć ogniwa: szeregowo czy równolegle?** Przypuśćmy, że mamy h jednakowych ogniw, każde o oporze wewnętrznym r_1 i o sile elektromotorycznej E_1. Jeśli celem naszym jest uzyskanie jak największego napięcia, to oczywiście łączymy ogniwa szeregowo. Inaczej jednak sprawa się przedstawia, jeśli celem naszym jest otrzymanie możliwie najsilniejszego prądu w danym oporze zewnętrznym R. Jeśli ogniwa połączone są szeregowo, prąd w obwodzie ma natężenie

$$i_s = \frac{nE_1}{R+nr_1}.$$

Natomiast w wypadku połączenia równoległego natężenie prądu będzie

$$i_r = \frac{E_1}{R+\frac{r_1}{n}}.$$

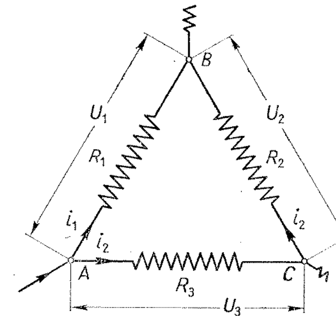
Rozważmy dwa krańcowe wypadki. a) Opór zewnętrzny R jest tak wielki wobec oporu wewnętrznego całej baterii (szeregowej czy równoległej), że w mianownikach obu wzorów można nr_1 czy $\frac{r_1}{n}$ pominąć wobec R. Otrzymujemy w przybliżeniu: $i_s \cong n\frac{E_1}{R}$, podczas gdy $i_r \cong \frac{E_1}{R}$. Połączenie szeregowe jest stanowczo korzystniejsze. P r z y k ł a d: żarówka zasilana z akumulatorów, linia telefoniczna z baterii ogniw Leclanchégo itp. b) Opór zewnętrzny R jest tak mały w stosunku do oporu całej baterii, że w mianownikach obu wzorów R można pominąć. Otrzymujemy: $i_s \cong \frac{E_1}{r_1}$, podczas gdy $i_r \cong n\frac{E_1}{r_1}$. Połączenie równoległe jest tutaj korzystniejsze. P r z y k ł a d: żarzenie krótkiego kawałka drutu oporowego z baterii ogniw Leclanchégo.



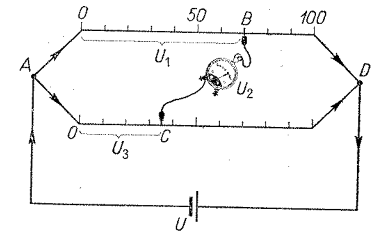
Rys. 1.51. Połączenie równoległo-szeregowe sześciu ogniw

To są wypadki krańcowe. W innych wypadkach korzystniejsze może się okazać łączenie mieszane (równoległo-szeregowe) ogniw. Polega ono na tym, że ogniwa łączy się np. szeregowo w grupy po kilka, a grupy tak utworzone łączy się równolegle (rys. 1.51).

§ **1.39. II prawo Kirchhoffa w postaci ogólniejszej.** Zauważyliśmy już zapewne, że I prawo Kirchhoffa ($\Sigma i = 0$) odnosi się do dowolnego punktu sieci, w którym przewodniki rozgałęziają się. Natomiast II prawo Kirchhoffa ($R_1 i_1 = R_2 i_2$) odnosi się do obwodu zamkniętego, utworzonego przez przewodniki sieci. Taki obwód zamknięty na rys. 1.49 utworzony np. przez opory R_1 i R_2, zawierał dwa punkty rozgałęzienia: P i Q. Można jednak wyobrazić sobie taką sieć przewodników, w której znajdą się obwody zawierające więcej punktów rozgałęzienia aniżeli dwa. Rysunek 1.52 np. wyobraża takie „oczko" sieci, które ma trzy punkty rozgałęzienia: A, B i C. Ten wypadek da się bardzo łatwo zrealizować według schematu na rys. 1.53. Dwa druty oporowe rozpięte na drewnianych sztabach metrowych łączymy równolegle i puszczamy przez nie prąd z akumulatora. Początki obu drutów (oznaczone zerami) łączymy w punkcie A przewodnikami praktycznie bezoporowymi. Dowolne punkty B i C obu drutów łączymy woltomierzem, który odgrywa rolę oporu R_2 z rys. 1.52 i mierzy jednocześnie napięcie U_2 między punktami B i C. Napięcie na dwu innych gałęziach obwodu (U_1 i U_3) odczytujemy bezpośrednio na sztabie, wiedząc z § 1.28, że $U_1 = U\frac{OB}{100}$ i $U_3 = U\frac{OC}{100}$ [por. wzór (1.18)]. Otóż powyższe doświadczenie daje, że



Rys. 1.52. Schemat obwodu zamkniętego ABC (wydzielonego z większej sieci); służącego do wykazania II prawa Kirchhoffa: $\Sigma(Ri) = 0$



Rys. 1.53. Prosty sposób zrealizowania obwodu ABC z rys. 1.52

$$U_2 = U_1 - U_3, \tag{1.32}$$

przy czym prąd w gałęzi BC płynie od C do B. Wyraźmy U_1 i U_3 jako różnice potencjałów odpowiednich punktów względem jakiegokolwiek punktu odgałęzienia, np. D:

$$U_1 = U_{AD} - U_{BD},$$

$$U_3 = U_{AD} - U_{CD},$$

stąd

$$U_2 = U_{AD} - U_{BD} - (U_{AD} - U_{CD}) = U_{CD} - U_{BD}.$$

Otrzymany wynik łatwo było przewidzieć: napięcie na końcach przewodnika BC równa się różnicy potencjałów (względnych) obu końców. Sens fizyczny równania (1.32) bardzo ważny, zyska na jasności, jeśli napięcia U_1, U_2 i U_3 wyrazimy jako różnice po-

tencjałów uwidocznione powyżej. Otrzymujemy wtedy zamiast $U_1 - U_2 - U_3 = 0$ następującą tożsamość:

$$\underset{\substack{\text{spadek potencjału}\\ \text{na odcinku } AB\\ (+R_1 i_1)}}{(U_{AD}-U_{BD})} + \underset{\substack{\text{wzrost potencjału}\\ \text{na odcinku } BC\\ (-R_2 i_2)}}{(U_{BD}-U_{CD})} + \underset{\substack{\text{wzrost potencjału}\\ \text{na odcinku } CA\\ (-R_3 i_3)}}{(U_{CD}-U_{AD})} = 0. \qquad (1.32a)$$

Równość ta wyraża ten sam fakt doświadczalny, co i równość (1.32). Zapamiętajmy sobie treść jej w następujący sposób. Zróbmy „wędrówkę" wzdłuż obwodu $ABCA$. Na pierwszym odcinku AB posuwamy się zgodnie z kierunkiem prądu i znajdujemy spadek potencjału $U_{AD}-U_{BD} = R_1 i_1$; uważajmy go za dodatni. Na drugim odcinku BC posuwamy się niezgodnie z kierunkiem prądu i znajdujemy nie spadek, lecz wzrost potencjału; różnica potencjałów początku i końca odcinka nie jest dodatnia, lecz ujemna, wobec tego $U_{BD}-U_{CD} = -R_2 i_2$. Wreszcie na trzecim odcinku CA wędrujemy również „pod prąd" i spotykamy wzrost potencjału; różnica potencjałów $U_{CD}-U_{AD}$ jest znów ujemna i równa się $-R_3 i_3$. Powiemy więc, że *w całej naszej wędrówce wzdłuż obwodu zamkniętego spotykamy szereg spadków i wzrostów napięcia, których suma algebraiczna równa jest zeru* (przy tym spadki uważamy za dodatnie, wzrosty za ujemne). Jest to właśnie *ogólniejsze sformułowanie II prawa Kirchhoffa*. W przypadku naszego obwodu z rys. 1.52 lub 1.53 wyraża się ono następującym wzorem:

$$R_1 i_1 + (-R_2 i_2) + (-R_3 i_3) = 0. \qquad (1.32b)$$

Natomiast dla obwodu, złożonego z dowolnej ilości oporów tworzących zamknięty pierścień, II prawo Kirchhoffa można napisać tak:

$$\Sigma(Ri) = 0; \qquad (1.32c)$$

pamiętać będziemy o tym, że przy sumowaniu (algebraicznym) poszczególnych iloczynów Ri należy stawiać znak +, jeśli wędrując wzdłuż obwodu poruszamy się z „prądem" (spotykamy spadek potencjału), natomiast należy stawiać znak — wtedy, gdy poruszamy się „pod prąd" (spotykamy wzrost potencjału).

Jeżeli obwód składa się tylko z dwóch oporów, to wzór (1.32c) sprowadza się do postaci

$$R_1 i_1 + (-R_2 i_2) = 0,$$

identycznej ze wzorem (1.30a) (obwód PR_1QR_2P na rys. 1.49).

§ 1.40. Mostek Wheatstone'a. Zmodyfikujmy nieco schemat wyobrażony na rys. 1.53. Zauważymy, że obie części drutu AB i BD można zastąpić jakimikolwiek oporami; oznaczmy je literami X i R. Otrzymamy wówczas schemat wyobrażony na rys. 1.54, zwany „mostkiem Wheatstone'a". Na drucie oporowym AD znajduje się suwak C. Między suwakiem a punktem B przerzucony jest „mostek" zawierający woltomierz lub lepiej czuły galwanometr. Suwak C ustawiamy tak, aby przez mostek nie płynął prąd (tzn. aby napięcie U_3 na jego końcach równe było zeru). Długość odcinków AC i CD drutu oznaczamy przez a i b, a ich opory odpowiednio przez R_a i R_b. Zastosujmy II prawo

Kirchhoffa [wzór (1.32b)] kolejno do obwodów $ABCA$ i $BDCB$. Ponieważ $i_3 = 0$, mamy

$$Xi_1 = R_a i_2,$$
$$Ri_1 = R_b i_2.$$

Dzieląc te równania stronami otrzymujemy

$$\frac{X}{R} = \frac{R_a}{R_b}.$$

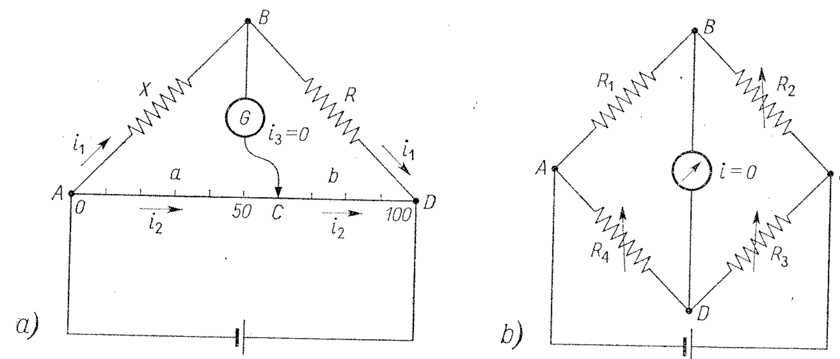
Ale

$$\frac{R_a}{R_b} = \frac{a}{b},$$

zatem

$$X = R\frac{a}{b}.$$

Wzór ten pozwala zastosować mostek Wheatstone'a do wyznaczenia nieznanego oporu X, gdy opór R jest znany (czyli do porównania oporów X i R). Należy tylko suwak C ustawić w takim położeniu, aby w mostku nie płynął prąd i wtedy odczytać długości a i b.



Rys. 1.54. Schemat mostka Wheatstone'a

Ogólnie rzecz biorąc mostek Wheatstone'a składa się z czterech oporników R_1, R_2, R_3 i R_4, połączonych w ten sposób, że tworzą cztery boki kwadratu (rys. 1.54b). W jednej z przekątni tego kwadratu znajduje się źródło prądu, w drugiej zaś — galwanometr. Jeśli opory dobrane są tak, że galwanometr wskazuje zero, wówczas z drugiego prawa Kirchhoffa wynika od razu związek

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_4}{R_3},$$

lub w innej formie

$$R_1 R_3 = R_2 R_4.$$

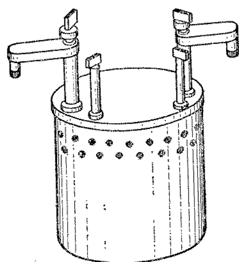
Gdy przez mostek (przekątnię z galwanometrem) nie płynie prąd, wówczas iloczyny oporów przeciwległych są sobie równe. Jest to tzw. *warunek równowagi mostka.*

§ **1.41. Pomiar oporu bezwzględny i względny. Wzorzec oma.** Zwracamy uwagę na ważną okoliczność: metoda mostka Wheatstone'a nie służy do bezwzględnego pomiaru oporu, lecz do porównania dwu oporów, z których jeden musi być uprzednio zmierzony; jest to więc metoda *względna.* Opór ten może być znów zmierzony przez porównanie go z innym znanym oporem itd. Ale ten szereg pomiarów względnych (jeśli pomiary mają być dokładne) nie powinien być zbyt długi i musi się skończyć pomiarem bezwzględnym, to znaczy pomiarem opartym na definicji oporu.

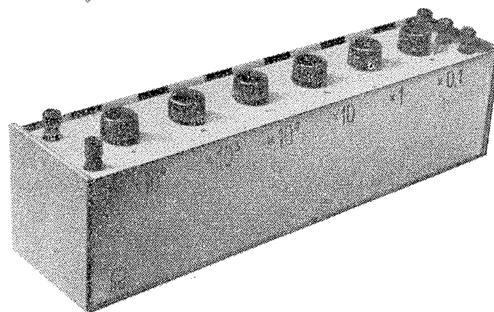
W § 1.18 wyznaczyliśmy opór spirali na podstawie pomiaru bezwzględnego. Opór obliczaliśmy ze wzoru $R = \frac{U}{i}$, przy czym napięcie U mierzyliśmy metodą kalorymetryczną $U = \frac{M}{i} = \frac{L}{it}$, a natężenie prądu amperomierzem wywzorcowanym zgodnie z definicją ampera. Ostatecznie pomiar bezwzględny oporu polega na zmierzeniu pracy, natężenia prądu i czasu

$$R = \frac{L}{i^2 t}.$$

Metoda oparta na tej zasadzie jest wprawdzie metodą *bezwzględną*, nastręcza jednak znaczne trudności, gdyż pomiar pracy L jest w istocie pomiarem kalorymetrycznym, stosunkowo mało dokładnym. Toteż fizycy obmyślili sposób uniknięcia tych trudności, którymi tu nie możemy się zajmować. Sposób ten pozwolił zrealizować dokładnie opór 1 oma,



Rys. 1.55. Opór wzorcowy 1Ω



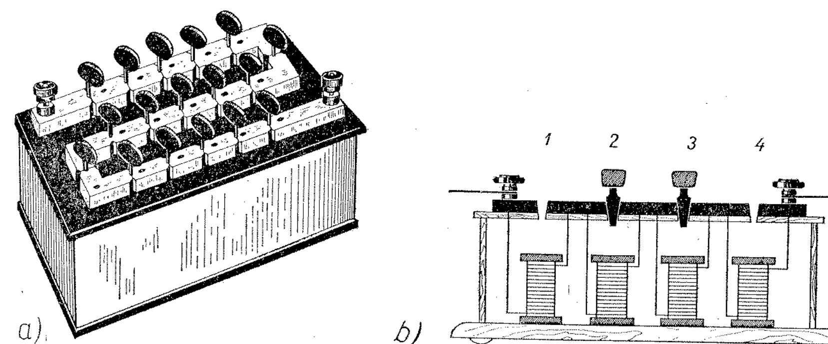
Rys. 1.56. Opornik dekadowy

tzn. opornik, w którym prąd 1 ampera wydziela w ciągu 1 sekundy 1 dżul ciepła, albo, innymi słowy, wywołuje na końcach opornika napięcie 1 wolta. Tak dokładnie sporządzony opornik nazywa się *opornikiem wzorcowym.* Rysunek 1.55 pokazuje opornik wzorcowy 1 Ω wykonany z konstantanu; jest to typ wzorca, jaki w praktyce laboratoryjnej często się stosuje. Oprócz oporników 1 Ω wytwarzane są inne wzorce, np. 0,01 Ω, 0,1 Ω i wielokrotności oma np. 10 Ω, 10^2 Ω, 10^3 Ω itd. Tego rodzaju oporniki wzorcowe możemy stosować do pomiaru nieznanych oporów stosując mostek Wheatstone'a.

Chcielibyśmy zwrócić uwagę na jeszcze jedną korzyść płynącą z posiadania opornika wzorcowego. Rozporządzając wzorcem 1 oma oraz amperomierzem dokładnie wyskalowanym, możemy zrealizować swego rodzaju wzorzec 1 wolta. Mianowicie, przepuszczając prąd o natężeniu 1 A przez wzorzec 1 Ω otrzymujemy na jego końcach napięcie 1 V.

Tak uzyskane napięcie 1 V możemy porównać metodą kompensacyjną (por. § 1.28) z siłą elektromotoryczną specjalnego ogniwa, tzw. „normalnego". Takim ogniwem jest ogniwo Westona opisane bliżej w drugiej części tej książki; jego siła elektromotoryczna wynosi 1,0186 V.

Oporniki wzorcowe są to przyrządy bardzo precyzyjnie wykonane i wymagają bardzo delikatnego obchodzenia się z nimi. Toteż nie powinno się ich używać do pomiarów technicznych, od których nie wymagamy wielkiej dokładności. Do takich pomiarów

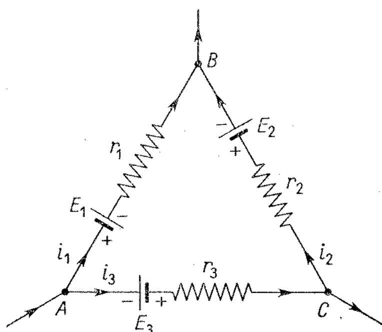


Rys. 1.57. Opornik zatyczkowy a) wygląd, b) schemat połączeń

używa się zazwyczaj tzw. oporników zatyczkowych. Opornik zatyczkowy (rys. 1.57) jest to skrzynka drewniana, w której znajduje się szereg szpulek porcelanowych, na których nawinięty jest drut oporowy w odpowiedniej ilości. Szpulki połączone są szeregowo. Opory szpulek dobrane są tak, że tworzą taki np. zespół (liczby wyrażają opór w omach): 0,1+0,2+0,3+0,4+1+2+3+4+10+20+30+40+100+200+300+400; łącznie zatem opornik ten ma 1111 Ω. Końce drutów każdej szpulki doprowadzone są do klocków metalowych umieszczonych na ebonitowej płycie pudełka (rys. 1.57b). Wciskając między dwa sąsiednie klocki wtyczkę metalową zwieramy końce szpulki, przez co praktycznie wyłączamy ją z obwodu; prąd elektryczny płynie wtedy całkowicie przez klocki i przez wtyczkę, a nie przez szpulkę. W ten sposób z opornika zatyczkowego możemy wybierać różne opory. Opornik dekadowy (rys. 1.56) składa się z kilku grup oporników; w każdej grupie możemy oddzielnym pokrętłem wybierać 0, 1, 2, 3, ..., 9 omów lub jego dziesiętnych wielokrotności, lub podwielokrotności. W ten sposób za pomocą opornika dekadowego wyobrażonego na rys. 1.56 możemy wybierać opory od 0,1 Ω do 9 999,9 Ω.

§ **1.42. II prawo Kirchhoffa w postaci najogólniejszej.** W § 1.39 stwierdziliśmy doświadczalnie, że w jakimkolwiek obwodzie zamkniętym, wybranym z sieci złożonej z różnych oporów, suma spadków i wzrostów potencjału wzdłuż wszystkich odcinków

obwodu równa jest zeru. Należy jednak pamiętać, aby spadek potencjału zaopatrywać znakiem +, a wzrost potencjału znakiem — (ewentualnie w obu wypadkach odwrotnie). Prawo powyższe zachowuje słuszność również i wtedy, gdy dany obwód zamknięty zawiera nie tylko same opory (jak na rys. 1.51), lecz również dowolne odbiorniki energii elektrycznej i dowolne źródła prądu. Weźmy np. obwód *ABC* (rys. 1.58) stanowiący część jakiejś większej sieci; zawiera on dwa odbiorniki o siłach przeciwelektromotorycznych E_1 i E_2 oraz jedno źródło prądu o sile elektromotorycznej E_3. Opory r_1, r_2 i r_3 oznaczają całkowite opory gałęzi *AB*, *BC* i *AC* (a więc włącznie z oporem wewnętrznym



Rys. 1.58. Schemat obwodu zamkniętego *ABC* (wydzielonego z większej sieci), służący do wyprowadzenia II prawa Kirchhoffa w ogólnej postaci: $\Sigma E = \Sigma(ri)$

źródła prądu, jeśli takie istnieje w danej gałęzi). I w tym wypadku słuszny jest związek (1.32a). Poszczególne jednak spadki i wzrosty potencjału składają się w tym wypadku z dwu części: spadku (ewentualnie wzrostu) potencjału na źródle siły elektromotorycznej oraz spadku (ewentualnie wzrostu) potencjału na oporze. Zaznaczone jest to pod poniższą tożsamością:

$$(U_{AD}-U_{BD}) + (U_{BD}-U_{CD}) + (U_{CD}-U_{AD}) = 0. \qquad (1.33)$$

spadek potencjału na odcinku *AB*	wzrost potencjału na odcinku *BC*	wzrost potencjału na odcinku *CA*
$(+E_1+r_1i_1)$	$(-E_2-r_2i_2)$	$(+E_3-r_3i_3)$

Przy tym „wędrówka" wzdłuż obwodu odbywa się w kierunku *ABCA*, a potencjały punktów *A*, *B* i *C* mierzy się względem jakiegoś dowolnego punktu *D* (patrz rys. 1.53); może być nim nawet np. punkt *C* lub inny. W ten sposób dochodzimy do równania

$$(E_1-E_2+E_3)+(r_1i_1-r_2i_2-r_3i_3) = 0. \qquad (1.33a)$$

Zauważmy, że siły elektromotoryczne (*E*) i „spadki omowe" (*ri*) występują tu po tej samej stronie równania. Zatem umowa co do znaków *E* oraz *ri* musi pozostać ta sama co dawniej: gdy podczas wędrówki wzdłuż obwodu *ABCA* spotykamy spadki potencjału, stosujemy przy *E* czy przy *ri* znak +, gdy spotykamy wzrosty potencjału stosujemy znak —. Napiszmy jednak równanie nasze tak, aby siły elektromotoryczne występowały po jednej stronie równania (ze zmienionym znakiem), a spadki omowe — po drugiej (z tym samym znakiem). Otrzymamy

$$-E_1+E_2-E_3 = r_1i_1-r_2i_2-r_3i_3. \qquad (1.33b)$$

Obecnie spadki omowe obowiązuje ta sama umowa co poprzednio, a siły elektromotoryczne — przeciwna, mianowicie: jeśli wędrujemy wzdłuż obwodu *ABCA*, to siły elektromotoryczne mijane od + do — zaopatrujemy znakiem —, a siły elektromotoryczne mijane od — do + znakiem +. Przestrzegając takiej umowy możemy napisać dla obwodu zamkniętego, wydzielonego z jakiejś większej sieci, ogólniej

$$\Sigma E = \Sigma(ri). \qquad (1.33c)$$

Wzór ten wyraża II *prawo Kirchhoffa w najogólniejszej postaci*: *suma algebraiczna wszystkich sił elektromotorycznych i przeciwelektromotorycznych w jakimkolwiek zamkniętym obwodzie równa jest sumie algebraicznej wszystkich spadków omowych* (*ri*).

Dobrze będzie przy tym zauważyć, że jeśli „wędrówkę" w celu ustalenia znaków odbędziemy w przeciwną stronę (*ACBA*), to wprawdzie wszystkie znaki będą odwrotne, lecz równania powyższe nadal zachowują swoją ważność.

Interesujący wynik otrzymamy stosując to prawo do zwykłego obwodu nie zawierającego ani jednego punktu rozgałęzienia, a więc takiego jak np. na rys. 1.48. W całym obwodzie natężenie prądu *i* jest to samo, zatem możemy je wynieść spoza znaku sumy. Otrzymamy zatem:

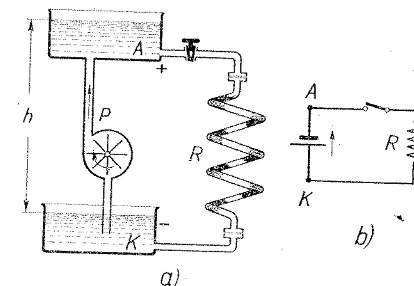
$$\Sigma E = (\Sigma r)\, i.$$

czyli

$$i = \frac{\Sigma E}{\Sigma r}.$$

Jest to uogólnione prawo Ohma [wzór (1.28b)]. Widzimy więc, że uogólnione prawo Ohma jest tylko szczególnym przypadkiem II prawa Kirchhoffa.

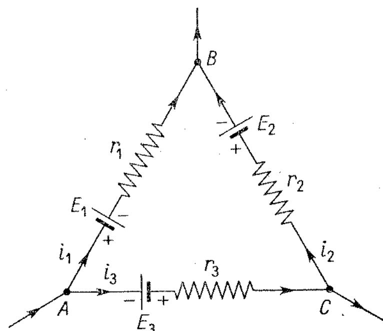
***§ 1.43. O analogii hydrodynamicznej prądu elektrycznego.** Wspominaliśmy już w § 1.23 i 1.33, że prąd elektryczny przypomina prąd jakiejś substancji materialnej, np. wody, która przepływa przez sieć szczelnych rur. Jeśli chcemy, aby woda przepływała



Rys. 1.59. Analogia hydrodynamiczna prądu elektrycznego (obwód złożony z ogniwa, oporu i wyłącznika)

stale ze zbiornika wyższego *A* (rys. 1.59) przez rurę *R* do zbiornika niżej położonego *K*, musimy zainstalować pompę *P*, która wodę będzie przepompowywała z powrotem ze zbiornika *K* do zbiornika *A*. W ten sposób prąd wody utworzy obieg zamknięty. W zjawisku prądu elektrycznego odpowiednikiem pompy jest źródło prądu, czyli generator, który sprawia, że prąd elektryczny płynie od elektrody *A* (anody) poprzez opór *R* do elektrody *K* (katody). Wewnątrz generatora prąd płynie od *K* do *A*, tworząc w ten sposób

obwodu równa jest zeru. Należy jednak pamiętać, aby spadek potencjału zaopatrywać znakiem +, a wzrost potencjału znakiem — (ewentualnie w obu wypadkach odwrotnie). Prawo powyższe zachowuje słuszność również i wtedy, gdy dany obwód zamknięty zawiera nie tylko same opory (jak na rys. 1.51), lecz również dowolne odbiorniki energii elektrycznej i dowolne źródła prądu. Weźmy np. obwód ABC (rys. 1.58) stanowiący część jakiejś większej sieci; zawiera on dwa odbiorniki o siłach przeciwelektromotorycznych E_1 i E_2 oraz jedno źródło prądu o sile elektromotorycznej E_3. Opory r_1, r_2 i r_3 oznaczają całkowite opory gałęzi AB, BC i AC (a więc włącznie z oporem wewnętrznym



Rys. 1.58. Schemat obwodu zamkniętego ABC (wydzielonego z większej sieci), służący do wyprowadzenia II prawa Kirchhoffa w ogólnej postaci: $\Sigma E = \Sigma(ri)$

źródła prądu, jeśli takie istnieje w danej gałęzi). I w tym wypadku słuszny jest związek (1.32a). Poszczególne jednak spadki i wzrosty potencjału składają się w tym wypadku z dwu części: spadku (ewentualnie wzrostu) potencjału na źródle siły elektromotorycznej oraz spadku (ewentualnie wzrostu) potencjału na oporze. Zaznaczone jest to pod poniższą tożsamością:

$$\underset{\substack{\text{spadek potencjału}\\ \text{na odcinku } AB\\ (+E_1+r_1i_1)}}{(U_{AD}-U_{BD})} + \underset{\substack{\text{wzrost potencjału}\\ \text{na odcinku } BC\\ (-E_2-r_2i_2)}}{(U_{BD}-U_{CD})} + \underset{\substack{\text{wzrost potencjału}\\ \text{na odcinku } CA\\ (+E_3-r_3i_3)}}{(U_{CD}-U_{AD})} = 0. \qquad (1.33)$$

Przy tym „wędrówka" wzdłuż obwodu odbywa się w kierunku $ABCA$, a potencjały punktów A, B i C mierzy się względem jakiegoś dowolnego punktu D (patrz rys. 1.53); może być nim nawet np. punkt C lub inny. W ten sposób dochodzimy do równania

$$(E_1-E_2+E_3)+(r_1 i_1-r_2 i_2-r_3 i_3) = 0. \qquad (1.33a)$$

Zauważmy, że siły elektromotoryczne (E) i „spadki omowe" (ri) występują tu po tej samej stronie równania. Zatem umowa co do znaków E oraz ri musi pozostać ta sama co dawniej: gdy podczas wędrówki wzdłuż obwodu $ABCA$ spotykamy spadki potencjału, stosujemy przy E czy przy ri znak +, gdy spotykamy wzrosty potencjału stosujemy znak —. Napiszmy jednak równanie nasze tak, aby siły elektromotoryczne występowały po jednej stronie równania (ze zmienionym znakiem), a spadki omowe — po drugiej (z tym samym znakiem). Otrzymamy

$$-E_1+E_2-E_3 = r_1 i_1-r_2 i_2-r_3 i_3. \qquad (1.33b)$$

Obecnie spadki omowe obowiązuje ta sama umowa co poprzednio, a siły elektromotoryczne — przeciwna, mianowicie: jeśli wędrujemy wzdłuż obwodu $ABCA$, to siły elektromotoryczne mijane od + do — zaopatrujemy znakiem —, a siły elektromotoryczne mijane od — do + znakiem +. Przestrzegając takiej umowy możemy napisać dla obwodu zamkniętego, wydzielonego z jakiejś większej sieci, ogólniej

$$\Sigma E = \Sigma(ri). \qquad (1.33c)$$

Wzór ten wyraża II *prawo Kirchhoffa w najogólniejszej postaci: suma algebraiczna wszystkich sił elektromotorycznych i przeciwelektromotorycznych w jakimkolwiek zamkniętym obwodzie równa jest sumie algebraicznej wszystkich spadków omowych* (ri).

Dobrze będzie przy tym zauważyć, że jeśli „wędrówkę" w celu ustalenia znaków odbędziemy w przeciwną stronę ($ACBA$), to wprawdzie wszystkie znaki będą odwrotne, lecz równania powyższe nadal zachowują swoją ważność.

Interesujący wynik otrzymamy stosując to prawo do zwykłego obwodu nie zawierającego ani jednego punktu rozgałęzienia, a więc takiego jak np. na rys. 1.48. W całym obwodzie natężenie prądu i jest to samo, zatem możemy je wynieść spoza znaku sumy. Otrzymamy zatem:

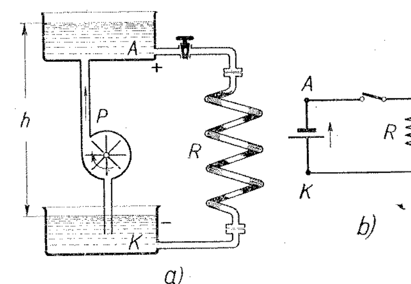
$$\Sigma E = (\Sigma r)\, i.$$

czyli

$$i = \frac{\Sigma E}{\Sigma r}.$$

Jest to uogólnione prawo Ohma [wzór (1.28b)]. Widzimy więc, że uogólnione prawo Ohma jest tylko szczególnym przypadkiem II prawa Kirchhoffa.

***§ 1.43. O analogii hydrodynamicznej prądu elektrycznego.** Wspominaliśmy już w § 1.23 i 1.33, że prąd elektryczny przypomina prąd jakiejś substancji materialnej, np. wody, która przepływa przez sieć szczelnych rur. Jeśli chcemy, aby woda przepływała



Rys. 1.59. Analogia hydrodynamiczna prądu elektrycznego (obwód złożony z ogniwa, oporu i wyłącznika)

stale ze zbiornika wyższego A (rys. 1.59) przez rurę R do zbiornika niżej położonego K, musimy zainstalować pompę P, która wodę będzie przepompowywała z powrotem ze zbiornika K do zbiornika A. W ten sposób prąd wody utworzy obieg zamknięty. W zjawisku prądu elektrycznego odpowiednikiem pompy jest źródło prądu, czyli generator, który sprawia, że prąd elektryczny płynie od elektrody A (anody) poprzez opór R do elektrody K (katody). Wewnątrz generatora prąd płynie od K do A, tworząc w ten sposób

obieg zamknięty. (I na tym miejscu przypominamy raz jeszcze, że mówiąc o kierunku prądu elektrycznego od + do — przez opór zewnętrzny, mamy na myśli kierunek płynięcia owej hipotetycznej „substancji elektrycznej", jaką sobie wyobrażali fizycy XIX stulecia; dzisiaj traktujemy to tylko jako umowę, jako sposób wyrażania się, bowiem badania nowsze nauczyły nas, iż prąd elektryczny w metalach polega na płynięciu elektronów od — do + przez opór zewnętrzny).

Analogia hydrodynamiczna, jaką przed chwilą wprowadziliśmy, sprowadza się do następujących odpowiedniości:

prąd wodny	prąd elektryczny,
zbiornik wyższy A	anoda A, czyli biegun dodatni,
zbiornik niższy K	katoda K, czyli biegun ujemny,
pompa	źródło prądu, czyli generator,
rury	przewodniki, oporniki,
kran	wyłącznik.

Analogię tę można posunąć jeszcze dalej. Określmy wielkość, która by charakteryzowała ilość wody, jaka przepływa przez rurę w ciągu jednostki czasu. Wielkość tę nazwijmy „natężeniem prądu wody" i określmy tak: natężenie prądu wody (i_w) mierzy się masą wody, która przepłynie przez przekrój rury w ciągu 1 sekundy. Tak określone i_w mówi nam o tym, czy prąd jest słaby, czy silny. Niech pewna ilość wody o masie m przeleje się ze zbiornika A do K. Jeśli różnica poziomów wody w obu zbiornikach wynosi h, to praca, jaką wykona woda przechodząc ze zbiornika górnego do dolnego wynosi

$$L_w = mgh\,,$$

zn. tyle, ile wynosi energia potencjalna tej samej wody przed „spadnięciem" z wysokości h; g oznacza tutaj przyspieszenie ziemskie, czyli mg jest ciężarem wody przelanej. Praca L_w wody w układzie na rys. 1.59a nie zamienia się oczywiście na nic innego, jak tylko na ciepło wydzielone w całym obwodzie. Jeśli masa m wody przelewała się z A do K w ciągu t sekund, to praca wykonana przez nią w ciągu 1 sekundy, czyli moc M_w wyraża się wzorem

$$M_w = \frac{m}{t}\cdot gh\,.$$

Ponieważ według definicji „natężenia prądu wody" (i_w) mamy

$$i_w = \frac{m}{t}\,,$$

przeto

$$M_w = i_w \cdot g h\,.$$

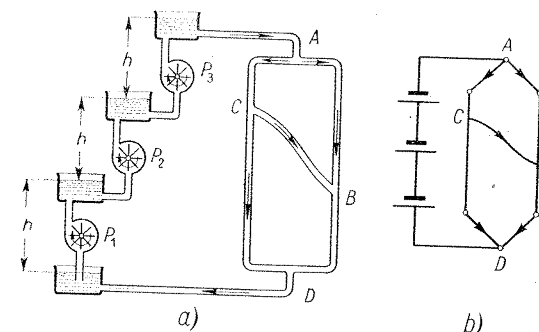
W analogicznym układzie elektrycznym (rys. 1.59b) moc prądu elektrycznego M wyraża się dobrze nam już znanym wzorem

$$M = iU\,.$$

Zestawiając oba ostatnie wzory dochodzimy do wniosku, że jeśli w naszym przykładzie hydrodynamicznym natężenie prądu elektrycznego porównywać do natężenia prądu wody, to wielkością analogiczną do napięcia U jest wielkość gh proporcjonalna do wysokości h.

Fizyczne znaczenie iloczynu gh jest proste: jest to energia potencjalna 1 grama wody wzniesionej na wysokość h. Możemy sobie nieco uprościć analogię: ponieważ g jest liczbą stałą, przeto możemy napięcie U porównywać bezpośrednio z wysokością h, z której spada woda, nie troszcząc się o g (chociaż dokładna analogia wymaga uwzględnienia g). Wyższemu napięciu odpowiadać więc będzie w analogii naszej większa wysokość zbiornika A nad zbiornikiem K, czyli, jak się inaczej wyrażamy, większa różnica poziomów obu zbiorników. Pompa, która jest zdolna wytworzyć większą różnicę poziomów, odpowiada w analogii generatorowi, który może wytworzyć większe napięcie (większą różnicę potencjałów). Z tego przykładu widzimy, że analogię do „poziomu wody" (względem płaszczyzny odniesienia, np. dna, poziomu morza itp.) stanowi „potencjał elektryczny" (napięcie względem punktu odniesienia), a analogię do wysokości słupa wody, czyli różnicy poziomów, stanowi napięcie, czyli różnica potencjałów.

Rysunek 1.60a pokazuje szeregowe połączenie trzech pomp, które łącznie pompują wodę na wysokość trzy razy większą aniżeli jedna pompa. Jest to hydrodynamiczna analogia do łączenia szeregowego ogniw (rys. 1.60b). Zewnętrzna część obwodu wodnego



Rys. 1.60. Analogia hydrodynamiczna prądu elektrycznego (łączenie szeregowe ogniw, prawa Kirchhoffa)

(elektrycznego) na rys. 1.60 składa się z sieci wąskich rur (przewodników) o dużym oporze. Weźmy pod uwagę obwód zamknięty ABC tej sieci, mający trzy punkty rozgałęzienia. Do każdego z tych punktów sieci elektrycznej stosuje się I prawo Kirchhoffa. Analogicznie do każdego z punktów rozgałęzień sieci wodnej stosuje się prawo o zachowaniu ilości wody. Ale i II prawo Kirchhoffa ma swoją analogię, niezwykle prostą. Prawo to powiada (§ 1.39), że algebraiczna suma spadków i wzrostów potencjałów wzdłuż obwodu $ABCA$ jest równa zeru. W analogii naszej odpowiednikiem tego prawa jest następujące „prawo": wzdłuż obwodu $ABCA$ algebraiczna suma wszystkich obniżeń i wzniesień poziomu równa się zeru. Jest to oczywiste samo przez się.

Prawo Ohma znajduje również swoją analogię hydrodynamiczną. Przedstawimy ją tu jakościowo. Natężenie prądu elektrycznego jest tym większe, im większe jest napięcie, czyli różnica potencjałów na końcach przewodnika. Podobnie natężenie prądu wody jest tym większe, im większa jest różnica poziomów obu zbiorników. Im przewodnik dłuższy i cieńszy, to pod tym samym napięciem przepuści słabszy prąd, a więc ma większy opór. Analogicznie: im rura dłuższa i cieńsza, tym przepuści słabszy strumień wody płynący z tej samej wysokości. Nawet i dla oporu właściwego można wymyślić analogię

hydrodynamiczną. Należy tylko zrezygnować ze stosowania zupełnie pustych rur jako modeli przewodników. A więc jeśli np. rura wypełniona dość dużymi kamykami będzie modelem przewodnika srebrnego (bardzo mały opór właściwy), to rura wypełniona mniej lub więcej drobnym żwirem będzie odpowiednia jako model przewodnika z innych metali (większy opór właściwy); odpowiednikiem drutów oporowych byłyby rury wypełnione np. piaskiem.

„Natężenie prądu wody" i_w określiliśmy za pomocą wzoru

$$i_w = \frac{m}{t}.$$

Stąd możemy wyznaczyć m

$$m = i_w t. \tag{1.34}$$

Widzimy, że iloczyn natężenia prądu wody i czasu jest niczym innym jak masą wody, która w tym czasie przez rurę przepłynęła. W nauce o prądzie elektrycznym nie mamy jeszcze wielkości analogicznej do m, czyli do $i_w t$, która by charakteryzowała „ilość elektryczności", jaka w pewnym czasie przepłynie przez przewodnik. Wielkość taką wprowadzimy jednak w § 2.4.

Na koniec chcielibyśmy przestrzec czytelnika przed przypisywaniem zbyt wielkiego znaczenia analogii hydrodynamicznej (i w ogóle mechanicznej) w nauce elektryczności. Przede wszystkim nie należy przypuszczać, aby ona była konieczna do zrozumienia jakiegoś prawa.

Analogia mechaniczna do zrozumienia prawa nic nie wnosi. Może tylko ułatwić przyswojenie umysłowi poznanego prawa i łatwiejsze zapamiętanie go. Dzieje się to dlatego, że wyobraźnia nasza stosunkowo łatwo operuje zjawiskami mechanicznymi, dzięki bogatemu doświadczeniu codziennemu, natomiast nie ma wyrobienia w dziedzinie zjawisk elektrycznych, które świeżo poznajemy. O wiele łatwiej wyobrazić sobie różnicę poziomów aniżeli różnicę potencjałów. Toteż nic dziwnego, że łatwiej można zapamiętać jakieś twierdzenie o napięciach, gdy w wyobraźni podstawimy sobie zamiast napięć — różnice poziomów wody. Podkreślamy jednak, że znalezienie dobrej analogii mechanicznej nie jest bynajmniej konieczne do zrozumienia praw rządzących zjawiskami elektrycznymi. Analogia może się tylko przyczynić, wskutek działania na wyobraźnię, do łatwiejszego ogarnięcia porządku panującego w świecie zjawisk elektrycznych. Dotyczy to jednak niektórych tylko zjawisk; nie dla wszystkich bowiem analogie mechaniczne istnieją.

Zagadnienia do rozdziału 1

Zagadnienia, które czytelnik znajdzie na końcu każdego rozdziału, dzielą się na trzy rodzaje:

a) Pierwszy rodzaj — to zagadnienia rachunkowe; celem ich jest obliczenie szukanej wielkości fizycznej (np. napięcia, oporu, mocy itp.) w liczbach ogólnych, które są dane w zagadnieniu, a następnie podstawienie liczb szczegółowych.

b) Drugi rodzaj — to zagadnienia jakościowe, nie wymagające rachunku. Celem ich jest *wytłumaczenie* danego zjawiska. Jednocześnie pożądane byłoby odtworzenie tego zjawiska (jeśli to tylko możliwe); będzie to więc doświadczenie o charakterze na ogół jakościowym. By uniknąć nieporozumień, musimy objaśnić, co to znaczy wytłumaczyć zjawisko. *Wytłumaczyć jakieś zjawisko, to znaczy*

wykazać, że jego przebieg jest zgodny ze znanymi nam prawami fizycznymi. W następnych rozdziałach, gdy będziemy zajmowali się hipotezami i opartymi na nich teoriami fizycznymi, do wytłumaczenia danych zjawisk posługiwać się będziemy również odpowiednimi hipotezami lub teoriami.

c) Trzeci wreszcie rodzaj zagadnień — to zagadnienia doświadczalne, ilościowe dające niekiedy pewne wyobrażenie o rodzaju badania naukowego. Aby rozwiązać tego rodzaju zagadnienie, należy zaprojektować i przeprowadzić odpowiednie doświadczenia, wykonać pomiary, ustalić pewne zależności, ewentualnie wyrazić je przy pomocy wzoru, wykresu itp. Tego rodzaju prace wyróżnione są w tej książce literą „P".

Aby ułatwić czytelnikowi korzystanie z zagadnień, podajemy wskazówki do rozwiązania zagadnień 1.1, 1.4 i 1.18. Ponadto uwagi o dokładności obliczania wyników znajdzie czytelnik przy zagadnieniu 1.2. Wreszcie niektóre trudniejsze zagadnienia zaopatrzone są wskazówkami ułatwiającymi rozwiązanie.

Do części A

***1.1.** Przedmiot metalowy o powierzchni $\varrho = 200$ cm² ma być pokryty elektrolitycznie warstwą srebra o grubości $a = 0{,}01$ mm. Jak długo należy przepuszczać przez komorę elektrolityczną prąd o natężeniu $i = 800$ mA? (Gęstość srebra $d = 10{,}5$ g/cm³).

Rozwiązanie. Ze wzoru (1.1) lub (1.1a) określającego amper mamy:

$$t = \frac{m}{0{,}001\,118\,3 \frac{\text{g}}{\text{A}\cdot\text{s}}\, i}.$$

Ponieważ $m = Sad$ (czyli objętość × gęstość), szukany czas wyrazi się wzorem

$$t = \frac{Sad}{0{,}001\,118\,3 \frac{\text{g}}{\text{A}\cdot\text{s}}\, i}.$$

Jest to *rozwiązanie ogólne*. Aby otrzymać rozwiązanie szczegółowe, podstawiamy zamiast i, S, a i d ich wartości liczbowe. Pamiętajmy jednak, że wszystkie te wielkości wyrazić musimy w takich jednostkach, aby dały się w sposób czysto formalny skracać (a więc a w cm, skoro S w cm², i w A, a nie w mA itp.), a wtedy t otrzymamy w sekundach. Otrzymujemy

$$t = \frac{200\ \text{cm}^2 \cdot 0{,}001\ \text{cm} \cdot 10{,}5\ \text{g/cm}^3}{0{,}001\,118\,3 \frac{\text{g}}{\text{A}\cdot\text{s}} \cdot 0{,}8\ \text{A}} = 2348\ \text{s} = 39\ \text{min}\ 8\ \text{s}.$$

***1.2.** Jakie jest natężenie prądu, który w woltametrze srebrowym wydzielił na katodzie $m = 0{,}098$ g srebra w ciągu $t = 5$ minut?

Odpowiedź. $$i = \frac{m}{0{,}001\,118\,3 \frac{\text{g}}{\text{A}\cdot\text{s}}\, i} = 0{,}29\ \text{A}.$$

Uwaga: W zadaniu powyższym m dane jest z dokładnością do trzeciego znaku po przecinku: $m = 0{,}098$ g. Oznacza to, że błąd popełniony przy ważeniu jest na pewno mniejszy od 0,001 g, tzn. że jest mniejszy od 1%. Przypuśćmy, że czas t wynoszący 5 minut został zmierzony niemal zupełnie dokładnie (za pomocą stopera mierzymy czas z dokładnością do ułamka sekundy, co na 300 s daje błąd mniejszy od 0,1%). Wobec tego na wyniku obliczenia i zaciąży głównie błąd popełniony przy mierzeniu masy. Ponieważ wynosi on 1% zarówno dla masy, jak i dla prądu, przeto i nie należy obliczać ze zbyt wielką liczbą znaków dziesiętnych. A więc nie należy pisać: $i = 0{,}29213$ A, ponieważ błąd (±1%) wynosi około ±0,003 A, zatem znak trzeci jest już niepewny, a znaki czwarty, piąty i dalsze nie mają absolutnie żadnego znaczenia. Wystarczy w zupełności napisać $i = 0{,}29$ A. Byłoby tylko niewielką przesadą w dokładności rachunku, gdybyśmy zachowali również znak trzeci: $i = 0{,}292$ A. Natomiast nie należy się ograniczać do zbyt małej ilości znaków i napisać np. $i = 0{,}3$ A; popełni-

libyśmy bowiem błąd rachunkowy większy od 3%, co jest niedopuszczalne wobec faktu, że błąd ważenia wynosił zaledwie 1%. Powyższe wskazówki należy brać pod uwagę przy rozwiązywaniu wszystkich zadań.

***1.3.** Blaszka srebrna prostokątna o wymiarach: $a = 1{,}0$ mm, $b = 6$ cm i $c = 10$ cm zostaje użyta jako anoda przy srebrzeniu. Na ile godzin srebrzenia wystarczy, jeśli srebrzenie odbywa się za pomocą prądu o natężeniu 0,5 A? Gęstość srebra $d = 10{,}5$ g/cm^3.

Odpowiedź. $t = \dfrac{abcd}{0{,}001\,118\,3 \dfrac{\text{g}}{\text{A}\cdot\text{s}}\, i} = 31{,}3$ godz.

Do części B

***1.4.** Ile cal ciepła otrzymujemy z 1 kW·h energii elektrycznej?

Odpowiedź. $Q = 0{,}24 \dfrac{\text{cal}}{\text{J}} L = 0{,}24 \dfrac{\text{cal}}{\text{J}} \cdot 1\ \text{kW}\cdot\text{h} = 0{,}24 \dfrac{\text{cal}}{\text{J}} \cdot 10^3 \cdot 3600\ \text{s} = 0{,}24 \dfrac{\text{cal}}{\text{J}} \cdot 3{,}6 \times$ $\times 10^6\ \text{J} = 0{,}864 \cdot 10^6$ cal.

***1.5.** Ile cal/s daje prąd o natężeniu 10 A, płynący a) w piecu elektrycznym na 220 V, b) w piecu elektrycznym na 20 V?

Odpowiedź. a) $Q_1 = 0{,}24 \dfrac{\text{cal}}{\text{J}} \cdot 10\ \text{A} \cdot 220\ \text{V} = 528 \dfrac{\text{cal}}{\text{s}}$; b) $Q_2 = 48 \dfrac{\text{cal}}{\text{s}}$.

***1.6.** Na żarówce jest napis: „220 V, 40 W". Obliczyć natężenie prądu i opór żarzącego się włókna.

Odpowiedź. $i = \dfrac{M}{U} = 0{,}182$ A; $R = \dfrac{U^2}{M} = 1210\ \Omega$.

***1.7.** (P) a) Zmierzyć za pomocą miliamperomierza i woltomierza opór żarówki (110 V lub 220 V) przyłączonej do sieci. b) Zmierzyć opór tej samej żarówki, lecz nie świecącej, przyłączonej np. do jednego akumulatora 2 V; ten ostatni pomiar można wykonać również za pomocą mostka Wheatstone'a. Czym się tłumaczy olbrzymia rozbieżność wyników? Jaki czynnik może mieć tu wpływ? Obmyślić doświadczenia potwierdzające słuszność przypuszczeń.

***1.8.** (P). Za pomocą miliamperomierza i woltomierza dołączonego do zacisków normalnej żarówki zmierzyć opory włókna dla różnych natężeń przepływającego prądu. W celu regulacji natężenia prądu włączamy opornik suwakowy (o oporze około 1000—2000 Ω) w szereg z żarówką i miliamperomierzem. Temperaturę włókna ocenić w przybliżeniu z barwy żaru, według następującej tabelki:

Rodzaj żaru	Temperatura
Początek żaru czerwonego	około 500°
Ciemnoczerwony	„ 700°
Czerwony	„ 900°
Pomarańczowy	„ 1100°
Biały	„ 1300°
Oślepiająco biały	„ 1500°

Wykonać wykres oporu włókna w zależności od temperatury. Będą to wyniki dla włókna metalowego. To samo badanie powtórzyć dla włókna węglowego zwykłej żarówki węglowej. Rezultaty odmienne.

***1.9.** (P). Zaprojektować aparaturę do dokładnego zbadania zależności oporu właściwego drutu od temperatury (zastosować „kąpiel" parafinową, mostek Wheatstone'a). Wykonać pomiary dla drutów: miedzianego (bardzo cienkiego), mosiężnego, żelaznego i nikielinowego, w granicach temperatur 20°—200°. Wykresy. Obliczyć współczynnik termiczny oporu (α) dla powyższych metali w granicach temperatur 20°—100°, określony przy pomocy równania

$$\alpha = \frac{R_{100} - R_{20}}{80 \cdot R_{20}}.$$

Czym się wyróżnia nikielina?

***1.10.** Znając opór właściwy miedzi obliczyć opór kabla dwużyłowego, łączącego elektrownię z fabryką odległą od niej o $d = 400$ m; przekrój żyły miedzianej $s = 120$ mm^2.

Odpowiedź. $R = \varrho \dfrac{2d}{s} = 0{,}113\ \Omega$.

***1.11.** Fabryka, o której mowa w poprzednim zadaniu, pobiera prąd o natężeniu $i = 100$ A. Przy tym obciążeniu napięcie sieci, mierzone w fabryce, wynosi $U_1 = 219$ V. Jakie napięcie U_2 wskazuje wtedy woltomierz w elektrowni?

Odpowiedź. $U_2 = U_1 + Ri = 230{,}3$ V.

***1.12.** Jaki przekrój s' musiałby mieć ten kabel, gdyby był nie miedziany, lecz żelazny (ϱ'), a jednak miał ten sam opór co miedziany?

Odpowiedź. $s' = s \dfrac{\varrho'}{\varrho} = 692$ mm^2.

***1.13.** Uzwojenia grzejnika elektrycznego przepaliły się. Należy go naprawić nawijając nowy drut chromonikielinowy o średnicy $2r = 0{,}4$ mm. Jaka powinna być długość tego drutu, jeżeli moc grzejnika wynosi 400 W, a napięcie sieci 220 V?

Odpowiedź. $l = \dfrac{\pi r^2 U^2}{M\varrho} = 14{,}75$ m.

***1.14.** Grzejnik elektryczny przeznaczony na napięcie 220 V należy przerobić na napięcie 110 V nie zmieniając mocy grzejnika. a) Ile razy należałoby skrócić drut? b) Ile razy należałoby zwiększyć średnicę drutu? c) Który z tych sposobów jest korzystniejszy dla trwałości piecyka?

Odpowiedź. a) 4 razy, b) 2 razy, c) drugi.

***1.15.** Do gniazda ściennego sieci elektrycznej dołączamy woltomierz: pokazuje $U = 220$ V. Jednocześnie dołączamy grzejnik pobierający $i = 6$ A; od tej chwili woltomierz pokazuje napięcie $U' = 214$ V. Jaka jest tego przyczyna? Obliczyć opór przewodów doprowadzających prąd do gniazda.

Odpowiedź. Zbyt mały przekrój przewodów doprowadzających prąd do gniazda;

$$R = \frac{U - U'}{i} = 1\ \Omega.$$

***1.16.** Fabryka potrzebuje mocy elektrycznej $M = 50$ kW. Moc tę ma czerpać z bardzo odległej elektrowni, przy czym straty mocy w kablu nie powinny przekraczać $M' = 0{,}25$ kW. Ile powinien wynosić opór R całego kabla w założeniu, że fabryka otrzymuje prąd pod napięciem a) $U = 440$ V, b) $U = 35\,000$ V? Ile wynosiłoby natężenie prądu w obu wypadkach?

Odpowiedź. $R = \dfrac{M'U^2}{M^2}$; $i = \dfrac{M}{U}$; a) $R = 0{,}019\,36\ \Omega$; $i = 113{,}6$ A; b) $R = 122{,}5\ \Omega$; $i = 1{,}43$ A.

***1.17.** Fabryka, o której mowa w poprzednim zadaniu, odległa jest od elektrowni o $a = 10$ km. Obliczyć w obu powyższych wypadkach a) i b) średnicę d i ciężar P gołego kabla miedzianego łączącego elektrownię z fabryką. Opór kabla R — dany z poprzedniego zadania; ciężar właściwy miedzi $c = 8{,}9$ G/cm^3. Które z tych rozwiązań jest nierealne? (Znaczenie gospodarcze wysokiego napięcia).

Odpowiedź. $d = 2\sqrt{\dfrac{2a\varrho}{\pi R}}$; $P = \dfrac{4a^2\varrho c}{R}$; a) $d = 14{,}96$ cm; $P = 3{,}1 \cdot 10^6$ kG zupełnie nierealne; b) $d = 1{,}88$ mm; $P = 494$ kG.

***1.18.** Kuchenkę elektryczną, pobierającą prąd $i_0 = 10$ A przy napięciu $U_0 = 220$ V, przyłączono długim przewodem do sieci w miejscu, gdzie znajdował się licznik energii elektrycznej. Ponieważ odległość między licznikiem a kuchnią była znaczna, zużyto $l = 100$ m przewodnika pojedynczego. Instalację wykonano wadliwie, stosując przewodnik o zbyt małym przekroju $s = 1{,}0$ mm^2. Obliczyć: Jaki prąd i płynie przez kuchenkę? Jakie napięcie U panuje na jej zaciskach podczas działania? Jaka moc M wydziela się w kuchence? Jaka moc M' rozprasza się bezużytecznie w przewodniku? Ile energii elektrycznej E wydzieli się w kuchence podczas $t = 100$ godzin działania? Jaką energię E_0 zanotuje w tym czasie licznik? (Jaka stąd płynie nauka?)

Odpowiedź. Dla ułatwienia rachunków obliczamy: opór kuchenki $R = \frac{U_0}{i_0} = 22\ \Omega$ i opór przewodnika $R' = \varrho\frac{l}{s} = 1{,}7\ \Omega$; $i = \frac{U_0}{R+R'} = 9{,}283$ A; $U = \frac{U_0 R}{R+R'} = 204$ V; $M = Ri^2 = R\left(\frac{U_0}{R+R'}\right)^2 = 1{,}896$ kW; $M' = R'i^2 = 146{,}5$ W; $E = Ri^2t = 189{,}6$ kW·h; $E_0 = (R+R')\,i^2t = \frac{U_0^2 t}{R+R'} = 204{,}2$ kW·h (należy zastosować grubszy przewód w celu uniknięcia tak wielkich strat).

***1.19.** Rozwiązać poprzednie zagadnienie przyjąwszy, że przewodnik ma teraz przekrój znacznie większy, mianowicie $s = 6$ mm^2. Porównać rozwiązania obu zadań dla ocenienia roli, jaką odgrywa przekrój przewodów. Wyrazić za pomocą wzoru ogólnego procentowy stosunek mocy traconej w przewodniku do mocy wydzielanej w kuchence w funkcji przekroju przewodnika.

Odpowiedź. $R = 22\ \Omega$, $R' = 0{,}283\ \Omega$; $i = 9{,}873$ A; $U = 217{,}2$ V; $M = 2{,}144$ kW; $M' = 27{,}6$ W; $E = 214{,}4$ kW·h; $E_0 = 217{,}2$ kW·h; $\frac{M'}{M}100\% = \varrho\frac{li_0}{sU_0}\cdot 100\%$.

***1.20.** Silnik elektryczny o mocy M, pracujący pod napięciem U otrzymuje prąd za pośrednictwem przewodów o łącznej długości l, przekroju s i oporze właściwym ϱ. Obliczyć stosunek mocy M' straconej w przewodach do mocy M wykorzystywanej w silniku.

Odpowiedź. $\frac{M'}{M} = \frac{\varrho l M}{sU^2}$.

***1.21.** Na podstawie rozwiązania zad. 20 wskazać przyczynę, dla której lokomotywy elektryczne zasilane są prądem o napięciu kilku tysięcy woltów.

Odpowiedź. Wielkie M i l, a s nie powinno być duże.

***1.22.** Żarówkę samochodową (o mocy $M = 50$ W, na napięcie $U = 6$ V) przyłączono do sieci o napięciu $U_0 = 220$ V, włączając w szereg opornik. Ile powinien wynosić jego opór R'? Jaka moc M' zamienia się w oporniku na ciepło? Czy urządzenie takie jest korzystne? (Por. zad. 26).

Odpowiedź. $R' = \frac{(U_0-U)\,U}{M} = 25{,}7\ \Omega$; $M' = \frac{(U_0-U)\,M}{U} = 1{,}78$ kW(!) bardzo niekorzystne: tracimy około 97% energii.

Do części C

***1.23.** Woltomierz pobierający 1 mA prądu na każdy wolt wskazania dołączony został do zacisków ogniwa Westona i wskazuje $U = 0{,}6$ V. Jaki opór wewnętrzny ma ogniwo Westona?

Odpowiedź. $r = \frac{E-U}{i} = \frac{1{,}018-0{,}6}{0{,}6\cdot 10^{-3}}\ \frac{\text{V}}{\text{A}} = 696{,}7\ \Omega$.

***1.24.** Do zacisków ogniwa Westona o oporze wewnętrznym $r = 600\ \Omega$ dołączamy kolejno dwa różne woltomierze: jeden o oporze $R_1 = 1000\ \Omega$, drugi o oporze $R_2 = 20\,000\ \Omega$. Jakie napięcia U_1 i U_2 pokazują te woltomierze? Który z woltomierzy uważać należy za lepszy?

Odpowiedź. $U_1 = E\frac{R_1}{R_1+r} = 0{,}636$ V; $U_2 = E\frac{R_2}{R_2+r} = 0{,}988$ V; drugi.

***1.25.** Gorszy z powyższych woltomierzy (zad. 24) dołączamy do biegunów ogniwa Leclanchégo o sile elektromotorycznej $E = 1{,}35$ V i o oporze wewnętrznym $r = 1\ \Omega$. Jakie napięcie U wskazuje woltomierz? O ile % różni się ono od siły elektromotorycznej?

Odpowiedź. $U = E\frac{R_1}{R_1+r} = 1{,}349$ V; zaledwie o 0,1%.

***1.26.** Żarówka samochodowa, która pod napięciem $U = 6$ V ma moc $M = 50$ W, została dołączona krótkimi i grubymi przewodami do baterii trzech akumulatorów, mającej siłę elektromotoryczną $E = 6{,}3$ V i opór wewnętrzny $r = 0{,}06\ \Omega$. Jakie napięcie panuje na żarówce? Jaki prąd przez nią przepływa? Jaka moc M' wydziela się w żarówce? Jaka moc m wydziela się wewnątrz akumulatorów? (Czy duża moc wydziela się w przewodach?)

Odpowiedź. $U = E\left(1-\frac{r}{(U^2/M)+r}\right) = 5{,}82$ V; $i = \frac{E}{(U^2/M)+r} = 8{,}08$ A; $M' = Ui = 47{,}0$ W; $m = ri^2 = 3{,}9$ W; znikoma.

***1.27.** Aby udały się pewne doświadczenia z solenoidem, należy stosować prąd o natężeniu około 10 A. Ponieważ dany solenoid ma opór $R = 0{,}16\ \Omega$, więc dołączamy go bezpośrednio do jednego akumulatora, nie stosując żadnego dodatkowego oporu. Siła elektromotoryczna akumulatora $E = 2{,}0$ V, opór wewnętrzny $r = 0{,}02\ \Omega$. Ile wynosi natężenie prądu i w solenoidzie? Ile wynosi napięcie U na jego końcach? Z jaką wydajnością pracuje ten układ?

Odpowiedź. $i = \frac{E}{R+r} = 11{,}1$ A; $U = E\left(1-\frac{r}{R+r}\right) = 1{,}78$ V; $\eta = 1-\frac{r}{R+r} = 0{,}89 = 89\%$.

***1.28.** W celu wyznaczenia oporu wewnętrznego suchej baterii zmierzono jej napięcie przy dwóch różnych obciążeniach. Otrzymano: $U_1 = 4{,}2$ V przy obciążeniu prądem $i_1 = 0{,}1$ A oraz $U_2 = 3{,}9$ V przy obciążeniu prądem $i_2 = 0{,}2$ A. Obliczyć opór wewnętrzny r baterii.

Odpowiedź. $r = \frac{U_1-U_2}{i_2-i_1} = 3\ \Omega$.

***1.29.** Ile wynosi siła elektromotoryczna powyższej baterii (zad. 28)?

Odpowiedź. $E = \frac{U_1 i_2 - U_2 i_1}{i_2-i_1} = 4{,}5$ V.

1.30. Opór silnika elektrycznego wynosi $R = 25\ \Omega$. Gdy dołączymy go do sieci o napięciu $U = 220$ V i pozwolimy mu „iść luzem", pobiera wtedy prąd $i = 1$ A. Ile wynosi siła przeciwelektromotoryczna E' silnika?

Odpowiedź. $E' = U - Ri = 195$ V.

1.31. Powyższy silnik został obciążony, wskutek czego (zwolniwszy nieco biegu) pobiera teraz prąd o natężeniu $i' = 3$ A, stale pod tym samym napięciem $U = 220$ V. Ile wynosi obecnie siła przeciwelektromotoryczna silnika?

Odpowiedź. $E' = U - Ri' = 145$ V.

1.32. Jaki prąd i'' popłynie przez ten sam silnik pod napięciem 220 V; jeżeli go zahamować? Jaka moc (w W i w cal/s) wydzielać się będzie w silniku?

Odpowiedź. $i'' = \frac{U}{R} = 8{,}8$ A; $M = \frac{U^2}{R} = 1936$ W albo $M = 0{,}24\frac{U^2}{R} = 464{,}6$ cal/s (niebezpieczeństwo spalenia uzwojenia silnika!).

Do części D

1.33. Czuły galwanometr wskazówkowy o oporze $R' = 150\ \Omega$, dający pełne wychylenie pod wpływem prądu $i' = 0{,}1$ mA, należy zamienić na a) woltomierz do $U = 100$ V, b) amperomierz do $i = 10$ A. Jak to zrobić?

Odpowiedź. a) Dołączyć szeregowo opór $R = \frac{U-R'i'}{i'} = 999\,850\ \Omega \cong 1$ MΩ; b) dołączyć równolegle bocznik o oporze $R'' = \frac{i'R'}{i-i'} = 1{,}502\cdot 10^{-3}\ \Omega$.

1.34. Solenoid o oporze $R = 0{,}16\ \Omega$ ma być zasilany prądem z $n = 3$ ogniw Leclanchégo, każde o sile elektromotorycznej $E = 1{,}35$ V i o oporze wewnętrznym $r = 0{,}90\ \Omega$. Ogniwa połączono a) szeregowo, a potem b) równolegle. Obliczyć natężenie prądu i w solenoidzie oraz wydajność układu η w każdym z tych wypadków.

Odpowiedź. a) $i = \frac{nE}{R+nr} = 1{,}42$ A; $\eta = \frac{R}{R+nr} = 0{,}06$; b) $i = \frac{E}{R+r/n} = 2{,}93$ A; $\eta = 1 - \frac{r}{R+nr} = 0{,}69$.

1.35. Ponieważ w poprzednim zadaniu okazało się, że prąd w solenoidzie jest dość słaby (por. zad. 27), zastosowano 6 ogniw Leclanchégo. Rozwiązać więc poprzednie zadanie dla $n = 6$. Wyciągnąć wnioski.

Odpowiedź. a) $i = 1{,}46$ A; $\eta = 0{,}03$; b) $i = 4{,}35$ A; $\eta = 0{,}84$ (układ najkorzystniejszy).

1.36. Jeden akumulator połączono przez opór $R = 0{,}2\ \Omega$ z baterią szeregową trzech ogniw Leclanchégo w ten sposób, że biegun „+" akumulatora został połączony przez opór R z „+" baterii, a „—" akumulatora z „—" baterii. Siła elektromotoryczna ogniwa wynosi $E = 1{,}40$ V, opór wewnętrzny ogniwa $r = 0{,}40\ \Omega$, opór wewnętrzny akumulatora $r' = 0{,}03\ \Omega$. Amperomierz włączony w obwód wskazuje prąd $i = 1{,}26$ A. W jakim kierunku płynie prąd? Ile wynosi siła przeciwelektromotoryczna E' akumulatora? Jakie napięcie U panuje na zaciskach baterii? Jakie napięcie U' panuje na zaciskach akumulatora?

Odpowiedź. Od + do — przez akumulator; $E' = nE - i\,(nr + r' + R) = 2{,}40$ V; $U = nE - nri = 2{,}69$ V; $U' = E' + ir' = 2{,}44$ V.

1.37. W poprzednim zadaniu: obliczyć moc M' wydzielaną w akumulatorze w postaci ciepła oraz moc M'' wydzielaną nie w postaci ciepła (mianowicie w postaci energii chemicznej). Proces opisany w zad. 36 jest to tzw. ładowanie akumulatora.

Odpowiedź. $M' = r'i^2 = 0{,}048$ W; $M'' = E'i = 3{,}024$ W.

1.38. Trzy oporniki radiowe mające każdy po $R = 1000\ \Omega$, których maksymalne dopuszczalne obciążenie wynosi po 6 W, łączymy a) szeregowo, b) równolegle. Czy można zespół taki dołączyć do sieci o napięciu $U = 120$ V? Obliczyć moc wydzielaną w każdym oporze w wypadku a) i b).

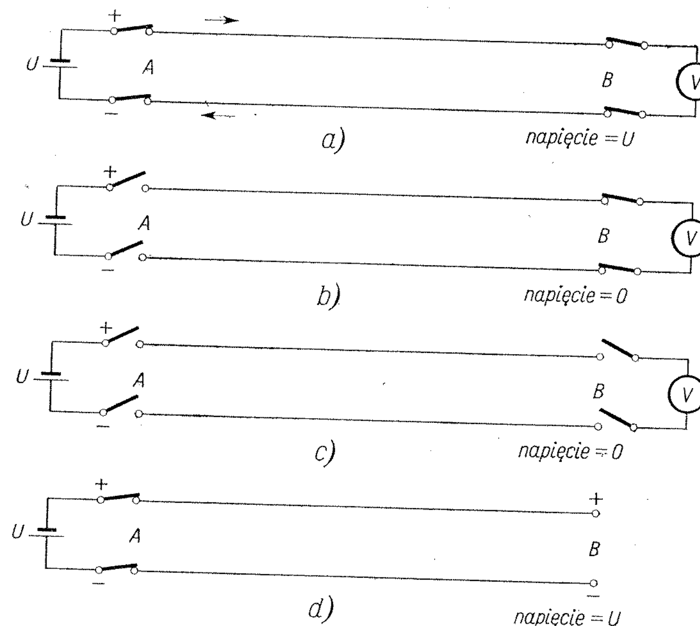
Odpowiedź. a) $M = \frac{1}{9}\frac{U^2}{R} = 1{,}6$ W (można); b) $M = \frac{U^2}{R} = 14{,}4$ W (nie można!).

Rozdział 2

ELEKTROSTATYKA

A. O ładunkach elektrycznych

***§ 2.1. Linia dwuprzewodowa.** Jeśli w miejscu A (rys. 2.1a) znajduje się źródło prądu, natomiast w odległym miejscu B — odbiornik energii elektrycznej, wówczas oba te miejsca muszą być połączone przewodem elektrycznym, którym płynie prąd elektryczny tam

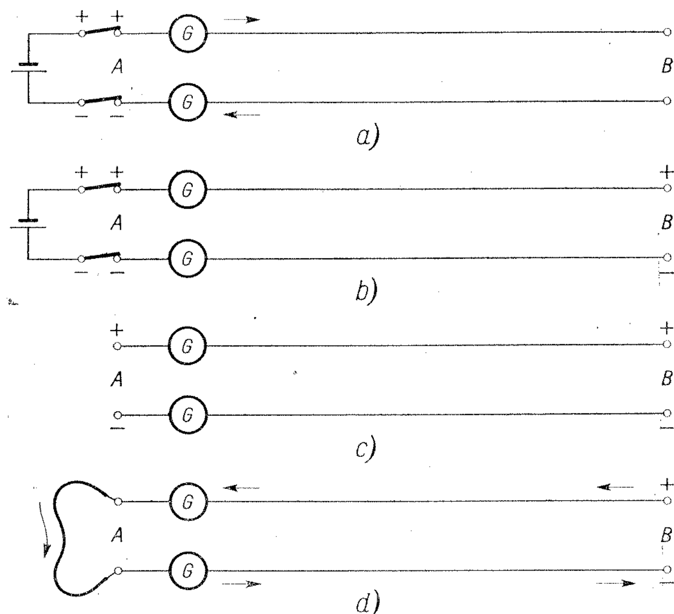


Rys. 2.1. a) Linia dwuprzewodowa łączy miejsca A i B. W A znajduje się źródło prądu, w B — odbiornik energii elektrycznej; na rysunku woltomierz. b) i c) Po odłączeniu źródła prądu napięcie elektryczne między przewodami zniknęło, d) po dołączeniu — znów się pojawiło. Na czym to polega? Patrz rysunek 2.2

i z powrotem. Jest to więc *linia elektryczna dwuprzewodowa.* Jeśli linię elektryczną odłączyć od źródła, a także od odbiornika, wówczas między obydwoma przewodami nie istnieje napięcie elektryczne (rys. 2.1b, c). Jeśli linię dwuprzewodową przyłączyć do źródła

prądu, wówczas między jej przewodami pojawi się napięcie elektryczne równe napięciu źródła prądu (rys. 2.1d). Jaki proces zaszedł, który spowodował, że między przewodami, zarówno w miejscu A, jak i w miejscu B, pojawiło się napięcie elektryczne? Przecież prąd elektryczny przez przewody nie płynie, bo w miejscu B jest przerwa. A może *napłynął* i spotkawszy w miejscu B przerwę, płynąć przestał?

Tego rodzaju przypuszczenie potwierdza doświadczenie, przedstawione na rys. 2.2a, b. Linię dwuprzewodową łączymy z biegunami źródła prądu poprzez dwa czułe galwanometry. W chwili połączenia oba galwanometry wychylają się na krótko w przeciwne strony. Dowodzi to, że do jednego z przewodów, który połączony był z biegunem dodatnim źródła prądu, prąd elektryczny wpłynął, zaś z drugiego przewodu, który był połączony z biegunem ujemnym, prąd elektryczny wypłynął. Mówimy, że przewód połączony z biegunem + źródła prądu jest *naładowany dodatnio*, zaś przewód połączony z biegunem — źródła prądu jest *naładowany ujemnie*. Między przewodami panuje teraz napięcie elektryczne.



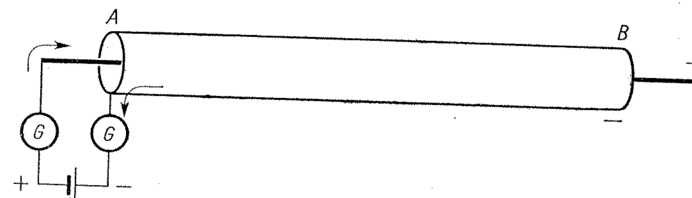
Rys. 2.2. a) Po dołączeniu źródła prądu oba galwanometry pokazują *krótkotrwały* prąd ładowania. b) i c) Po chwili prąd już nie płynie, linia jest naładowana: górny przewód dodatnio, dolny — ujemnie. d) Zwieramy oba przewody w A; galwanometry pokazują *krótkotrwały* prąd rozładowania

Wskazówki metodyczne do wykonania tego doświadczenia

Przewody gołe, kilkumetrowej długości, rozpięte między *dobrymi* izolatorami; galwanometry ze wskazówką świetlną, o czułości 10^{-9} A/podz., ustawione na płytach parafinowych; źródło prądu — bateria sucha 200 V, ustawiona na płycie parafinowej; wyłączniki — zmontowane na doskonałej płycie izolacyjnej, np. plexiglasowej, rączka plexiglasowa; dołączenie pierwszego przewodu nie daje naładowania, dopiero dołączenie drugiego daje prąd naładowania, płynący przez oba galwanometry w przeciwnych kierunkach. Jeśli galwanometr jest ze wskazówką świetlną, to akumulator lub bateria, zasilająca żarówkę oświetlającą zwierciadło galwanometru, musi być ustawiona również na płycie parafinowej.

Niezwykle interesującym faktem jest, że nawet po odłączeniu obu przewodów od biegunów źródła prądu między przewodami nadal panuje napięcie, czyli, że są one nadal naładowane (rys. 2.2c). Przekona nas o tym doświadczenie przedstawione na rys. 2.2d: oba przewody zwieramy w miejscu A przewodnikiem; oba galwanometry natychmiast wskazują przepływ krótkotrwałego prądu od przewodu naładowanego dodatnio do przewodu naładowanego ujemnie. A zatem istniało między przewodami naszej linii napięcie, skoro przepłynął prąd od jednego przewodu do drugiego.

Czynność opisaną w doświadczeniu pierwszym nazywać będziemy *ładowaniem* linii dwuprzewodowej, natomiast czynność opisaną w doświadczeniu drugim nazywać będziemy *rozładowaniem* linii dwuprzewodowej. Mówimy, że po naładowaniu oba przewody linii dwuprzewodowej mają ładunki elektryczne: jeden przewód ma ładunek dodatni, drugi zaś ujemny. W czasie rozładowania linii dwuprzewodowej przepływa chwilowy prąd od przewodu dodatniego do ujemnego, aż zaniknie napięcie między przewodami.



Rys. 2.3. Linia koaksjalna; na rysunku widać moment ładowania linii. Wystarczy jeden wyłącznik, nie zaznaczony na schemacie

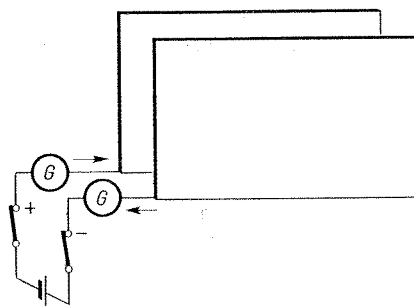
Oprócz linii dwuprzewodowej złożonej z dwóch drutów wzajemnie równoległych, stosuje się często w radiotechnice linie dwuprzewodowe złożone z drutu, który biegnie środkiem rury metalowej, grającej rolę drugiego przewodu (rys. 2.3). Taka linia nazywa się *linią współśrodkową* albo *koaksjalną*. Jeśli wykonamy z linią koaksjalną oba doświadczenia przedstawione na rys. 2.2, zaobserwujemy z łatwością jeszcze silniejsze niż poprzednio prądy ładowania i rozładowania.

***§ 2.2. Kondensator elektryczny.** Po przeczytaniu paragrafu poprzedniego domyślec się nietrudno, że naładować można nie tylko linię dwuprzewodową lub koaksjalną, ale wszelkie dwa przewodniki, w jakiejkolwiek postaci. Na rysunku 2.4 pokazano, że te same doświadczenia ładowania i rozładowania wykonać można stosując dwie blachy. Doświadczenia te pokazują, że prąd ładowania (i rozładowania) będzie silniejszy, gdy blachy będą większe, gdy będą do siebie równoległe i im bliżej siebie je ustawimy. Mówimy, że układ dwóch blach, płyt lub folii metalowych stanowi *kondensator elektryczny*. Mówimy też ogólnie, że kondensator elektryczny ma dwie *okładki*; na tych okładkach gromadzą się ładunki elektryczne, dodatni i ujemny. Im większy ładunek elektryczny zgromadzi się na okładkach kondensatora przy danym napięciu, tym większą *pojemność elektryczną* ma kondensator.

Ścisła definicja ładunku elektrycznego, a także pojemności kondensatora podana zostanie w dalszych paragrafach. Tymczasem, korzystając z podanej tu jakościowej definicji tych pojęć, możemy stwierdzić doświadczalnie, że pojemność kondensatora jest

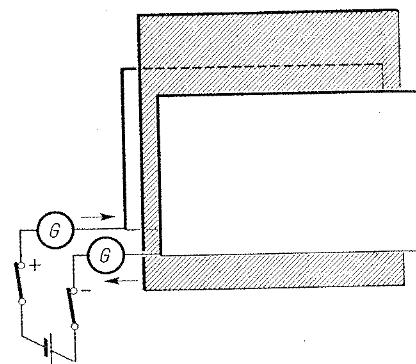
tym większa, im większa jest powierzchnia jego płyt i im mniejsza jest odległość między nimi.

Jest jeszcze jedna osobliwość kondensatora, którą ukazuje doświadczenie na rys. 2.5. Oto gdy między okładki kondensatora wprowadzimy płytę izolacyjną, np. szklaną, stwierdzimy, że pojemność kondensatora wzrosła; bowiem przy tym samym napięciu baterii prąd ładowania zwiększył się, tzn. że zwiększył się ładunek wprowadzony na okładki kondensatora.



Rys. 2.4. Dwie równoległe płyty stanowią kondensator elektryczny. Na schemacie widać moment ładowania kondensatora

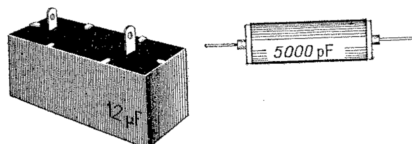
Uwagi metodyczne. Płyty o wymiarach ok. 0,5 m × 1 m ustawione na podstawach parafinowych i zamocowane za pomocą dwóch statywów z uchwytami plexiglasowymi lub parafinowymi; odległość między płytami ok. 1 cm; reszta — jak w doświadczeniu poprzednim, rys. 2.2



Rys. 2.5. Wstawienie płyty izolacyjnej, czyli dielektrycznej, między okładki kondensatora powiększa jego pojemność: oba galwanometry pokazują teraz większe wychylenia.

Uwagi metodyczne. Jako płyty dielektrycznej można użyć płyty szklanej, ebonitowej, plexiglasowej lub płyty z innego tworzywa sztucznego. Przed wstawieniem przeciągnąć płytę nad płomieniem palnika gazowego, w celu usunięcia przypadkowo wytworzonych (przez tarcie) ładunków elektrycznych

***§ 2.3. Kondensatory radiowe.** Rysunek 2.6 przedstawia dwa kondensatory elektryczne, znane na pewno z wyglądu tym wszystkim, którzy majstrowali przy aparacie radiowym. Z większym z tych kondensatorów wykonujemy następujące doświadczenia.

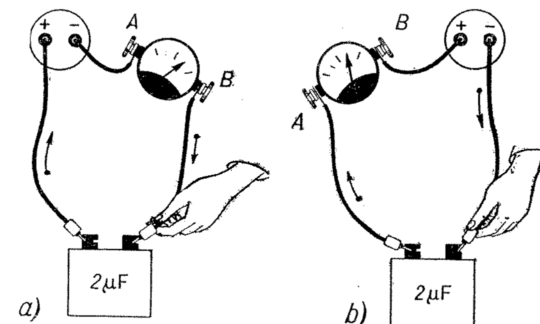


Rys. 2.6. Dwa kondensatory używane często w radiotechnice („blokowy" — duży i „rurkowy" — mały)

1. Dołączamy kondensator do źródła stałego prądu elektrycznego, np. do baterii ogniw o napięciu 100—200 V. Przy dołączaniu widać niekiedy słabą iskierkę, a jeśli włączymy i amperomierz (rys. 2.7), to pokaże on przepływ krótkotrwałego prądu elektrycznego. Ale po chwili prąd już nie płynie i strzałka amperomierza pokazuje „0".

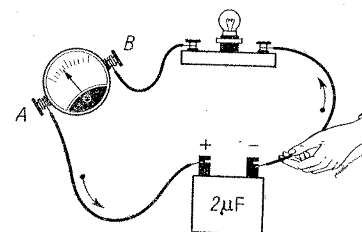
2. Odłączmy kondensator od źródła prądu i dołączmy do niego amperomierz. Zobaczymy i usłyszymy iskrę; amperomierz wskaże chwilowy prąd, który momentalnie zanika. Żarówka włączona szeregowo z amperomierzem, jak pokazuje rys. 2.8, rozbłyśnie.

Rys. 2.7. Ładowanie kondensatora z baterii. Doświadczenia a) i b) pokazują, że podczas ładowania elektrony nie tylko wpływają do kondensatora, ale również z niego — w tej samej ilości — wypływają

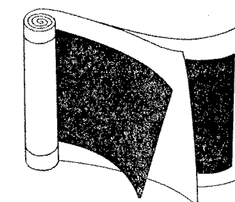


Proces 1, dzięki któremu kondensator stał się źródłem prądu elektrycznego, jest „ładowaniem" kondensatora. Natomiast proces 2, w którym wykorzystaliśmy owe źródło prądu (np. zapalając żarówkę), jest „rozładowaniem" kondensatora.

Po tych doświadczeniach nasuwają się nam z pewnością przypuszczenia co do wewnętrznej budowy kondensatora. A więc zawiera on niezawodnie jakieś dwa przewodniki oddzielone od siebie izolatorem, bo prąd stale nie płynie. I rzeczywiście, jeśli rozbierzemy jakiś mały kondensatorek, to ujrzymy tam dwa długie paski cynfolii, oddzielone od siebie paskiem papieru parafinowanego; wszystko to zwinięte jest w rulon (rys. 2.9). Oba paski cynfolii są okładkami kondensatora. Na schematach oznaczać będziemy kondensator takim znakiem: ⊣⊢. Kreski grube oznaczają okładki, a cienkie — druty doprowadzające.



Rys. 2.8. Rozładowanie kondensatora przez żarówkę latarki elektrycznej i przez miliamperomierz

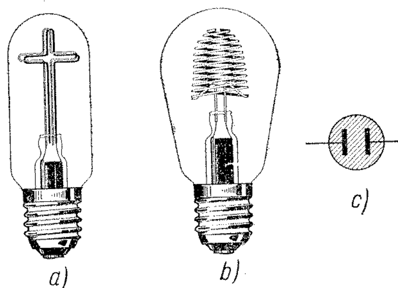


Rys 2.9. Budowa wewnętrzna kondensatora elektrycznego

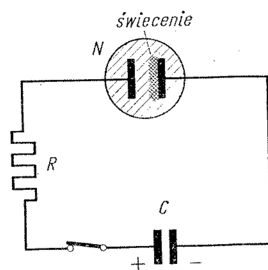
Każdemu chyba nasuwa się pytanie, co się dzieje w kondensatorze podczas ładowania; na czym polega ładowanie i rozładowanie kondensatora? Innymi słowy, pragniemy wytworzyć sobie obraz powyższych zjawisk, zgodny z naszymi dotychczasowymi wyobrażeniami o istocie prądu elektrycznego i oparty na świeżo poznanych faktach.

Przypomnijmy więc sobie, że prąd elektryczny w drucie (chociaż jego kierunek przyjmowaliśmy, zgodnie z dawną umową, od + do —) polega na płynięciu elektronów od bieguna ujemnego do dodatniego. Na tej ostatniej podstawie możemy sobie bez trudu

wyobrazić „mechanizm” ładowania i rozładowania kondensatora. Ładowanie kondensatora polega na tym, że elektrony wychodzące z ujemnego bieguna źródła prądu gromadzą się na jednej okładce kondensatora, co nam wyraźnie pokazuje amperomierz (rys. 2.7a). Ale amperomierz pokazuje również, że z drugiej okładki kondensatora, mianowicie tej, która została połączona z biegunem dodatnim źródła prądu, elektrony odpływają! (rys. 2.7b). Ten fakt doświadczalny zmusza nas do wniosku, że w okładkach kondensatora już przed naładowaniem znajduje się pewna normalna ilość elektronów. Naładowanie kondensatora sprawiło, że ilość elektronów na jednej okładce wzrosła powyżej ilości normalnej, natomiast na drugiej okładce zmalała. Ta pierwsza okładka (która była dołączona do bieguna —) ma teraz nadmiar elektronów: mówimy, że ma *ładunek* elektryczny *ujemny*. Druga okładka (która była w zetknięciu z biegunem +) ma teraz niedomiar elektronów; mówimy o niej, że ma *ładunek dodatni*. W § 2.5 przekonamy się, że wielkości obu ładunków są sobie równe. Podczas rozładowania kondensatora (rys. 2.8) nadmiar elektronów z jego okładki ujemnej przepłynie przez drut do okładki dodatniej, tworząc prąd elektryczny. Na żadnej okładce nie będzie już nadmiaru ani niedomiaru elektronów. Kondensator jest rozładowany.



Rys. 2.10. Lampki neonowe: a) z elektrodami krzyżykowymi, b) z elektrodami spiralnymi. W handlu znajdują się rozmaite typy lampek neonowych na 110 V i 220 V. c) Symbol graficzny lampki neonowej

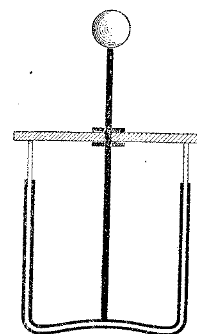


Rys. 2.11. Rozładowanie kondensatora przez lampkę neonową i szeregowo połączony z nią opór kilku MΩ

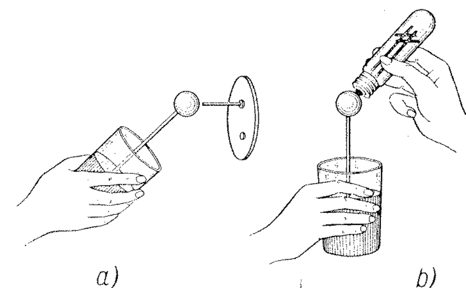
Bardzo efektowne doświadczenia z kondensatorami wykonuje się przy użyciu lampki neonowej, o której była wzmianka w § 1.2. W lampce neonowej prąd elektryczny przechodzi przez rozrzedzony neon pomiędzy dwiema elektrodami, katodą i anodą (rys. 2.10). Pod wpływem przepływu prądu gaz świeci światłem czerwonym i to tylko w pobliżu katody. Dzięki tej właściwości możemy stwierdzić łatwo przepływ prądu i rozpoznać jego kierunek. Z lampką neonową zapoznamy się bliżej w części II, a tymczasem wykonajmy zapowiedziane doświadczenia:

1. Kondensator blokowy naładujmy z baterii i połączmy z lampką neonową przez opór kilku M Ω (rys. 2.11), aby go rozładować. Lampka świeci kilka minut! Jeśli kondensator rozładujemy przez lampkę bez oporu, to lampka rozbłyśnie jasno, lecz na krótko. Po zgaśnięciu jej sprawdzamy, że kondensator nie jest całkowicie rozładowany. Wnosimy stąd, że lampka neonowa gaśnie, gdy napięcie obniży się poniżej pewnej wartości (około 100 V).

2. Butelka lejdejska (rys. 2.12) jest to również kondensator, którego okładki w postaci cynfolii przyklejone są do ścian i dna butelki od zewnątrz i od wewnątrz. Izolatorem jest tutaj, jak widzimy, szkło. Naładujmy butelkę lejdejską z baterii i rozładujmy ją przez lampkę neonową. Lampka rozbłyśnie słabo i na krótko. Wnosimy stąd, że butelka lejdejska nagromadziła bardzo niewiele ładunku elektrycznego w porównaniu z kondensatorem blokowym (por. § 2.4). Naładowanie i rozładowanie butelki lejdejskiej można wykonać w uproszczony sposób, jak to dostatecznie objaśniają rys. 2.13a i b.



Rys. 2.12. Butelka lejdejska w przekroju. Kulka z prącikiem stanowią doprowadzenie do wewnętrznej okładki



Rys. 2.13. a) ładowanie butelki lejdejskiej z sieci, której jeden koniec jest uziemniony. Prąd ładowania (patrz rys. 2.7) płynie przez nasze ciało i przez ziemię. b) Rozładowanie butelki lejdejskiej przez lampkę neonową. Prąd rozładowania przepływa przez nasze ciało; nie odczuwamy go, gdyż jest bardzo słaby

*§ **2.4. Określenie ładunku elektrycznego.** Nasuwa się nam takie pytanie: ile ładunku elektrycznego nagromadził w sobie naładowany kondensator? Czy dużo? Na podstawie poprzednich doświadczeń odpowiemy: raczej mało. Żarówka wszak tylko rozbłysła i zgasła. Lecz odpowiedzią „mało” lub „dużo” fizyk się nie zadowala i zapytuje „ile”? Aby odpowiedzieć na pytanie „ile”, trzeba przede wszystkim: 1) określić (za pomocą wzoru) wielkość fizyczną, której pytanie dotyczy, 2) ustalić na podstawie powyższego wzoru jednostkę, którą będziemy się posługiwali. Otóż *ładunek elektryczny e określono jako iloczyn natężenia prądu i czasu* [por. wzór (1.34), § 1.43]:

$$e = it. \tag{2.1}$$

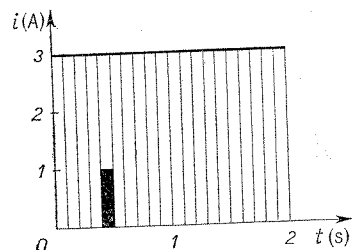
Na tej podstawie ustalamy, że jednostkowym ładunkiem jest taki ładunek, który przepłynie przez drut, gdy prąd o stałym natężeniu 1 A płynie w ciągu 1 s. Ta jednostka otrzymała nazwę *kulomba* (symbol *C*, nazywają ją również *amperosekundą*):

$$1C = 1A\cdot 1s.$$

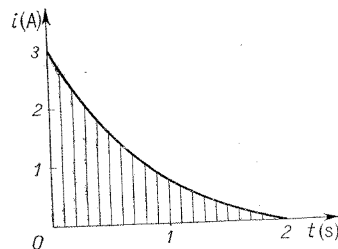
Na rysunku 2.14 widzimy, że prąd o natężeniu 3 A płynie w ciągu 2 s. Ładunek, który przepłynął przez drut, wynosi więc:

$$3A\cdot 2s = 6C.$$

Iloczyn ten przedstawia właśnie na wykresie pole zakreskowane w paski. Pole każdego paska odpowiada 0,3 C, bo pasków jest 20. Kawałek paska zaczernionego wyobraża 0,1 C. Gdyby natężenie prądu nie było stałe, jak na rys. 2.14, lecz malejące (np. od 3 A



Rys. 2.14. Wykres natężenia prądu w czasie. Ładunek elektryczny równa się zakreskowanemu polu (6 amperosekund, czyli 6 kulombów)



Rys. 2.15. Wykres natężenia prądu w czasie. Ładunek elektryczny równa się zakreskowanemu polu (ok. 2 amperosekundy, czyli 2 kulomby)

do 0), jak na drugim wykresie (rys. 2.15), to ładunek, jak nietrudno zrozumieć, obliczyć można sumując pola wszystkich zakreślonych pasków. Pasków jest też 20, ale każdy następny pasek jest krótszy od poprzedniego.

Czytelnik obeznany z rachunkiem różniczkowym i całkowym zrozumie, że do każdego paska (wysokość i, szerokość dt) zastosować można wzór (2.1) w postaci

$$de = i\,dt\,. \tag{2.1a}$$

Ładunek elektryczny e, który przepłynie od chwili 0 do chwili t, oblicza się jako sumę wszystkich ładunków $i\,dt$, a zatem jako całkę

$$e = \int_0^t i\,dt\,. \tag{2.1b}$$

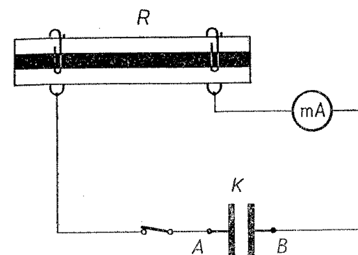
Zastosowana przez nas poniżej metoda obliczenia e przez wymierzenie pola na wykresie jest tzw. całkowaniem graficznym.

§ 2.5. Pomiar ładunku kondensatora za pomocą całkowania graficznego. Taki wypadek malejącego prądu zachodzi właśnie w procesie nas interesującym — rozładowania kondensatora. Ale proces ten przebiega bardzo szybko; zbyt szybko, aby można było wykonać pomiary natężenia prądu. Potrafimy go jednak zwolnić: oto należy utrudnić drogę elektronom poruszającym się wzdłuż drutu. Utrudnimy ją przez włączenie oporu bardzo dużego, mianowicie kilku milionów omów. Łatwo go zrobić samemu: zaczerniamy ołówkiem pasek papieru i zakładamy nań dwa spinacze jako doprowadzenia przewodników. Schemat doświadczenia pokazuje rys. 2.16. Kondensator K (ten większy z rys. 2.6), naładowany uprzednio z baterii o napięciu 200 V, rozładowujemy przez opór R i przez miliamperomierz. Pracując po kilku w zespole staramy się odczytywać natężenie prądu co 1 lub 2 sekundy. Wyniki układamy w tabelkę i wykreślamy na papierze milimetrowym. Taki wykres pokazuje nam dla przykładu jedna z krzywych na rys. 2.17.

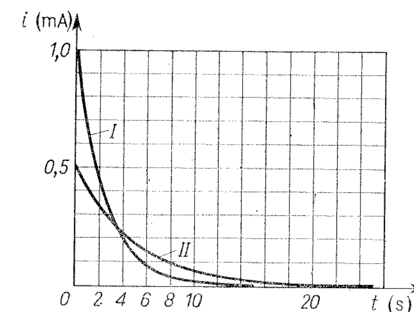
Aby móc odczytać natężenie prądu w chwili zerowej, lepiej jest zastosować schemat wskazany na rys. 2.18. Gdy wyłącznik W jest zamknięty, odczytujemy prąd i; jest to

jego wartość dla $t = 0$. W chwili sygnału na rozpoczęcie doświadczenia, danego przez pracownika naciskającego stoper, odłączamy wyłącznikiem W baterię i zaczynamy odczytywać stan miliamperomierza co 2 sekundy.

Poniżej podajemy sposób, jak można stan miliamperomierza odczytywać co 1 sekundę, zresztą bez nadmiernego pośpiechu! Należy całe doświadczenie powtórzyć trzy

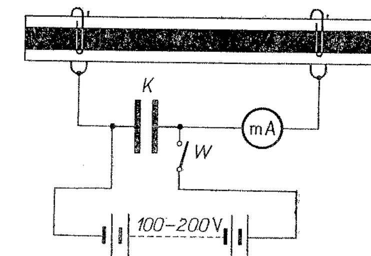


Rys. 2.16. Rozładowanie kondensatora przez wielki opór i przez miliamperomierz. W pierwszej chwili wskazówka miliamperomierza nie zdąży ustawić się na właściwej podziałce wskutek swej bezwładności, zatem odczytanie natężenia prądu dla $t = 0$ jest niemożliwe



Rys. 2.17. Krzywe prądu rozładowania kondensatora o pojemności 12 μF, naładowanego z baterii 200 V. Kondensator rozładowany został raz przez opór 0,2 MΩ (krzywa I), drugi raz przez opór 0,4 MΩ (krzywa II)

razy. Za pierwszym razem odczytujemy natężenie prądu po upływie sekund: 1, 4, 7, ... Powtarzamy ładowanie i rozładowanie po raz drugi i odczytujemy natężenie prądu po upływie sekund: 2, 5, 8, ... Wreszcie powtarzamy doświadczenie po raz trzeci i notujemy prąd po upływie sekund: 3, 6, 9, ... Układamy pełną tabelkę i sporządzamy wykres.

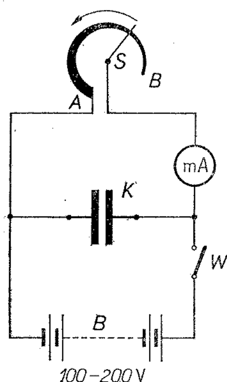


Rys. 2.18. Schemat tego samego doświadczenia, co na rys. 2.16, dający możliwość odczytania natężenia prądu dla $t = 0$ (w chwili początkowej)

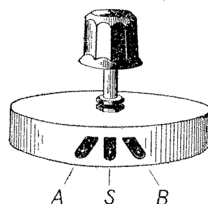
Po obliczeniu powierzchni zakreślonej przez krzywą (jest to właśnie „graficzne całkowanie") dowiadujemy się, że ładunek naszego kondensatora wyniósł np. 0,0024 C. Interesującą jest rzeczą, że jeśli doświadczenie przerobimy raz z oporem mniejszym (krzywa I) na rys. 2.17, a raz z większym (krzywa II), to pola zakreślone przez obie krzywe są sobie równe. Jest to wynik zupełnie zrozumiały, bowiem ładunek kondensatora nie może zależeć od oporu, przez jaki kondensator zostanie rozładowany. Okazuje się rów-

nież, że wynik niezależny jest od tego, czy zmierzymy ładunek ujemny, który wpłynął na jedną okładkę, czy ładunek ujemny, który wypłynął z drugiej okładki. Wyrażamy to tak: ładunek ujemny jednej okładki równy jest ładunkowi dodatniemu drugiej okładki. Przez wyrażenie „ładunek kondensatora" rozumie się, jak widać z powyższych pomiarów ładunek jednej z jego płyt.

***§ 2.6. Prostszy pomiar ładunku kondensatora (bez pomocy całkowania graficznego).** Trudność zmierzenia e polega na tym, że prąd rozładowania kondensatora słabnie w czasie. Z tego powodu nie możemy stosować prostego wzoru: $e = it$, lecz musimy stosować



Rys. 2.19. Rozładowanie kondensatora prądem o stałym natężeniu. Podczas rozładowania zmniejszamy opór AS



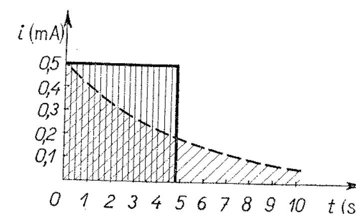
Rys. 2.20. Opornik pokrętny (tzw. potencjometr radiowy) użyty w doświadczeniu z rys. 2.19. A i B — końce oporu, S — blaszka połączona z suwakiem

całkowanie graficzne. Ale nietrudno jest sprawić, aby prąd rozładowania kondensatora był cały czas stały, tzn. aby jego natężenie było niezmienne. Należy tylko opór, przez który kondensator rozładowuje się, stopniowo zmniejszać i to w takim tempie, aby miliamperomierz pokazywał od początku do końca stałe wychylenie. Schemat doświadczenia pokazuje rys. 2.19. Kondensator K ładuje się z baterii B, a rozładowuje się przez opornik pokrętny i miliamperomierz. Jako opornika najlepiej użyć tzw. potencjometru radiowego (rys. 2.20) o oporze około 0,5 MΩ. Suwak S przekręcamy tak, aby prąd wynosił np. 0,5 mA. W chwili zerowej otwieramy wyłącznik W i naciskamy stoper. Kondensator rozładowuje się przez część AS oporu. Zmniejszając ten opór przez przekręcenie gałki w lewo otrzymujemy prąd na stałym poziomie $i = 0{,}5$ mA. W pewnej chwili prąd nagle spada do zera. Naciskamy znów stoper i odczytujemy czas (np. $t = 4{,}8$s). Obliczenie ładunku jest teraz bardzo łatwe

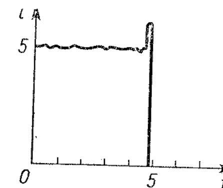
$$e = it.$$

W naszym przykładzie otrzymujemy: $e = 0{,}5\ \text{mA} \cdot 4{,}8\ \text{s} = 0{,}0024$ C, czyli znów tę samą liczbę co poprzednio. Rysunek 2.21 mówi sam za siebie.

Doświadczenie należy powtórzyć parę razy, aby nabyć wprawy w utrzymaniu stałości wskazania miliamperomierza. Krótkotrwałe odchylenia od stałości, ale tylko krótkotrwałe, nie dają wielkich błędów na e, jak poucza rys. 2.22.



Rys. 2.21. Rozładowanie kondensatora *stałym prądem* (linia gruba). Linia kreskowana przedstawia rozładowanie tego samego kondensatora przez *stały opór* (jak na rys. 2.17). Pola zakreskowane pionowo i ukośnie są sobie równe!



Rys. 2.22. Pod koniec rozładowania zdarza się często *krótkotrwałe* odchylenie od stałości prądu. Nie wpływa to znacznie na wielkość pola (e)

***§ 2.7. Pojemność kondensatora.** Powtórzmy nasze doświadczenie ładując kondensator z baterii o napięciu nie 200 V, jak poprzednio, lecz o napięciu 100 V. Po wykonaniu pomiaru tą czy inną metodą obliczamy, że ładunek kondensatora wynosi teraz 0,0012 C, a więc dwa razy mniej niż poprzednio. Stwierdzamy więc ważny fakt: *ładunek e zgromadzony w kondensatorze jest wprost proporcjonalny do napięcia U, jakie zostało przyłożone do jego okładek.* Ten fakt poucza nas, że stosunek e/U, czyli liczbowo ładunek kondensatora przypadający na 1 wolt, jest stały. Ten stosunek nazywamy *pojemnością kondensatora* i oznaczamy literą C; zatem

$$C = \frac{e}{U}. \tag{2.2}$$

W naszym przypadku pojemność kondensatora wynosi

$$C = \frac{0{,}0024\ \text{C}}{200\ \text{V}} = \frac{0{,}0012\ \text{C}}{100\ \text{V}} = 0{,}000\,012\,\frac{\text{C}}{\text{V}}.$$

Ta nowa jednostka C/V nazywa się *faradem* (F):

$$1\text{F} = \frac{1\ \text{C}}{1\ \text{V}}.$$

Słowami można to tak wyrazić: *1 farad jest to pojemność takiego kondensatora, który pod napięciem* 1 *wolta naładuje się ładunkiem* 1 *kulomba.* Jest to jednak jednostka bardzo wielka, skoro tak duży kondensator, jak ten większy z rys. 2.6, ma tylko 12 milionowych F. Dlatego stosuje się jednostkę pochodną, milion razy mniejszą, mianowicie 1 mikrofarad (μF):

$$1\ \mu\text{F} = 10^{-6}\ \text{F}.$$

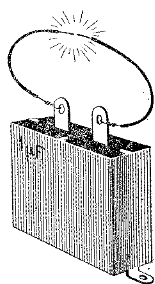
W radiotechnice mamy często do czynienia z kondensatorami tak małymi, że ich pojemność wynosi zaledwie drobny ułamek μF. Dla wygody używa się więc jednostek jeszcze mniejszych, mianowicie 1 000 000 razy mniejszych od 1 μF. Jednostka ta nazywa się „pikofaradem" (pF):

$$1\ \text{pF} = 10^{-6}\ \mu\text{F} = 10^{-12}\ \text{F}.$$

Kodensatorek mały, wyobrażony na rys. 2.6, ma pojemność równą 5000 pF. Pojemność przeciętnej butelki lejdejskiej wynosi kilka tysięcy pF. Poza tym istnieje jeszcze w nauce bardzo ważna jednostka nosząca dziwną na pozór nazwę 1 *centymetra* (dlaczego — dowiemy się w § 2.39) 900 000 cm stanowi 1 μF; zatem

$$1\ \text{cm} = \frac{1}{9}\cdot 10^{-5}\ \mu\text{F} = \frac{1}{9}\cdot 10^{-11}\ \text{F}.$$

Z wykresów na rys. 2.17 widać, że im mniejszy jest opór, przez który rozładuje się kondensator, tym czas rozładowania jest krótszy. Jeśli kondensator rozbroimy kawałkiem drutu o oporze wynoszącym drobny ułamek oma, to czas rozbrojenia będzie rzędu $t = 10^{-6}$ s. Skoro w tak krótkim czasie przez drut przepłynie ładunek $e = 0{,}0024$ C (jak w powyższym doświadczeniu), to przeciętne natężenie prądu w czasie około 10^{-6} s wyniesie e/t, czyli około 2000 amperów. Tak silny prąd spowoduje chwilowe ogrzanie



Rys. 2.23. Rozbrojenie kondensatora (naładowanego z baterii 220 V) przez zetknięcie drutów

się miejsca zetknięcia przewodników podczas rozbrojenia, co się objawia silnym trzaskiem i iskrą. Trzask i iskra znikają, gdy kondensator rozbroić przez opór choćby kilku omów (dlaczego?). Należy zwrócić uwagę, że rozbrojenie nastąpi dopiero wtedy, gdy druty od biegunów kondensatora zetkną się (rys. 2.23); później (§§ 2.12 i 2.22) poznamy taki wypadek, w którym rozbrojenie iskrowe występuje przed zetknięciem się drutów, na odległość.

§ 2.8. Równanie krzywej rozładowania kondensatora. Widzieliśmy, że natężenie prądu rozładowania kondensatora maleje, jak wskazuje krzywa na rys. 2.17. Zapytujemy teraz, według jakiego prawa (czyli wzoru) spada natężenie prądu rozładowania? Innymi słowy: jakie jest równanie krzywej z rys. 2.17.

Kondensator o pojemności C naładowany jest do napięcia U_0. Uważajmy chwilę rozpoczęcia rozładowania za zerową. Niech w pewnej chwili późniejszej t napięcie wynosi U, a natężenie prądu i. Jeśli kondensator rozładowuje się przez opór (stały) R, to według prawa Ohma

$$i = \frac{U}{R}. \tag{a}$$

Prąd i, oczywiście, stale maleje. Ale jeśli obserwowalibyśmy go w ciągu czasu niezmiernie krótkiego dt, to zawsze moglibyśmy (teoretycznie) ten czas (dt) uczynić tak krótkim, aby i mogło być uznane za stałe, z wystarczającą dla nas dokładnością. Wówczas $i\,dt$ będzie ubytkiem ładunku kondensatora. Oznaczając ten ubytek przez $-de$ (tzn. przyrost ładunku przez de) mamy

$$-de = i\,dt. \tag{b}$$

Ale wzór (2.2) uczy nas, że

$$e = CU,$$

więc różniczkując go mamy

$$de = C\,dU, \tag{c}$$

tzn. przyrost ładunku kondensatora równa się iloczynowi jego pojemności i przyrostu jego napięcia. Łącząc wzory (a), (b) i (c) mamy

$$\frac{dU}{U} = -\frac{dt}{CR}.$$

Jest to proste równanie różniczkowe, które całkujemy w granicach od U_0 do U i od 0 do t:

$$\int_{U_0}^{U}\frac{dU}{U} = -\frac{1}{CR}\int_0^t dt.$$

Po scałkowaniu otrzymuje się:

$$\ln\frac{U}{U_0} = -\frac{t}{CR},$$

czyli

$$U = U_0\,\mathrm{e}^{-t/CR}, \tag{2.3}$$

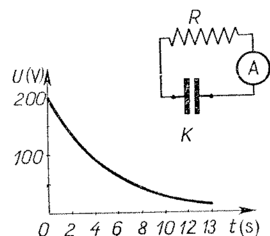
gdzie e = 2,718 ... jest podstawą logarytmów naturalnych (nie mieszać z ładunkiem e). Stosując prawo Ohma dla chwili początkowej oraz późniejszej (t) mamy: $U_0 = i_0R$ oraz $U = iR$. Stąd i z (2.3) otrzymujemy poszukiwany wzór:

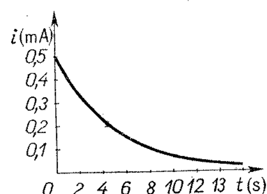
$$i = i_0\,\mathrm{e}^{-t/CR}. \tag{2.4}$$

Wzory (2.3) i (2.4) uczą, że zarówno napięcie kondensatora, jak i natężenie prądu spadają według „krzywej wykładniczej".

Weźmy dla przykładu: $C = 12$ μF, $R = 0{,}4$ MΩ i $U_0 = 200$ V, jak w doświadczeniu z § 2.5. Otrzymane krzywe pokazuje rys. 2.24. Krzywa prądu identyczna jest z krzywą doświadczalną uzyskaną w doświadczeniu (rys. 2.17). Mogą jednak istnieć

między nimi niewielkie różnice spowodowane niedoskonałością dielektryka w kondensatorze (dielektryk nie będąc doskonałym izolatorem przewodzi pewien, zresztą bardzo słaby prąd, wskutek czego kondensator pozostawiony sam sobie traci zwolna ładunek).





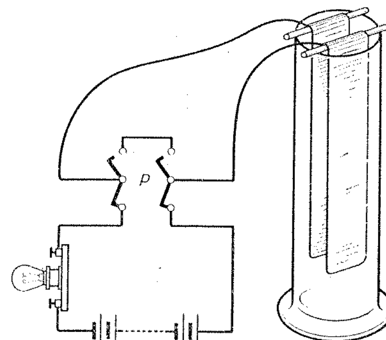
Rys. 2.24. Spadek napięcia i natężenia prądu podczas rozładowania kondensatora odbywa się według krzywej wykładniczej [równanie (2.3) i (2.4), § 2.8]

***§ 2.9. Płytki kondensatora przyciągają się!** Tytuł tego paragrafu może nieco zdziwić: jak to się objawia, że płytki kondensatora przyciągają się? Przecież ciasno zgniecione, przylegają ściśle do papieru parafinowego. Zapewne, że płytki zwykłego kondensatora radiowego nie objawiają nam w żaden sposób owego wzajemnego przyciągania. Ale zróbmy specjalne płytki lekkie, swobodne, przedzielone tylko powietrzem, a siła przyciągania objawi się.

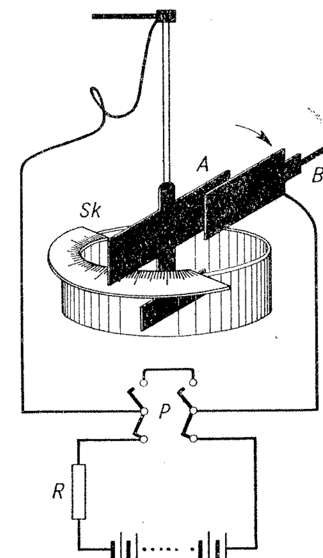
Takie właśnie płytki, będące paskami wyciętymi z lekkiej, cienkiej folii aluminiowej, zwisają wewnątrz cylindra szklanego, który chroni je od prądów powietrza (rys. 2.25). Oba paski folii umocowane są na dwóch pręcikach szklanych, opartych na górnej krawędzi cylindra. Paski połączone są cienkimi drutami za pomocą przełącznika P z baterią ogniw o napięciu 100—200 V. Żarówka małej mocy, na napięcie 220 V, służy jako zabezpieczenie przed zwarciem, a jednocześnie jako sygnał, że obie okładki kondensatora przyciągnęły się aż do zetknięcia. Gdy przełącznik znajduje się w pozycji , w której obie okładki kondensatora są zwarte, paski zwisają równolegle do siebie; gdy zaś przełącznik ustawimy w pozycji przeciwnej, kondensator ładuje się i obie jego okładki przyciągają się; z chwilą zetknięcia się okładek, żarówka zapala się.

To niezmiernie interesujące doświadczenie można wykonać w odmienny sposób, przedstawiony na rys. 2.26. W tym doświadczeniu kondensator składa się z dwóch cienkich płytek aluminiowych A i B. Płytka A ma kształt samolociku zawieszonego na dwóch cienkich metalowych niciach — jest to tzw. zawieszenie bifilarne. Płytka ta może się więc obracać dookoła osi pionowej, a kąt obrotu można mierzyć na skali Sk. Dolna część płytki A zanurzona jest w oleju w celu tłumienia wahań. Osłoną celuloidową chronimy ją od prądów powietrza, które mogłyby ją ustawicznie poruszać. Płytki A i B tworzą więc mały kondensatorek, którego okładki łączymy za pośrednictwem przełącznika P

z baterią ogniw, jak wskazuje rysunek. Gdy przełącznik jest przerzucony na dolne kontakty, kondensatorek nasz ładuje się (poprzez opór „radiowy" R zapobiegający ewentualnemu zwarciu). Gdy przełącznik P przerzucimy na górne kontakty, kondensatorek rozładuje się.



Rys. 2.25. Doświadczenie stwierdzające, że płytki naładowanego kondensatora przyciągają się



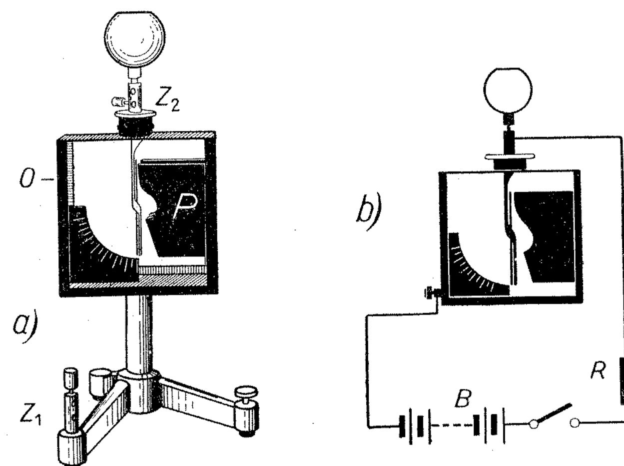
Rys. 2.26. To samo doświadczenie co na rys. 2.25 odmienną metodą. A i B — płytki wycięte z cienkiej blachy aluminiowej (A zawieszona na podwójnej nici choinkowej), Sk — skala wycięta z kątomierza

I oto przekonamy się, że ilekroć kondensatorek naładujemy, płytka A okręca się o pewien kąt zbliżając się do płytki B. Wraca natomiast do dawnego położenia, gdy kondensatorek rozładujemy. Fakt zaobserwowany wypowiemy więc tak: *dwa przewodniki połączone z biegunami źródła prądu* (*czyli naładowane*: *jeden ujemnie, drugi dodatnio*) *przyciągają się*. Siły wzajemnego przyciągania przyłożone są, oczywiście, do obu płytek. Działają one poprzez przestrzeń dzielącą je od siebie.

Przyjrzyjmy się raz jeszcze doświadczeniu z rys. 2.26. Przyznamy chyba, że siła przyciągania się płytek jest niezwykle mała. Ale spróbujmy przyłożyć do płytek wyższe napięcie niż dotychczas: z baterii o większej ilości ogniw. Widzimy, że teraz płytka A skręca się znacznie silniej. A zatem wielkość jej skręcenia zależy od przyłożonego napięcia. Jest to pierwsze zjawisko, jakie poznaliśmy, w którym objawia się *działanie samego napięcia bez udziału prądu*. Zjawisko to zastosujemy zaraz do mierzenia napięcia.

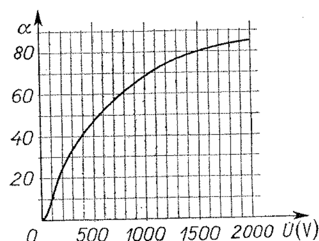
***§ 2.10. Elektrometr.** Przyrząd, w którym zjawisko przyciągania się dwóch płytek kondensatora zastosowane jest do mierzenia wielkości napięcia panującego między tymi płytkami, nazywa się *elektrometrem*. Elektrometr składa się zasadniczo z dwóch płytek:

nieruchomej i ruchomej. Obie te płytki w różnych typach elektrometrów mają najrozmaitsze kształty, zależne od zakresu napięć, dla jakiego elektrometr ma służyć. Rysunek 2.27 przedstawia elektrometr wskazówkowy. Ruchoma płytka jest tu bardzo wąska i długa i służy sama jako wskazówka. Obraca się dookoła osi poziomej. Dolny jej koniec jest



Rys. 2.27. Wygląd elektrometru wskazówkowego (według autora). Schemat przedstawia sposób kalibrowania elektrometru, B jest to kilka baterii anodowych lub lepiej „multiplikator napięcia" (patrz § 2.12), zasilany stosunkowo niskim napięciem (2—30 V)

nieco cięższy niż górny i dlatego zawsze powraca ku dołowi do pozycji „zerowej". W sąsiedztwie górnego jej końca znajduje się elektroda nieruchoma, która ma kształt puszki. Nietrudno się domyślić, dlaczego ma taki kształt: chodzi o to, aby wskazówka przyciągana przez puszkę nie zetknęła się z nią, lecz wchodziła w nią coraz głębiej. Zetknięcie



Rys. 2.28. Krzywa kalibrowania elektrometru z rys. 2.27; α — wychylenie wskazówki, U — napięcie między wskazówką a osłoną

bowiem uniemożliwiłoby jakiekolwiek mierzenie. Puszka połączona jest z pancerzem przyrządu; wskazówka osadzona jest na pręcie, który poprzez korek izolacyjny przechodzi na zewnątrz puszki i kończy się tu zaciskiem i wydrążoną kulą (kula ta potrzebna nam będzie później). Zacisk od puszki i osłony znajduje się na nóżce elektrometru.

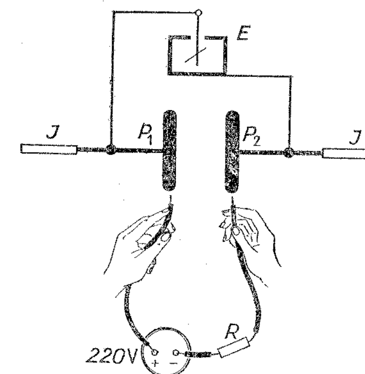
Połączmy zaciski elektrometru z biegunami baterii ogniw albo z biegunami sieci prądu stałego 220 V. Wskazówka wychyli się o około 20 podziałek. Powtórzmy ten pomiar dla rozmaitych napięć (mierzonych woltomierzem) i wykreślmy tzw. „krzywą

kalibrowania elektrometru". Rysunek 2.28 przedstawia taką krzywą dla elektrometru wskazówkowego przedstawionego na rys. 2.27. Krzywą tę otrzymano kalibrując elektrometr różnymi napięciami aż do 2000 woltów. Niebawem dowiemy się, jak wytwarzać tak wysokie napięcia (por. § 2.12).

Istnieje bardzo wiele typów elektrometrów. Wszystkie oparte są na tej samej zasadzie przyciągania się wzajemnego przewodników naelektryzowanych różnoimiennie. Ale konstrukcja ich jest bardzo rozmaita, zależnie od tego, czy elektrometr ma mierzyć napięcia niskie, czy wysokie. Elektrometr nie mający wyskalowanej podziałki nosi nazwę *elektroskopu*; taki przyrząd wskazuje istnienie napięcia, ale go nie mierzy; pozwala tylko na jakościowe porównywanie napięć. Elektrometr może nie mieć puszki P wyobrażonej na rys. 2.27. Wówczas jednak daje on mniejsze wychylenia dla wszystkich napięć, a zwłaszcza jest mniej czuły na niskie napięcia. Inne typy elektrometrów poznamy w §§ 2.49—2.52.

Każdy elektrometr jest swego rodzaju kondensatorem; ma więc pewną pojemność. Ale pojemność ta jest bardzo mała i na ogół nie przekracza kilkunastu pF. Na przykład elektrometr z rys. 2.27 ma pojemność około 12 pF.

***§ 2.11. Od czego zależy pojemność kondensatora?** Aby odpowiedzieć na to pytanie, musimy wykonać takie doświadczenia, w których zmieniać będziemy różne szczegóły budowy kondensatora, np. odległość jego płyt, rodzaj izolatora itp. Zastosujemy do tego celu kondensator złożony z dwóch płytek, które mogą się względem siebie przesuwać.



Rys. 2.29. Doświadczenie z kondensatorem płytkowym P_1 P_2 naładowanym z baterii 220 V. Opór R (ok. 0,1 — 1 MΩ) służy jako zabezpieczenie przed zwarciem. E — oznacza symbolicznie elektrometr

Rysunek 2.29 pokazuje, jak należy połączyć kondensator płytkowy z elektrometrem wskazówkowym, aby mierzyć napięcie między jego płytkami. Kondensator zostaje naładowany z baterii 220 V przez zetknięcie na chwilę płytek z końcami drutów połączonych z biegunami źródła prądu. Po naładowaniu kondensatora elektrometr pokazuje dokładnie takie samo napięcie, jakie ma źródło prądu. Zauważmy więc, że kondensator zachowuje niezmienione napięcie źródła prądu nawet po odłączeniu od źródła prądu. Po dłuższym zresztą czasie napięcie kondensatora obniża się, a to dlatego, że rozładowuje się on przez niedoskonałą izolację.

Aby odpowiedzieć na pytanie zawarte w tytule tego paragrafu, wykonajmy następujące doświadczenia:

Doświadczenie A: 1. Płytki kondensatora zbliżamy chwytając je za izolacyjne rączki *JJ*. Wskazówka elektrometru opada. Zatem napięcie maleje.

2. Płytki kondensatora oddalamy. Wskazówka elektrometru gwałtownie podnosi się. Napięcie rośnie.

A więc napięcie U kondensatora (po odłączeniu od źródła prądu!) zależy od odległości płytek i to tak, że im odległość mniejsza, tym napięcie niższe. Ale wiemy, że jego pojemność C jest równa e/U (ładunek elektryczny e jest w tym doświadczeniu stały), przeto wyciągamy ważny wniosek: *pojemność kondensatora rośnie, gdy odległość płytek maleje.*

Rozumiemy teraz, dlaczego okładki kondensatora radiowego są tak blisko siebie, mianowicie w odległości równej grubości cienkiego papieru parafinowanego. Papier, a w ogóle izolator, odgrywa tu jeszcze inną rolę, o której poucza nas następujące doświadczenie.

Doświadczenie B: 1. Pomiędzy płytki naładowanego kondensatora wstawiamy płytkę izolacyjną, np. ebonitową. Wskazówka opada. Po usunięciu płytki izolacyjnej wskazówka podnosi się do dawnego położenia. Płytka izolacyjna obniżyła więc znacznie napięcie pomiędzy płytkami kondensatora, pomimo że żadnej okładki kondensatora mogła nawet nie dotknąć. Skoro wprowadzenie płytki izolacyjnej obniżyło napięcie kondensatora, to stąd wniosek, że jego pojemność wzrosła (gdyż $C = \frac{e}{U}$, a e jest stałe).

2. Między okładki kondensatora wstawmy płytkę izolacyjną i naładujmy go do napięcia 220 V, po czym odłączmy od baterii. Jeśli usuniemy teraz płytkę izolacyjną, napięcie kondensatora silnie wzrośnie. A zatem pojemność zmalała.

Tablica 2.1

Stała dielektryczna

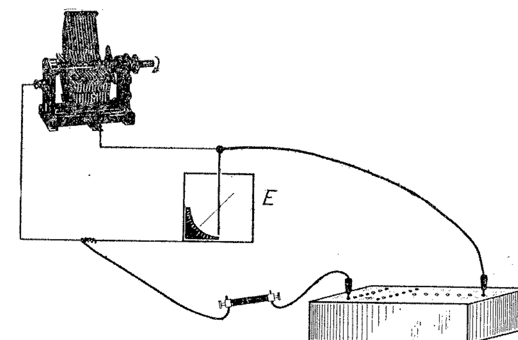
Dielektryk	Stała dielektryczna
Próżnia	1
Powietrze	1,0006
Parafina	2,0
Nafta	2,0
Olej transformatorowy	2,2
Olej parafinowy	2,1
Inne oleje	od 2 do 5
Benzen	2,3
Ebonit	2,8
Różne gatunki szkła	od 5 do 10
Alkohol etylowy	27
Woda	81

Powtórzmy powyższe doświadczenie z płytką parafinową i sprawdźmy, czy ona ma mniejszą, czy większą ową „zdolność do zwiększania pojemności kondensatora". Tę „zdolność" można wyrazić przy pomocy liczby, która wskaże, ile razy zwiększa się pojemność kondensatora, jeśli przestrzeń między jego okładkami wypełnimy zamiast powietrzem — dielektrykiem. Umówiono się jednak ową „zdolność" odnosić nie do kondensatora z powietrzem, lecz z próżnią. Nazywamy ją *stałą dielektryczną* i oznaczamy literą ε. W myśl powyższej definicji

$$\varepsilon = \frac{C}{C_0}, \tag{2.5}$$

gdzie C oznacza pojemność kondensatora, którego przestrzeń między płytkami wypełniona jest dokładnie badanym dielektrykiem, a C_0 — pojemność tego samego kondensatora, jeśli jego płytki znajdują się w próżni. Tablica 2.1 na stronie 98 zawiera stałe dielektryczne rozmaitych ciał.

Doświadczenie C. A teraz weźmy inny kondensator, mianowicie obrotowy (rys. 2.30). Ma on cały system płytek ruchomych, które możemy mniej lub więcej wsuwać (przez pokręcenie) pomiędzy płytki nieruchome. Tę część powierzchni płytek, które zachodzą na siebie, nazwijmy powierzchnią „czynną". Ustawmy kondensator na maksimum powierzchni czynnej. Połączmy go z elektrometrem zupełnie tak samo, jak na rys. 2.29 i naładujmy go do napięcia 220 V, po czym *odłączmy* od źródła prądu. Elektrometr pokazuje stale 220 V. Powoli przekręcajmy gałkę kondensatora. Powierzchnia czynna płytek maleje. Elektrometr pokazuje coraz wyższe napięcie. Nietrudno wyciągnąć wniosek: *pojemność kondensatora* (e/U) *maleje, gdy powierzchnia czynna płytek się zmniejsza.*



Rys. 2.30. Doświadczenie z kondensatorem obrotowym ładowanym z baterii lub z sieci (patrz rys. 2.29)

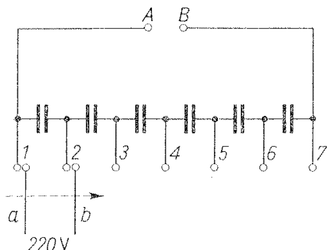
Reasumując wyniki tych doświadczeń powiemy, że pojemność kondensatora jest tym większa, im odległość okładek jest mniejsza, im ich powierzchnia czynna jest większa i im stała dielektryczna jest większa. (Specjalne doświadczenia pouczają nas, że grubość okładek metalowych ma tylko niewielki wpływ na pojemność kondensatora.)

***§ 2.12. Otrzymywanie wysokich napięć.** Przypomnijmy sobie jak się otrzymuje napięcie 100 V. Można wziąć np. 50 akumulatorów (każdy, jak wiemy, ma 2 V) połączonych szeregowo; można również połączyć w szereg 70 ogniw Leclanchégo (każde ma około 1,5 V), jak to ma miejsce w bateriach radiowych.

Aby otrzymać np. napięcie 1000 V, należałoby wziąć 500 akumulatorów albo 700 ogniw Leclanchégo. Ale są to sposoby dość kłopotliwe i ogromnie kosztowne. Kłopot polega właściwie na tym, że pojedyncze ogniwo takiej baterii ma bardzo małe napięcie, bo zaledwie 1—2 V. Gdyby rozporządzać ogniwami o napięciu np. po 200 V, to już

niewielka liczba takich ogniw połączonych szeregowo dałaby bardzo wysokie napięcie. Czy takich ogniw nie ma?

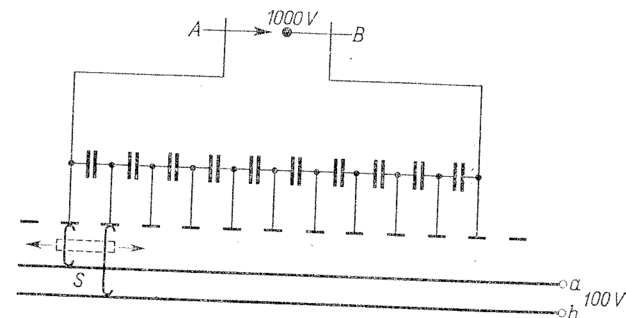
Przypomnijmy sobie nasz kondensator. Na ogół źródłem prądu on nie jest. Ale naładowany z baterii ogniw do napięcia np. 200 V, staje się źródłem prądu. Na jego zaciskach panuje teraz napięcie 200 V. Wprawdzie takie źródło prądu szybko się rozładuje, gdy tylko zaczniemy czerpać z niego prąd, ale nie zrażajmy się tym i zbudujmy z takich naładowanych kondensatorów całą baterię. Pokazuje to rys. 2.31. Sześć kondensatorów

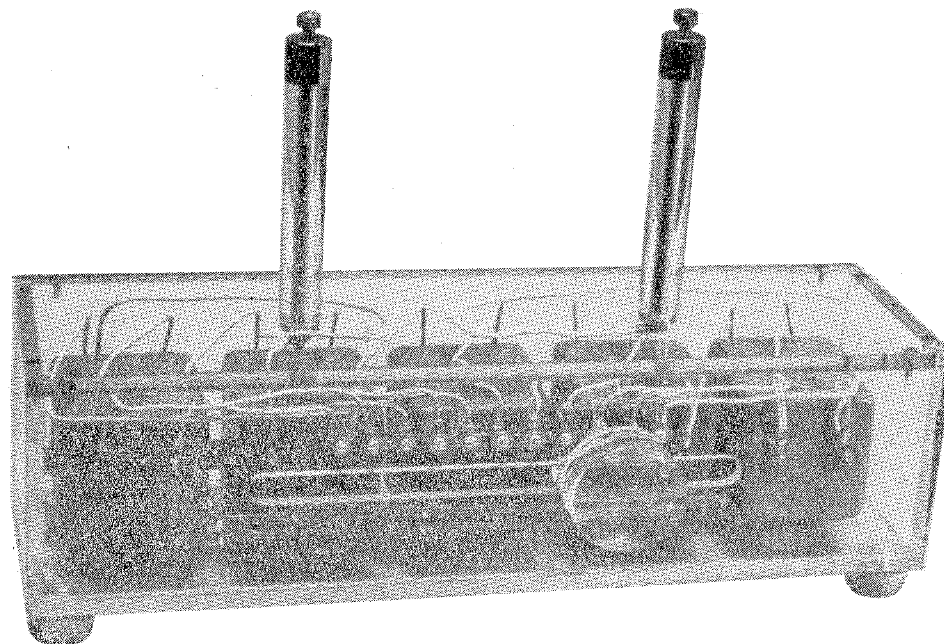


Rys. 2.31. Sześć kondensatorów, połączonych szeregowo, ładujemy kolejno do napięcia 200 V uzyskując w ten sposób na zaciskach baterii kondensatorów *AB* napięcie 1200 V

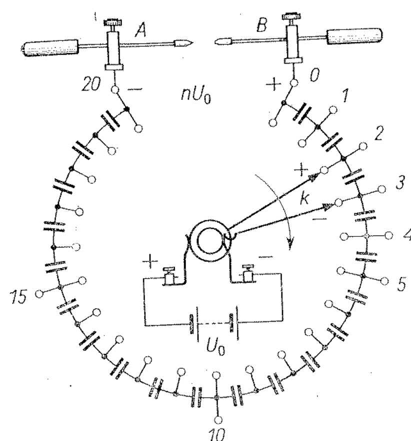
o niewielkiej pojemności jest połączonych szeregowo; napięcie na zaciskach *A* i *B* baterii wynosi więc 1200 V. Jeśli tę baterię kondensatorów rozładujemy łącząc *A* i *B* drutem, to zobaczymy iskrę; zniszczymy przy tym napięcie baterii. Żeby je przywrócić, należy znów każdy kondensator kolejno dołączyć do zacisków baterii ogniw lub sieci. Zróbmy pewne ułatwienie: nie ruszajmy kondensatorów, lecz druty *a* i *b* prowadzące od źródła prądu stykajmy k o l e j n o z zaciskami poszczególnych kondensatorów. A więc naprzód dotknijmy do zacisków *1* i *2* (naładujemy wtedy kondensator pierwszy do napięcia 200 V), potem do zacisków *2* i *3* (naładujemy drugi) itd. Po naładowaniu wszystkich otrzymamy znów na biegunach *A* i *B* 1200 V. Ten proces kolejnego ładowania kondensatorów możemy zmechanizować, druty *a* i *b* mogą być dołączone do ruchomych kontaktów, które ślizgają się po nieruchomych kontaktach *1*, *2*, *3* itd. Taki prosty przyrząd, zwany *multiplikatorem napięcia* (bo uwielokrotnia napięcie), przedstawia rys. 2.32. W multiplikatorze napięcia może być zastosowany ruch obrotowy, jako wygodniejszy. Schemat takiego przyrządu pokazano na rys. 2.33. Kontakty *k*, już po jednym obrocie korby, naładują kolejno wszystkie kondensatory. Multiplikatory obrotowe przedstawiają rys. 2.34 i 2.35.

***§ 2.13. Co wskazuje elektroskop pozbawiony osłony?** Do mierzenia tak wysokich napięć, jakie daje multiplikator napięcia, nie można stosować elektrometru, który stosowaliśmy do mierzenia niskich napięć (rys. 2.27). Powodu nietrudno się domyślić: pomiędzy wskazówką a puszką przeskoczyłaby iskra i uszkodziłaby przyrząd. Dlatego elektrometr wysokonapięciowy musi mieć inną budowę. Poznamy ją w § 2.52. Tymczasem jednak użyjmy elektroskopu, który w pracowniach szkolnych jest bardzo rozpowszechniony. Jest to elektroskop dwulistkowy *bez osłony* (rys. 2.36); to znaczy bez osłony metalowej, bowiem szklaną posiada. Jest to pręcik z dwoma listkami, lub lepiej rureczkami z cynfolii, umocowany na korku ebonitowym, w szyjce szerokiej butelki. Na razie trudno zgadnąć, co taki przyrząd może wskazywać (lub mierzyć, gdyby za listkami była umieszczona podziałka); brakuje w nim bowiem drugiej elektrody, tj. osłony.

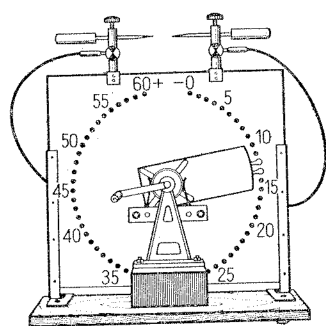


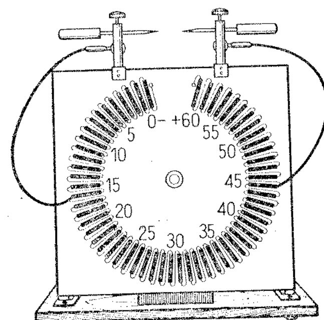


Rys. 2.32. Multiplikator napięcia suwakowy złożony z 10 kondensatorów. U góry: schemat, *S* — suwak do ładowania kondensatorów; u dołu: wygląd multiplikatora suwakowego do celów demonstracyjnych; obudowa przezroczysta z plexiglasu

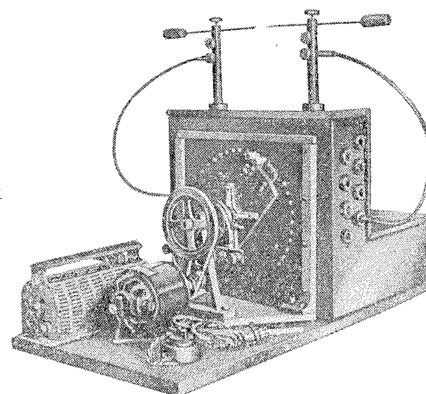


Rys. 2.33. Schemat multiplikatora napięcia obrotowego. Kontakty *0,1,2,3*, ... itd. służą do odbierania dowolnej wielokrotności napięcia zasilającego U_0. Ruchome kontakty *k* doprowadzają prąd z baterii; powinny być one, dla odróżnienia od siebie, oznaczone różnymi barwami: ujemny — niebieską, dodatni — czerwoną



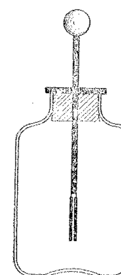


Rys. 2.34. Widok multiplikatora napięcia z przodu i z tyłu (wg autora). Multiplikator ten ma 60 kondensatorów, każdy o pojemności 0,5 μF. Dwa kabelki służą do odprowadzenia dowolnie wybranego napięcia. Między kolumnami panuje wybrane napięcie najwyżej równe 60 U_0

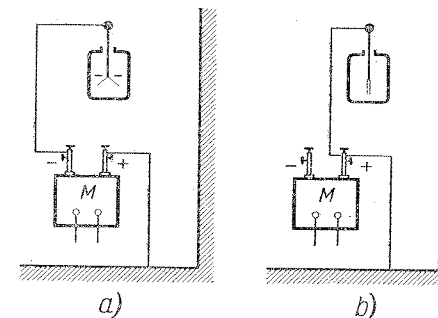


Rys. 2.35. Multiplikator napięcia odmiennej konstrukcji obracany silniczkiem (wg autora)

Połączmy pręcik tego elektroskopu z jednym biegunem multiplikatora; drugiego bieguna — ponieważ elektroskop nie posiada osłony — nie łączmy z niczym. Powoli obracajmy multiplikator. Listki to się rozchylą, to znów opadną. Od czego to zależy? Aby odpowiedzieć na to pytanie, wykonujemy następujące doświadczenia.



Rys. 2.36. Typowy elektroskop szkolny bez osłony



Rys. 2.37. Elektroskop wskazuje napięcie między biegunem źródła wysokiego napięcia (multiplikatora *M*) a ziemią, czyli potencjał bieguna

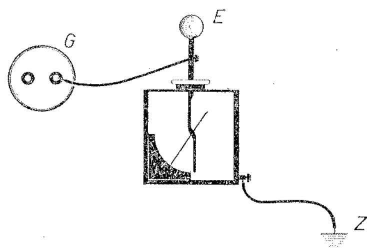
a) Połączmy elektroskop (rys. 2.37a) z jednym biegunem multiplikatora napięcia, a drugi jego biegun połączmy z ziemią, tzn. z rurą wodociągową lub gazową. Łącząc go z ziemią, łączymy go tym samym ze ścianami, z sufitem i ze wszystkimi przedmiotami, nie dość dobrze odizolowanymi od ziemi. Listki elektroskopu rozchylają się tak, jakby elektroskop miał osłonę połączoną z drugim biegunem multiplikatora (por. rys. 2.27). Tym razem jednak osłonę stanowi ziemia, ściany i otaczające przedmioty. My sami stanowimy teraz część owej osłony; możemy usunąć drut uziemiający i zastąpić go swoim ciałem (dotknąć ręką bieguna multiplikatora), a skutek będzie ten sam. Wyjaśnienie rozchylenia się listków jest już zupełnie proste: listki elektroskopu rozchylają się, gdy są przyciągane przez „osłonę" połączoną z przeciwnym biegunem. Doświadczenie uczy, że gdy owa osłona, a więc ściany, ziemia, rozmaite przedmioty itp. oddalają się od listków elektroskopu na nieograniczoną odległość, to mimo to listki nadal pozostają rozchylone. A ponieważ listki elektroskopu mają ładunek tego samego znaku, przeto fakt powyższy interpretujemy jako objaw *wzajemnego odpychania się ciał mających ładunek tego samego znaku*; *ciała naładowane jednoimiennie odpychają się*.

b) Jeżeli elektroskop połączymy z uziemionym biegunem multiplikatora napięcia, jak wskazuje rys. 2.37b, listki się nie rozchylą. Rozchylą się dopiero wtedy, gdy przeciwny biegun uziemimy; ale wtedy będzie sytuacja podobna, jak na rys. 2.37a.

Aby lepiej zrozumieć to zjawisko, zauważmy, że pręcik elektroskopu i listki — z jednej strony oraz ziemia i ściany — z drugiej strony, tworzą pewien kondensator. A o kondensatorze wiemy, że jego okładki (listki i ściany) będą się dopiero wtedy przyciągały, jeśli kondensator będzie naładowany, czyli jeśli jego „okładki" będą połączone z obydwoma biegunami źródła prądu. Innymi słowy, z jednym biegunem musi być połączony pręcik, a z drugim — ziemia (osłona), właśnie tak, jak w doświadczeniu a).

Natomiast w doświadczeniu b) system pręcik-ziemia wcale nie stanowi kondensatora, a raczej przypomina kondensator, którego okładki zwarto drutem. Kondensator taki nie da się oczywiście naładować.

Zapamiętajmy więc ważny wniosek, jaki wynika z naszych doświadczeń: *podczas gdy elektrometr z osłoną mierzy napięcie między biegunami źródła prądu* (czyli *napięcie między pręcikiem a osłoną*), *elektroskop bez osłony wskazuje istnienie napięcia między danym biegunem źródła prądu a ziemią*. To napięcie nazywa się *potencjałem bieguna względem ziemi*, albo dla zwięzłości po prostu *potencjałem bieguna* (por. potencjał względem punktu w § 1.24).



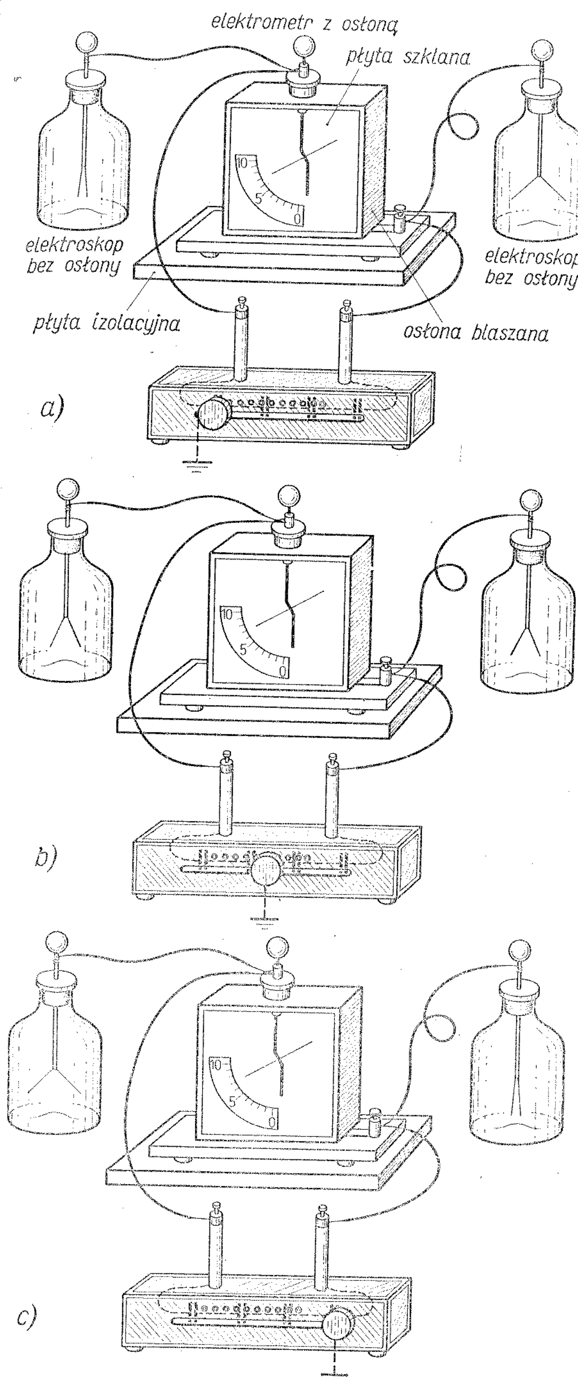
Rys. 2.38. Elektrometr *E* mierzy potencjał jednego z przewodów sieci prądu stałego. *G* jest to gniazdko ścienne. *Z* jest symbolem uziemienia

Zrozumiałe jest, że elektroskop nie może mierzyć potencjału. Może tylko wskazywać, czy potencjał jest niezerowy, czy ma wartość większą, czy mniejszą. Można jednak z łatwością mierzyć potencjał za pomocą elektrometru, łącząc jego pręcik z danym biegunem, a osłonę z ziemią (rys. 2.38).

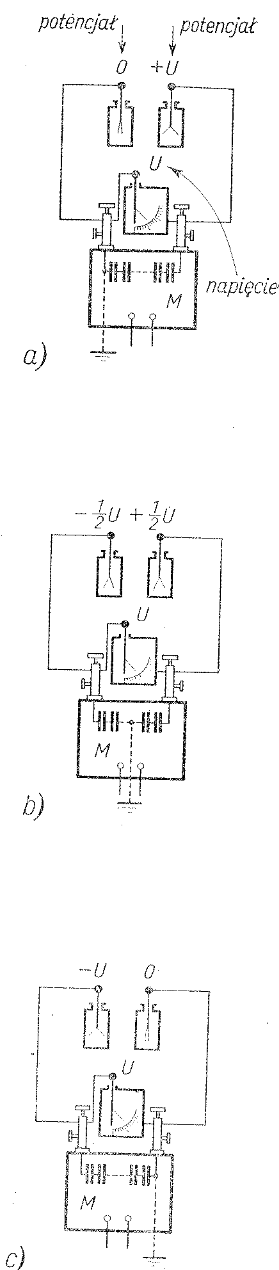
***§ 2.14. „Doświadczenie z trzema elektroskopami".** Interesującą ilustracją powyższych wywodów jest następujące doświadczenie. Bieguny multiplikatora napięcia łączymy z dwoma elektroskopami, a między bieguny włączamy elektroskop (lub elektrometr) z osłoną. Pokazuje to rys. 2.39, a schematycznie przedstawia rys. 2.40. Żaden biegun multiplikatora napięcia nie jest uziemiony stale. Uziemiony jest natomiast jeden z biegunów baterii zasilającej multiplikator. Tym samym uziemiony jest jeden z kontaktów ładujących, który podczas obrotu multiplikatora wędruje po wszystkich zaciskach kondensatorów, od pierwszego do ostatniego. W ten sposób podczas obrotu uziemienie wędruje od jednego bieguna baterii kondensatorów do drugiego. Rysunki 2.39a i 2.40a pokazują nam doświadczenie w chwili, kiedy lewy biegun multiplikatora jest uziemiony. Lewy elektroskop pokazuje potencjał 0, prawy — ma największe wychylenie. To, co się dzieje następnie podczas obrotu, pokazują nam dalsze obrazki na rys. 2.39 i 2.40: rys. b — bateria kondensatorów uziemiona w środku, rys. c — uziemiony prawy biegun baterii kondensatorów. Podczas gdy oba elektroskopy pokazują, że potencjały biegunów zmieniają się na przemian od 0 do U, elektrometr wskazuje niezmiennie stałą różnicę potencjałów (czyli napięcie) panującą między biegunami.

Uwaga. Po tych doświadczeniach zrozumiemy z łatwością, że:

1. Jeśli multiplikator napięcia zasilany jest z baterii odizolowanej, to wolno uziemić na stałe jeden z jego biegunów, ale pamiętać należy, że bateria otrzymuje wówczas potencjał zmieniający się od 0 do U (U — pełne napięcie multiplikatora); dlatego właśnie winna być odizolowana, tzn. ustawiona na płycie izolacyjnej.



Rys. 2.39. „Doświadczenie z trzema elektroskopami"



Rys. 2.40. „Doświadczenie z trzema elektroskopami" — schematycznie. Nad elektroskopami zaznaczono potencjały (zmieniające się) i napięcie (stałe)

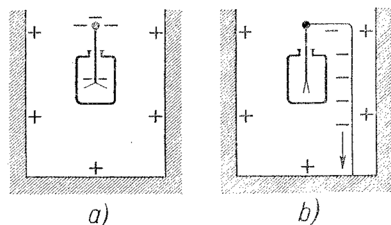
2. Jeśli multiplikator zasilany jest z baterii (której jeden z biegunów został uziemiony), to potencjały biegunów multiplikatora zmieniają się tak, jak wskazuje rys. 2.39 i 2.40, a mimo to napięcie U jest stałe i równe nU_0 (gdzie n — liczba kondensatorów multiplikatora, a U_0 — napięcie baterii). Uziemienie „wędruje" wówczas od bieguna do bieguna, nie wolno więc żadnego z biegunów multiplikatora na stałe uziemiać. Jeśli w doświadczeniach elektrostatycznych musimy uziemić jeden z biegunów na stałe, to po wykonaniu kilku obrotów korbą zatrzymujemy kontakty ładujące na końcowych guzikach tego bieguna, który chcemy uziemić. Jeśli baterię kondensatorów multiplikatora uziemić chcemy nie na końcu, lecz w środku, wówczas kontakty ładujące zatrzymujemy na środkowych guzikach multiplikatora. Jest to wygodny sposób, niemniej można używać sposobu opisanego w punkcie 1.

We wszystkich doświadczeniach z multiplikatorem, gdy będziemy mówili o uziemieniu bieguna, będziemy mieli na myśli jeden z opisanych tu sposobów uziemienia.

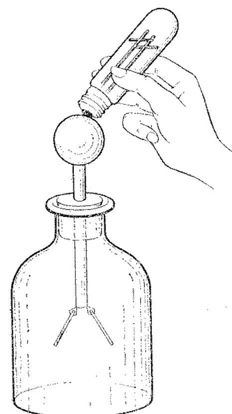
***§ 2.15. Przewodnik odizolowany od ziemi – jako kondensator. Rola ziemi w zjawiskach elektrostatycznych.** Widzieliśmy, że listki elektroskopu rozchylają się tylko wtedy, gdy połączymy go z jednym biegunem źródła prądu, podczas gdy drugi jest uziemiony. Pręcik elektroskopu stanowi bowiem wraz z ziemią kondensator, który został naładowany ze źródła prądu. Pręcik zatem, będąc jedną z okładek kondensatora, ma pewien ładunek elektryczny e, przy czym

$$e = CU,$$

gdzie U jest napięciem między pręcikiem a ziemią, czyli potencjałem pręcika, a C jest pojemnością kondensatora pręcik—ziemia. C nazywamy po prostu *pojemnością* pręcika albo ogólniej — *pojemnością przewodnika* (odizolowanego od ziemi).



Rys. 2.41. a) Elektroskop jako kondensator pręcik-ziemia. b) Rozbrojenie elektroskopu



Rys. 2.42. Rozbrojenie elektroskopu przez lampkę neonową

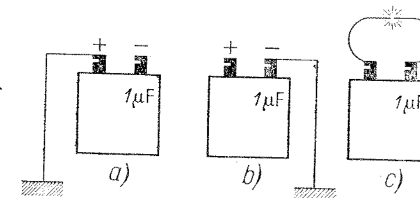
Rysunek 2.41a przedstawia elektroskop „naelektryzowany", tzn. naładowany przez zetknięcie z nieuziemionym biegunem źródła prądu. Po odłączeniu od bieguna elektroskop zachowuje swój ładunek; listki są rozchylone. Żeby go rozładować, czyli „rozbroić", należy rozładować kondensator pręcik-ziemia, a więc połączyć pręcik z ziemią. Wystarczy w tym celu dotknąć kulkę elektroskopu palcem lub jakimkolwiek przewodnikiem uziemionym, a listki opadną (rys. 2.41b). Podczas rozbrojenia elektroskopu jego ładunek elektryczny spływa do ziemi.

Ładunek ten jest tak znikomo mały, że jego przepłynięcie do ziemi można wykryć tylko niezwykle czułym galwanometrem. Oceńmy jego wielkość. Pojemność pręcika elektroskopu z kulką u góry nie wynosi więcej niż kilka pF; zatem ładunek zebrany na nim przez dotknięcie do bieguna multiplikatora napięcia o potencjale 8000 V jest rzędu wielkości 10^{-12} F·8000 V, czyli około 10^{-8} C. Jest on niezwykle mały, jeśli porównamy go z ładunkiem kondensatora blokowego (por. § 2.6), a w porównaniu z ładunkiem, jaki przepływa w ciągu kilku sekund przez żarówkę elektryczną (1 C), jest on sto milionów razy mniejszy! Przepływ tak małego ładunku można jednak z łatwością stwierdzić za pomocą lampki neonowej (§ 2.3). Należy tylko rozładować elektroskop poprzez lampkę neonową (i ciało obserwatora), jak wskazuje rys. 2.42. Lampka słabo rozbłyśnie, co dowodzi, że rzeczywiście ładunek przepłynął.

Podobnie jak pręcik elektroskopu możemy naładować każdy przewodnik odizolowany od ziemi, np. kulę metalową na nóżce izolacyjnej (patrz rys. 2.54, § 2.24).

***§ 2.16. Ładunek swobodny i związany.** Nie należy sobie wyobrażać, że owo spływanie ładunku elektrycznego z naelektryzowanego przewodnika do ziemi zawsze może mieć miejsce. *Ładunek elektryczny spływa z przewodnika do ziemi tylko wtedy, jeśli owo spłynięcie jest rozładowaniem kondensatora przewodnik-ziemia.* O ładunku takim mówimy wówczas, że jest *„swobodny"*. W następującym doświadczeniu przekonamy się, że ładunek zebrany na płytce kondensatora blokowego nie jest swobodny.

Rys. 2.43. Ładunki „związane" na płytkach kondensatora nie uciekają do ziemi

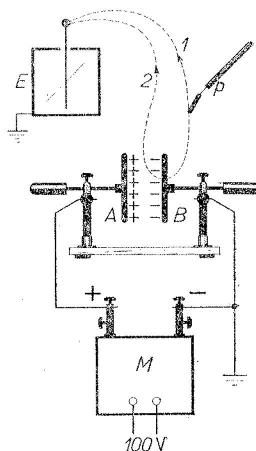


Naładujmy kondensator blokowy do napięcia około 200 V. Połączmy z ziemią jeden z jego biegunów (rys. 2.43a), a potem drugi (rys. 2.43b). Mogłoby się wydawać, że płytki kondensatora rozbroiły się kolejno podczas obu manipulacji, tak jak to miało miejsce przy dotknięciu ręką elektroskopu. Otóż nie; kondensator jest ciągle naładowany i możemy go teraz rozładować otrzymując wcale nie osłabioną iskrę (rys. 2.43c). Widzimy z tego doświadczenia, że ładunki elektryczne, mimo że utorowaliśmy im drogę do ziemi, pozostały na płytkach. Mówimy, że ładunki te są *„związane"*. Przypuszczamy, że wiążą je siły wzajemnego przyciągania, te same, które działają na płytki naładowane ładunkami o przeciwnych znakach (§ 2.9). Rozumieć to należy w ten sposób, że ładunki dodatnie jednej płytki i ładunki ujemne drugiej płytki przyciągają się wzajemnie. Piękne dowody istnienia tych sił znajdziemy w paragrafie następnym oraz w § 2.24.

***§ 2.17. Rozkład ładunku na płytkach kondensatora.** Aby wytłumaczyć istnienie ładunku związanego na płytkach kondensatora, przypuściliśmy, że ładunki różnoimienne przyciągają się wzajemnie. Ale skutek tego przyciągania powinien być taki, że ładunki

przysuną się względem siebie tak blisko, jak im na to pozwolą granice ciała przewodzącego (płytek kondensatora). O słuszności tego wniosku przekona nas poniższe doświadczenie.

Kondensator płytkowy dołączmy do biegunów multiplikatora napięcia (rys. 2.44). Jedną z płytek kondensatora, np. płytkę B, uziemiamy, wskutek czego pozostaną na niej tylko ładunki związane. Weźmy małą płytkę metalową p, osadzoną na pręciku izolacyjnym (jest to tzw. płytka próbna) i wzdłuż drogi „*1*" przenieśmy na niej ładunek elektryczny z zewnętrznej powierzchni płyty B na pręcik elektroskopu. Żeby otrzymać silniejsze wychylenie, powtórzmy to kilka razy. Ale wychylenie jest jednak zupełnie niedostrzegalne. To samo powtórzmy przenosząc ładunek z wewnętrznej powierzchni okładki B, jak wskazuje droga „*2*". Otrzymamy wychylenie bardzo silne. Doświadczenie ma ten sam przebieg, jeśli płytka B jest dodatnia, a płytka A — ujemna. Przekonaliśmy się więc, że ładunek elektryczny związany gromadzi się tylko na wewnętrznej powierzchni płytki kondensatora, tzn. możliwie najbliżej ładunku o przeciwnym znaku.

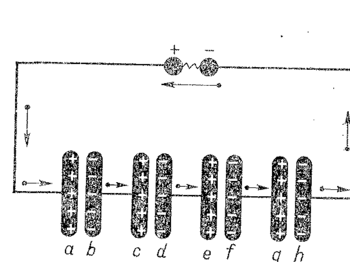


Rys. 2.44. Doświadczenie przekonywające, że ładunki zbierają się tylko na wewnętrznych powierzchniach płytek kondensatora

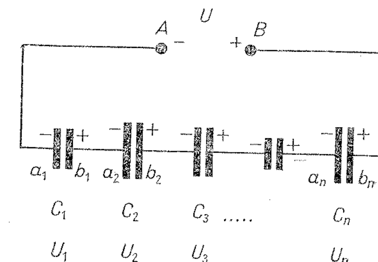
Podobne doświadczenie, wykonane z płytką A, przekona nas, że płytka ta oprócz ładunku związanego ma również pewien — chociaż słaby — ładunek swobodny, który wykryć można również na zewnętrznej powierzchni tej płytki. Nietrudno się przekonać przy pomocy takich doświadczeń, że ładunek swobodny płytki A stanowi tym mniejszą część jej ładunku całkowitego, im płytki A i B są bliżej siebie.

***§ 2.18. Łączenie kondensatorów w baterie.** a) Bateria szeregowa. Po ostatnich dwóch doświadczeniach możemy lepiej zrozumieć proces rozładowania baterii kondensatorów, jaką zawiera np. multiplikator napięcia. Gdy wszystkie kondensatory są naładowane, ładunki dodatnie i ujemne są zebrane odpowiednio na swych okładkach, jak wskazuje rys. 2.45. Podczas rozbrojenia ładunek ujemny h zobojętnia się z ładunkiem dodatnim a, gdyż elektrony h przebiegają przez drogę iskrową; elektrony b nie są już przyciągane („związane") przez ładunek dodatni a, zobojętniają się więc z ładunkiem dodatnim c; na skutek tego elektrony d, jako już nie związane, zobojętniają się z ładunkiem dodatnim e; wreszcie elektrony f — z ładunkiem dodatnim g.

Niech będzie bateria szeregowa kondensatorów o dowolnej pojemności: C_1, C_2, C_3, ... itd. (rys. 2.46). Baterię taką można naładować również w ten sposób, że zaciski jej A i B dołącza się do źródła prądu, np. o napięciu U. Przypomnijmy sobie, że doświadczenie z rys. 2.7 uczy: naładowanie kondensatora polega na *wpłynięciu* ładunku ujemnego na jedną płytę, a *odpłynięciu* takiego samego ładunku ujemnego z drugiej płyty. W naszym wypadku na płytę a_1 wpływa ładunek ujemny, np. e; ale taki sam ładunek e odpływa z płyty b_1 na a_2 itd., tak że każdy kondensator naładowany zostaje ładunkiem e. Napięcia poszczególnych kondensatorów są wtedy [patrz wzór (2.2)]:



Rys. 2.45. „Mechanizm" rozładowania baterii szeregowej kondensatorów. Strzałki pokazują ruch elektronów w chwili rozładowania



Rys. 2.46. Szeregowa bateria kondensatorów

$$U_1 = e\cdot\frac{1}{C_1},$$

$$U_2 = e\cdot\frac{1}{C_2},$$

$$U_n = e\cdot\frac{1}{C_n}.$$

Suma tych napięć daje U; zatem

$$U = e\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\dots+\frac{1}{C_n}\right).$$

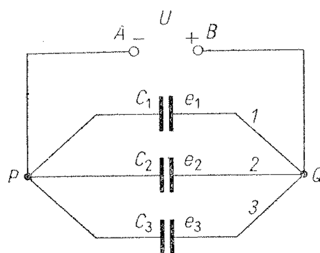
Z tego wzoru widzimy, że cała bateria ładuje się tak, jak gdyby była zwykłym, pojedynczym kondensatorem o pojemności C, przy czym, ponieważ $U = e\cdot\frac{1}{C}$,

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\dots+\frac{1}{C_n}. \tag{2.6}$$

Odwrotność pojemności baterii kondensatorów połączonych szeregowo równa się sumie odwrotności pojemności poszczególnych kondensatorów. Jeśli wszystkie kondensatory mają te same pojemności $C_1 = C_2 = \dots = C_n$, to wzór (2.6) daje

$$C = \frac{1}{n}C_1. \tag{2.6a}$$

b) Bateria równoległa. Kondensatory o pojemności C_1, C_2, ... C_n łączymy w baterię równoległą, jak wskazuje rys. 2.47. Podczas ładowania tej baterii w przewodnikach *1*, *2* itd. płyną prądy, których suma natężeń równa jest (w każdej chwili) natężeniu prądu w przewodniku głównym, czyli doprowadzającym (*AP* lub *BQ*) (patrz I prawo Kirchhoffa, § 1.33). Stąd wnioskujemy, że ładunek *e* zebrany w całej baterii równa się sumie ładunków zebranych w poszczególnych kondensatorach:



Rys. 2.47. Równoległa bateria kondensatorów

$$e = e_1 + e_2 + \dots + e_n. \tag{2.7}$$

Na każdym kondensatorze panuje teraz to samo napięcie *U* źródła prądu. Wobec tego ładunki tych kondensatorów są następujące [por. wzór (2.2)]

$$e_1 = UC_1,$$
$$e_2 = UC_2,$$
$$\dots$$
$$e_n = UC_n.$$

Po dodaniu otrzymujemy

$$e = U(C_1 + C_2 + \dots + C_n).$$

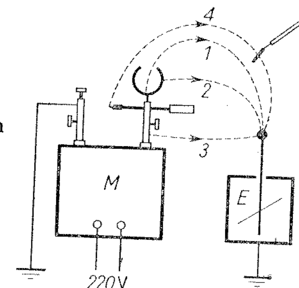
Jeśli pojemność całej baterii oznaczymy literą *C*, to ze związku $e = UC$ otrzymujemy

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n. \tag{2.8}$$

Pojemność baterii kondensatorów połączonych równolegle równa jest sumie pojemności poszczególnych kondensatorów.

*§ **2.19. Rozkład ładunku na przewodniku.** W § 2.17 rozpatrzyliśmy rozkład ładunku na płytach kondensatora. Doświadczeniem tym potwierdziliśmy nasze przypuszczenie o „wiązaniu" się (przyciąganiu się) ładunków różnoimiennych. Wskutek tego przyciągania się rozkład ładunku na płycie był bardzo niejednolity. Obecnie przekonamy się, jaki jest rozkład ładunku na dowolnym przewodniku naładowanym. Niech tym przewodnikiem będzie np. kula wydrążona oraz pręt zaostrzony, osadzone razem na jednym biegunie multiplikatora napięcia (rys. 2.48). Płytką próbną pobierzmy z różnych miejsc powierzchni naszego przewodnika ładunki elektryczne i przenieśmy je na pręcik elektrometru. Wskazują to drogi kropkowane *1*, *2*, *3* i *4*.

Gdy przenosimy płytkę próbną wzdłuż drogi *1* z wnętrza kuli, elektrometr wcale się nie wychyla. Natomiast wychyla się, gdy pobieramy ładunek z powierzchni zewnętrznej kuli (droga *2*). Jeszcze silniej wychyla się, gdy ładunek przenosimy z powierzchni kolumny (droga *3*), a najsilniej — gdy ładunek pobieramy z ostrza (droga *4*).



Rys. 2.48. Badanie rozkładu ładunku na przewodniku złożonym z wydrążonej kuli, ostrza i kolumny

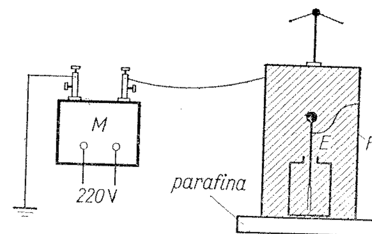
Z tego doświadczenia wypływają następujące wnioski:

a) Wewnątrz przewodników naelektryzowanych nie ma ładunku elektrycznego; gromadzi się on tylko na zewnętrznej powierzchni przewodnika.

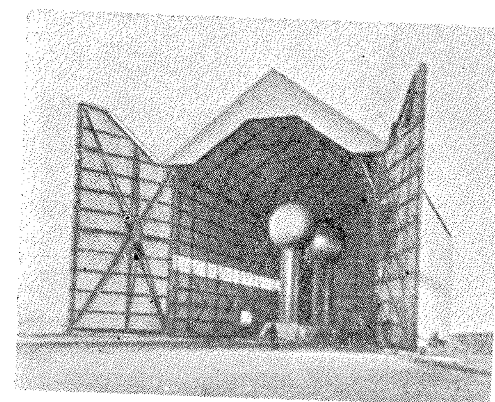
b) Ładunek elektryczny gromadzi się w większej ilości na tych częściach powierzchni przewodnika, które mają większą krzywiznę.

c) Najwięcej ładunku elektrycznego gromadzi się na kolcach.

*§ **2.20. Osłona elektryczna (ekran).** Własność a) znalazła w praktyce liczne zastosowania jako tzw. osłona elektryczna. Ciała znajdujące się w osłonie metalowej są wolne od ładunku elektrycznego, pomimo że całość znajdować się może na bardzo wysokim potencjale. Ilustruje to np. doświadczenie przedstawione na rys. 2.49, gdzie rolę osłony spełnia siatka metalowa. Osłonę taką często nazywają „klatką Faradaya", ponieważ Faraday (słynny fizyk angielski, żyjący w ubiegłym stuleciu) był pierwszym, który osłonę taką w postaci wielkiej klatki wybudował. Sam nawet do niej wszedł z elektroskopem



Rys. 2.49. Działanie osłony elektrycznej

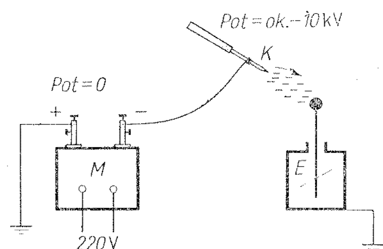


Rys. 2.50. Generator wysokiego napięcia (10 MV) van de Graaffa

w ręku i mimo że klatka została silnie naładowana, Faradayowi nic się nie stało, a nawet listki elektroskopu nie rozchyliły się. Fakt nierozchylania się listków elektroskopu wewnątrz osłony dowodzi, że ciała umieszczone wewnątrz osłony i z nią połączone są nienaładowane. Dzięki tej właściwości osłony elektryczne mają duże zastosowania praktyczne w technice wysokich napięć. Rysunek 2.50 przedstawia generator bardzo wysokiego napięcia, którego części konstrukcyjne znadujące się wewnątrz dwóch wielkich kul metalowych wolne są od ładunków mogących wywołać niepożądane konsekwencje (patrz § 2.21).

Dzięki właściwości ładunków gromadzenia się na powierzchni przewodnika kula wydrążona znajduje ciekawe zastosowanie. Jeśli mianowicie ładunek płytki wprowadzimy do kuli wydrążonej i dotkniemy płytką wnętrza kuli, to ładunek całkowicie zniknie z wnętrza kuli i rozejdzie się po jej zewnętrznej powierzchni. Jest to bardzo prosty sposób całkowitego oddania ładunku elektrycznego innemu przewodnikowi. Dlatego właśnie elektrometr, jakiego używamy, ma kulę wydrążoną (patrz rys. 2.27), zwaną ze względów historycznych „wiaderkiem Faradaya". W doświadczeniach wyobrażonych na rys. 2.44 i 2.48 można używać wiaderka Faradaya, chociaż do doświadczeń jakościowych nie jest to konieczne; konieczne jest natomiast przy doświadczeniach ilościowych.

*§ **2.21. Działanie kolca.** Gromadzenie się wielkiego ładunku na kolcach powoduje pewne wtórne, bardzo interesujące zjawisko. Ukazuje nam je doświadczenie wyobrażone na rys. 2.51. Kolec *K*, któremu za pomocą multiplikatora napięcia dajemy potencjał



Rys. 2.51. Ładunek elektryczny wypływa z kolca i ładuje elektrometr

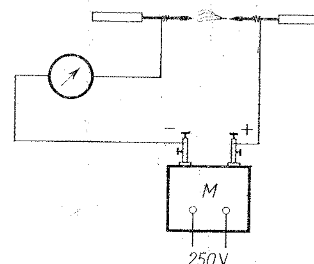
kilku kV (dodatni lub ujemny), zbliżamy do kuli elektrometru; wystarczy na odległość kilkunastu centymetrów. Wskazówka elektrometru wychyla się silnie i pozostaje stale wychylona. Elektrometr naładował się (na rysunku — ładunkiem ujemnym; sprawdzić doświadczalnie przenosząc płytką próbną ładunek z ujemnego bieguna multiplikatora). Wniosek: z kolca wypływa ładunek elektryczny w powietrze. Temu „wypływowi elektrycznemu" towarzyszy ruch naelektryzowanego powietrza, które odpychane jest przez kolec, wytwarza więc swego rodzaju „wiatr", który może np. pochylić płomień świecy (doświadczenie!). Wypływowi towarzyszy również syczenie oraz charakterystyczne świecenie, o czym lepiej można się przekonać przy pomocy nastepującego doświadczenia.

Multiplikator napięcia zaopatrzony w elektrody zaostrzone (patrz rys. 2.34) i zasilany z baterii o napięciu 200—300 V obserwujemy w ciemności. Przy większej odległości elektrod widzimy wyładowania „miotełkowe": z dodatniego kolca wychodzi duża miotełka świecąca, na ujemnym zaś widać miotełkę małą lub niekiedy gwiazdkę świecącą.

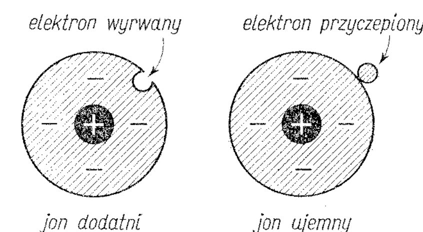
Przy mniejszej odległości elektrod obserwujemy silną iskrę. Wypływ ładunku elektrycznego wraz z towarzyszącym mu wyładowaniem miotełkowym odbywa się ze wszystkich zaostrzonych części przewodników mających dostatecznie wysoki potencjał. W urządzeniach wysokiego napięcia stanowi to objaw niepożądany. Dlatego w tego rodzaju urządzeniach unika się stosowania przewodników z ostrymi brzegami i kantami. Stosuje się przewodniki gładkie i zaokrąglone, a aparaty i urządzenia znadujące się na wysokim potencjale umieszcza się wewnątrz gładkich osłon o możliwie małej krzywiźnie.

*§ **2.22. Wyładowania miotełkowe i iskrowe jako ruch jonów.** Prąd w przewodniku metalowym wyobrażamy sobie jako ruch elektronów. Spróbujmy wytworzyć sobie „mechanizm" elektronowy wyładowań miotełkowych czy iskrowych.

Powietrze na ogół jest dobrym izolatorem. Niemniej w pewnych warunkach może się stać przewodnikiem. Na przykład pod wpływem bardzo wysokiego napięcia między elektrodami w powietrzu przeskakuje iskra, która jest przecież objawem prądu elektrycznego. Przekonuje nas o tym doświadczenie przedstawione na rys. 2.52: miliamperomierz umieszczony na płytce izolacyjnej pokazuje prąd wywołujący wyładowania miotełkowe lub iskrę. Skoro powietrze staje się przewodnikiem, oznacza to, że drobiny gazu przenoszą ładunki elektryczne: a więc, że je mają. *Drobiny gazu mające ładunek elektryczny nazywamy jonami.* Jak sobie wyobrażamy jon?



Rys. 2.52. Istotę wyładowań miotełkowych i iskrowych stanowi prąd elektryczny płynący przez powietrze między elektrodami. Miliamperomierz wskazuje jego natężenie



Rys. 2.53. Uproszczony obraz jonów w powiększeniu 100 milionowym

Fizyka dzisiejsza prowadzi nas do wniosku, że obojętne drobiny materii składają się z równych ilości elektryczności dodatniej i ujemnej. Jeżeli jeden lub kilka elektronów oderwie się od drobiny, utworzy się jon dodatni. Jeżeli natomiast do drobiny obojętnej przyłączy się nowy „nadliczbowy" elektron, to otrzymamy jon ujemny. Wyobraża to poglądowo rys. 2.53.

Mechanizm wyładowań iskrowych jest więc w dużym uproszczeniu taki: z ujemnego kolca wypływają elektrony, które natychmiast ładują drobiny powietrza wytwarzając jony ujemne. Dodatni kolec natomiast odbiera elektrony drobinom powietrza z najbliższego otoczenia i wytwarza jony dodatnie. Jony ujemne przebiegają do bieguna dodatniego, a dodatnie — do ujemnego. Zjawisko to trwa tak długo, aż bateria rozładuje się do tak niskiego napięcia, które nie może już wytwarzać jonów. Przy dostatecznie

silnym napięciu (lub małej odległości biegunów) zjawisko przebiega gwałtownie. Powstaje iskra, której czas trwania jest rzędu mikrosekund. Prąd, który przepływa w tak krótkim czasie, jest bardzo silny. Ciepło wydzielone ogrzewa powietrze, które się gwałtownie rozszerza — stąd trzask lub huk.

Żeby sobie zdać sprawę z natężenia prądu elektrycznego przepływającego podczas uderzenia iskry, zważmy, że ładunek elektryczny, jaki przepływa np. podczas rozbrojenia baterii kondensatorów multiplikatora, wynosi około 0,0002 C. Ponieważ czas jego przepływu jest zaledwie rzędu 10^{-6} s, przeto średnie natężenie prądu w tak krótkim czasie jest olbrzymie, wynosi bowiem $\frac{0{,}0002}{10^{-6}}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}$, czyli około 200 A! Tak silny prąd ogrzewa nagle powietrze, wskutek czego powstaje silna fala zgęszczenia objawiająca się trzaskiem lub hukiem.

Zagadnienie: Dlaczego miliamperomierz w ostatnim doświadczeniu nie przepalił się? Dlaczego wychylenie wskazówki było tak małe?

Jonizacja powietrza jest bardzo utrudniona, jeśli zamiast elektrod zaostrzonych (które dają wypływy) użyjemy elektrod kulkowych. Objawia się to tym, że długość iskry, która między ostrzami pod napięciem 10 000 V wynosi około 11 mm, między kulkami wynosi niespełna 3 mm. (Doświadczenie).

Z długości iskry między ostrzami, lub lepiej między kulkami, można w przybliżeniu określić napięcie. Dla orientacji niech służy kilka liczb zebranych w poniższej tablicy.

Tablica 2.2

Długości iskry (w mm)

Napięcie (kV)	Między kolcami (mm)	Między kulkami o średnicy 2,5 cm (mm)
5	4	1,3
10	11	2,7
20	18	5,8
30	27	9,5
40	38	14
50	52	20

Z tablicy tej widzimy, że długość iskry między kolcami jest znacznie większa aniżeli między kulkami; wynosi ona mniej więcej około 1 milimetra na każdy tysiąc woltów. Należy jednak dodać, że dla wyższych napięć (rzędu 100 kV i więcej) długość iskry staje się nieproporcjonalnie wielka.

Olbrzymią iskrą elektryczną jest błyskawica przeskakująca pomiędzy chmurami podczas burzy. Chmury mają bowiem stale ładunki elektryczne: jedne dodatnie, drugie ujemne. Przez błyskawicę ładunki te zobojętniają się. Przeważnie jednak chmury mają przewagę ładunków dodatnich, wobec tego tworzą razem z ziemią rodzaj wielkiego naładowanego kondensatora: przy tym ziemia stanowi jego „okładkę" ujemnie naelektryzowaną. Napięcie między tymi „okładkami" jest ogromne: może dochodzić do 1000 milionów woltów. Iskra, która między nimi przebija — to piorun. Natężenie prądu pioruna wynosi dziesiątki tysięcy amperów, a niekiedy może nawet przekroczyć 1000 000 amperów.

Obserwując wyładowania miotełkowe z ostrej elektrody zauważyliśmy, że niekiedy wyładowania miotełkowe poprzedzają iskrę, a niekiedy na wyładowaniach miotełkowych zjawisko się kończy. Kondensator bowiem rozbraja się częściowo przez wypływ elektronów z jednego kolca, a wpływ — do drugiego i iskra już przebić nie może. Na tym polega działanie ochronne odgromnika, czyli piorunochronu. Jest to zaostrzony pręt, umieszczony wysoko na dachu budynku i połączony drutem z ziemią. Z ostrza piorunochronu wypływają elektrony, wskutek czego „kondensator" ziemski stopniowo się rozładowuje, co zmniejsza niebezpieczeństwo uderzenia piorunu. Nowsze badania jednak uczą, że rozbrajanie chmury przez kolec odgromnika jest stosunkowo bardzo powolne i często nie zapobiega uderzeniu piorunu. Dlatego nowoczesne instalacje piorunochronne obliczone są nie tyle na rozbrojenie chmur, ile na odprowadzenie piorunu do ziemi. W tym też celu wszystkie metalowe części dachu i rynny powinny być uziemione grubymi, możliwie krótkimi linkami metalowymi (por. zagadnienia 4.53 i 4.54 na końcu rozdziału 4).

*§ **2.23. Właściwości dielektryków.** a) Zdolność zwiększania pojemności kondensatora. Tę właściwość dielektryków omówiliśmy już w § 2.11. Polega ona na tym, że dielektryk umieszczony w polu kondensatora zawsze zwiększa jego pojemność. Właściwość ta została wykryta i zbadana przez Faradaya w r. 1838. Zdolność tę charakteryzuje liczba zwana stałą dielektryczną (por. tablicę w § 2.11).

b) Wytrzymałość na przebicie. Jeżeli między kulkowe elektrody multiplikatora wstawimy cienką płytę dielektryczną (papierową, szklaną, bakelitową), to iskra między elektrodami przestanie przeskakiwać. Zbliżmy jednak elektrody tak, aby dotykały obu powierzchni płyty. Jeśli płyta jest dostatecznie cienka, powstanie iskra, która przebije płytę dziurawiąc ją. Zauważymy, że iskra, której długość w powietrzu wynosiła kilka milimetrów, w dielektryku może mieć zaledwie długość ułamka milimetra. Ta właściwość izolatorów nazywa się „wytrzymałością na przebicie". Miarą wytrzymałości na przebicie jest stosunek napięcia wywołującego przebicie iskry w danym dielektryku do odległości elektrod.

Dla przykładu podamy, jaką wytrzymałość na przebicie ma olej transformatorowy. Między dość dużymi kulami, pod napięciem 200 000 V, przeskakuje w powietrzu iskra o długości około 10 cm. Jeśli kule te zanurzymy w oleju transformatorowym, to długość iskry wyniesie zaledwie 1 cm, zresztą zależnie od gatunku, czystości i wilgotności oleju. Zatem jego wytrzymałość na przebicie wyrazić można, w przybliżeniu liczbą 200 000 V/cm.

Różne dielektryki mają różne wytrzymałości na przebicie. Właściwość ta odgrywa wielką rolę w konstrukcji kondensatorów, transformatorów itp., gdzie zależy na uniknięciu iskrzenia pomiędzy przewodnikami, między którymi panuje wysokie napięcie.

c) Przewodnictwo. Jeżeli kulę naelektryzowanego elektrometru połączymy przewodnikiem z ziemią, to wskazówka elektrometru momentalnie opadnie. Jeżeli jednak połączenie z ziemią wykonamy za pomocą kawałka izolatora, to zauważymy, że wskazówka opada również, ale powoli.

Im wolniej opada wskazówka, tym lepszy jest izolator, tym większy ma opór, czyli tym mniejsze przewodnictwo. Z łatwością stwierdzimy, że nylon, polietylen, polistyren,

teflon, plexiglas, ebonit, parafina są świetnymi izolatorami, szkło gorszym, a bakelit (bardzo rozpowszechniony w elektrotechnice) jeszcze gorszym.

Przez „przewodnictwo właściwe" rozumiemy odwrotność oporu właściwego $\frac{1}{\varrho}$. Im lepszy izolator, tym jego przewodnictwo właściwe jest mniejsze (ϱ większe). Patrz tabl. 1 w § 1.22.

d) Elektryzowanie się przez zetknięcie. Na płytkę szklaną kładziemy płytkę ebonitową i zgniatamy je silnie. Po rozłączeniu sprawdzamy elektrometrem, że obie płytki są naelektryzowane: ebonitowa — ujemnie, szklana — dodatnio. Poznaliśmy nową, zadziwiającą właściwość izolatorów — elektryzowania się przez zetknięcie. Tę właściwość mają wszystkie izolatory, a nawet przewodniki; warunek jednak jest taki, aby stykały się ciała różne.

Szczególnie łatwo udaje się to doświadczenie z takimi parami izolatorów, jak: nylon (—) i wełna (+), szkło (+) i jedwab (—), ebonit (—) i sukno (+) itp. W tych przypadkach zetknięcie najłatwiej uzyskuje się przez wzajemne pocieranie: szkło o jedwab, ebonit o sukno lub o futro itp. Podkreślić jednak należy, że pocieranie nie jest tu istotne, jedynie ułatwia zetknięcie. „Elektryzowanie przez tarcie" jest więc w istocie elektryzowaniem przez zetknięcie.

Mechanizm elektryzowania przez zetknięcie nie jest dotychczas dokładnie poznany. Możemy powiedzieć tylko tyle, że elektrony z powierzchni granicznej jednego ciała przechodzą podczas zetknięcia na powierzchnię drugiego ciała. W ten sposób oba ciała elektryzują się różnoimiennie.

Zjawisko „elektryzowania się przez tarcie" było podobno pierwszym zjawiskiem elektrycznym wywołanym przez ludzi w starożytności (VI wiek p.n.e.). Do wykrycia stanu naelektryzowania służył oczywiście nie elektrometr, lecz fakt, że potarty bursztyn (po grecku: *elektron*) przyciągał drobne, lekkie ciała. Dopiero w XVI stuleciu zjawisko to począł badać lekarz angielski Gilbert. On to tę tajemniczą „siłę" nazwał elektrycznością.

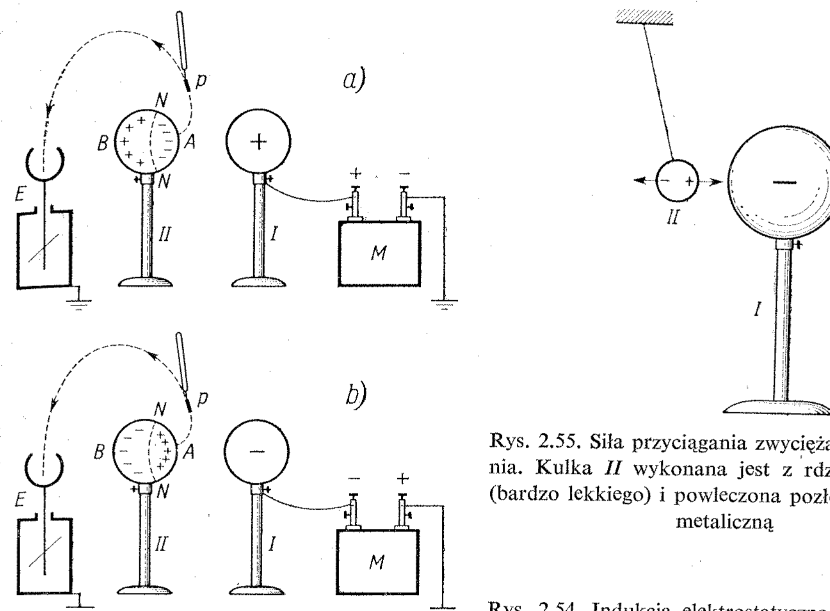
B. O polu elektrycznym: indukcja elektrostatyczna

***§ 2.24. Pole elektryczne wywołuje indukcję.** Kulę metalową *I* osadzoną na nóżce izolacyjnej łączymy z nie uziemionym biegunem multiplikatora napięcia, np. z dodatnim (rys. 2.54a). Kula naładowana jest więc ładunkiem dodatnim do potencjału danego bieguna. W odległości kilku centymetrów od kuli *I* ustawmy kulę *II* poprzednio nie naelektryzowaną. Podejrzewając, że elektrony kuli *II* mogły się pod wpływem ładunku kuli *I* przesunąć, wykonajmy następujące doświadczenia:

a) Z miejsca *A* powierzchni kuli *II* zbliżonego do kuli *I* przenosimy płytką próbną *p* ładunek tam zebrany na pręcik elektroskopu (lub elektrometru) *E*, którego osłona jest uziemiona. Elektrometr wskazuje wychylenie. Żeby otrzymać większe wychylenie, powtarzamy tę czynność kilka razy. Stwierdzamy, że ładunek przenoszony z *A* jest ujemny, a to w następujący sposób: płytką *p* przenosimy na próbę nieco ładunku + z kuli *I* — wskazówka elektrometru opada.

b) Podobne doświadczenie powtarzamy przenosząc ładunek z miejsca *B*, oddalonego od kuli *I*. Stwierdzamy, że przeniesiony ładunek jest dodatni (ponieważ ładunek kuli *I* pobrany na próbę i przeniesiony na elektrometr powiększa jego wychylenie).

c) Powtarzamy raz jeszcze doświadczenie pobierając ładunek z miejsca *N*. Lecz tym razem istnienia ładunku nie stwierdzamy. Powiadamy, że *N* należy do „strefy neutralnej".



Rys. 2.55. Siła przyciągania zwycięża siłę odpychania. Kulka *II* wykonana jest z rdzenia bzowego (bardzo lekkiego) i powleczona pozłotką lub farbą metaliczną

Rys. 2.54. Indukcja elektrostatyczna

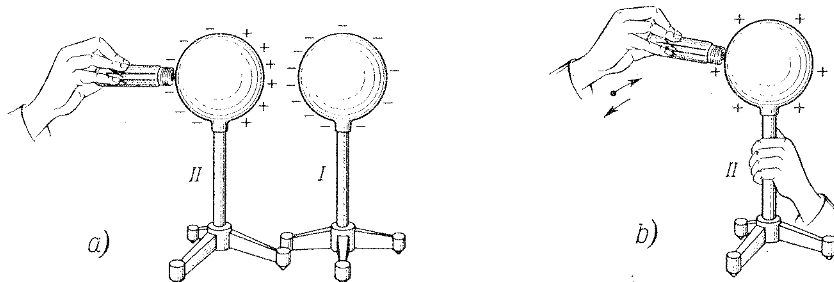
Wniosek: Pod wpływem ładunku + kuli *I* elektrony w kuli *II* przesunęły się w kierunku kuli *I*. Wskutek tego w *A* wytworzył się nadmiar elektronów, czyli zebrał się ładunek ujemny, a w *B* pozostał niedomiar elektronów, czyli wytworzył się ładunek dodatni. Między nimi wytworzyła się „strefa neutralna" bez ładunku. Analogicznie odbywa się zjawisko, gdy kula *I* ma ładunek ujemny (patrz rys. 2.54b).

Zjawisko powyższe nosi nazwę *indukcji elektrostatycznej*. Ładunek kuli *I* nazywamy ładunkiem *indukującym*, ładunek w *A* — ładunkiem *indukowanym związanym*. Ta ostatnia nazwa oznacza, jak już wspominaliśmy, że ładunek wiążą siły przyciągania. Siły te z powodu mniejszej odległości są większe od sił odpychania między ładunkami jednoimiennymi, dlatego siły przyciągania zwyciężają. Poucza nas o tym doświadczenie wyobrażone na rys. 2.55, w którym kula *II* nie naelektryzowana trwale jest lekka i zawieszona na nici jedwabnej: kula *II* przyciągana jest przez kulę *I*. Podobnie tłumaczy się przyciąganie skrawków papieru przez ciało naelektryzowane.

Jak widzimy, przewodnik naelektryzowany ma tę właściwość, że w otaczających ciałach wywołuje zjawisko indukcji, czyli „przesunięcia", co pociąga za sobą wystąpienie sił działających na ciało. Ze względu na tę właściwość przestrzeń otaczającą ładunek elektryczny nazywamy *polem elektrycznym*. Pole elektryczne dookoła ładunku rozciąga

się w wolnej przestrzeni nieograniczenie. Jednak w wielkich odległościach od ładunku działanie jego, a więc indukcja i siły mogą być tak słabe, że stwierdzenie istnienia pola staje się niemożliwe.

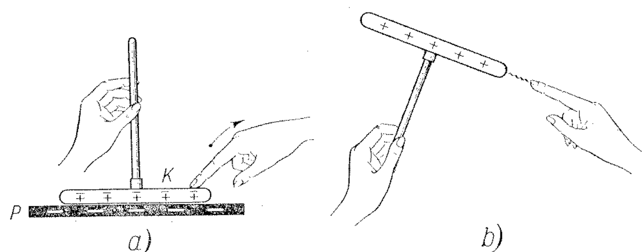
*§ **2.25. Trwałe naelektryzowanie przez indukcję.** Spójrzmy na rys. 2.54b. Żeby kulę *II* trwale naelektryzować, należałoby usunąć ładunek zebrany w *B*. Bardzo łatwo to zrobić, gdyż ładunek ten nie jest związany, lecz przeciwnie, swobodny, podobnie jak ładunek kuli *I*. Dotknijmy kulę *II* palcem (w dowolnym miejscu!), a ładunek swobodny spłynie do ziemi. Że tak istotnie jest, przekona nas naocznie lampka neonowa. Należy tylko kulę *II* dotknąć nie bezpośrednio palcem, lecz lampką neonową: lampka rozbłyśnie (rys. 2.56a).



Rys. 2.56. a) Ładunek swobodny odpływa przez lampkę neonową do ziemi. Pozostaje ładunek związany. b) Ładunek związany po oddaleniu kuli *I* staje się swobodny i „spływa" przez lampkę neonową do ziemi. Strzałka zwykła pokazuje kierunek „prądu", który jest przeciwny rzeczywistemu kierunkowi elektronów

Po takim dotknięciu na kuli *II* zostanie ładunek związany. Oddalmy jednak kulę *I*, a ładunek związany stanie się nagle swobodny. Kula *II* została więc trwale naelektryzowana. Ponowne dotknięcie tej kuli palcem, po oddaleniu kuli *I*, rozbroi kulę *II*. Fakt ten ujawnia znów lampka neonowa, jak wskazuje rys. 2.56b.

*§ **2.26. Elektrofor.** Jest to przyrząd, w którym zjawisko indukcji zostało zastosowane do łatwego i szybkiego wytwarzania ładunków elektrycznych. Płytkę ebonitową *P* elektryzujemy przez natrzepanie suknem lub futrem. Kładziemy na nią krążek metalowy

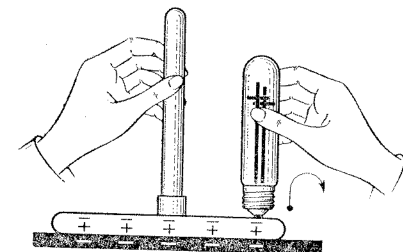


Rys. 2.57. Działanie elektroforu: a) ładowanie, b) rozbrojenie

K trzymany za izolacyjną rączkę (rys. 2.57a). W krążku następuje przesunięcie elektronów, tak że na jego obu powierzchniach pojawiają się dwa rodzaje ładunków: związany i swobodny. Dotykając palcem krążka odprowadzamy ładunek swobodny (ujemny), wskutek

czego na dolnej powierzchni krążka pozostanie ładunek dodatni (niedomiar elektronów). Po zdjęciu krążka z płyty ebonitowej ładunek dodatni staje się swobodny (rys. 2.57b). Zbliżając teraz palec otrzymamy iskrę, będącą objawem „spłynięcia" ładunku dodatniego do ziemi.

Uwaga: Co to znaczy: „rozbroić ciało ujemnie naelektryzowane?" — To znaczy odprowadzić nadmiar elektronów z tego ciała do ziemi. A co to znaczy: „rozbroić ciało dodatnio naelektryzowane"? — To znów oznacza doprowadzenie elektronów z ziemi do ciała aż do wyrównania niedomiaru, jaki był na początku. Kierunek ruchu elektronów zaznaczony jest strzałką z punktem na rys. 2.56b. Ale kierunek „prądu" (według umowy, patrz § 1.3) jest przeciwny: prowadzi od ciała naładowanego dodatnio do ziemi. Widzimy więc, że kierunek „prądu" można uważać za kierunek ładunków dodatnich, gdyby te były w metalach ruchome. Fizycy wyrażają się w ten sposób, jak gdyby i ładunki dodatnie mogły się w metalach poruszać. Mówią więc, że ładunki dodatnie „płyną", „uciekają", że są „związane" lub „swobodne". I my zaakceptujemy ten sposób wyrażania się, pamiętając, co się pod nim kryje.



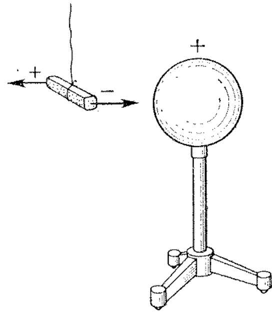
Rys. 2.58. Lampka neonowa ujawnia ucieczkę ładunku swobodnego (ujemnego) do ziemi

Tajemniczo może tutaj wygląda rola owego dotknięcia krążka palcem, ponieważ przy tym domniemanym odprowadzeniu ładunku swobodnego nie widać iskry. Lecz znów możemy przekonać się naocznie przy pomocy lampki neonowej, że rzeczywiście podczas tego dotknięcia przepływa prąd elektryczny. Należy tylko płytkę zamiast palcem, dotknąć lampką neonową, jak wskazuje rys. 2.58. Lampka rozbłyśnie.

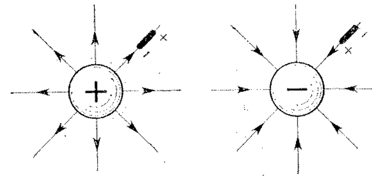
*§ **2.27. Linie sił pola elektrycznego.** W polu jakiegokolwiek przewodnika naładowanego umieśćmy małe, lekkie ciałko o podłużnym kształcie, zawieszone na jedwabnej nici (rys. 2.59). Do tego celu nadaje się doskonale podłużny skrawek korka (może być powleczony cynfolią). Wskutek indukcji na obu końcach ciałka pojawiają się różnoimienne ładunki elektryczne. Ciałko ma więc dwa bieguny indukowane: dodatni i ujemny. Nazywać je będziemy *dipolem indukowanym*. Biegun bardziej zbliżony do ładunku indukującego jest przyciągany; biegun przeciwny jest natomiast odpychany. Jak widać z rysunku, na dipol nasz działa więc moment skręcający, wskutek czego dipol, wykonawszy parę wahnięć, zajmie położenie równoległe do sił działających. Podłużną swoją osią pokazuje on kierunek sił w polu elektrycznym. Posuwając dipol w polu elektrycznym, wzdłuż jego osi, posuwamy go po linii, wzdłuż której działają siły pola. Te linie nazywamy *liniami sił*.

Stwierdzamy przy pomocy powyższego doświadczenia, że linie sił w polu kuli naelektryzowanej są to linie rozchodzące się promienisto (rys. 2.60).

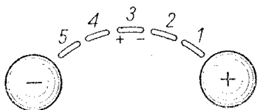
Liniom sił pola elektrycznego, podobnie jak liniom sił pola magnetycznego, nadajemy kierunek przyjęty według umowy. Umawiamy się, że kierunkiem (dodatnim) linii sił



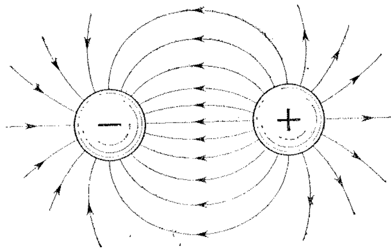
Rys. 2.59. Skrawek korka w roli dipola indukowanego; ustawia się on w kierunku sił działających



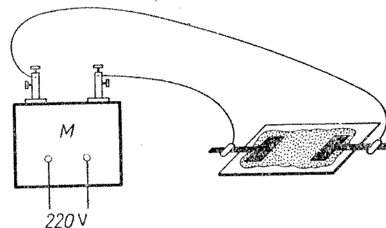
Rys. 2.60. Linie sił pola naelektryzowanej kuli



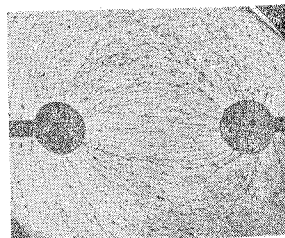
Rys. 2.61. Badanie linii sił pola elektrycznego przy pomocy dipola indukowanego (widok z góry). *1, 2, 3...* — kolejne pozycje dipola



Rys. 2.62. Linie sił pola między dwiema kulami naładowanymi różnoimiennie



Rys. 2.63. Demonstracja linii sił za pomocą zawiesiny węgla w oleju parafinowym

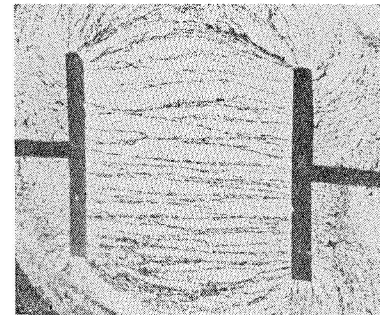


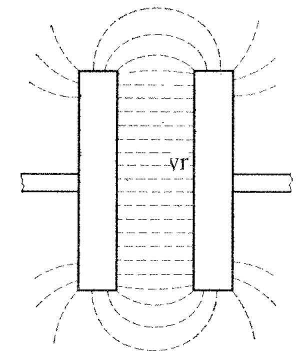
Rys. 2.64. Przebieg linii sił między kulami (w przekroju). Fotografia bez retuszu. (Patrz rys. 2.62)

będzie kierunek prowadzący od bieguna — do bieguna + dipola, którym badamy pole. Zrozumiałe jest zatem, że linie sił biegną od kuli naelektryzowanej dodatnio, natomiast wbiegają do kuli naelektryzowanej ujemnie.

Wykonajmy jeszcze doświadczenie mające na celu zbadanie pola, które wytwarzają dwie kule naładowane różnoimiennie (rys. 2.61). Jak poprzednio posuwajmy dipol w kierunku jego własnej osi. Zakreśli on teraz linie zakrzywione. Uwidocznia je rys. 2.62.

***§ 2.28. Łatwa demonstracja linii sił pola elektrycznego.** Aby unaocznić przebieg linii sił w polu elektrycznym, zastosujemy nie jeden dipol próbny, lecz ... kilka tysięcy maleńkich dipoli. Nie jest to bynajmniej trudne. Ucieramy kawałek węgla drzewnego na niezbyt drobny proszek; każde ziarenko węgla stanie się w polu elektrycznym dipolem. Żeby ziarenka węgla miały swobodę ruchu, mieszamy je z olejem parafinowym, otrzy-





a) b)

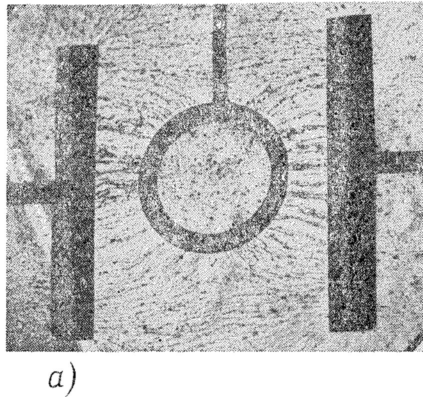
Rys. 2.65. Linie sił w polu kondensatora płaskiego (w przekroju), a) tak, jak je widzimy w doświadczeniu, b) w rysunku

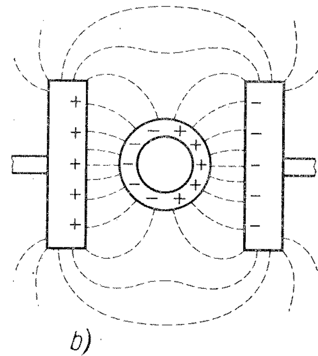
mując w ten sposób czarną zawiesinę. Na płytce szklanej naklejamy dwie elektrody z cynfolii i pomiędzy nie nalewamy trochę zawiesiny węgla. Elektrody łączymy z biegunami multiplikatora napięcia (rys. 2.63). Ziarenka-dipole ustawiają się w linie, jak wskazują rys. 2.64 i 2.65.

Interesujący jest wypadek, gdy w polu elektrycznym umieścimy osłonę metalową. Na zewnątrz osłony linie pola są zniekształcone; wewnątrz osłony natomiast pole nie istnieje (rys. 2.66). Oznacza to, że wewnątrz osłony nie istnieją siły elektryczne mogące działać na dipol próbny. Wnioskujemy stąd, że pole *zewnętrzne*, które istniało przed wprowadzeniem osłony, zniosło się wewnątrz osłony z polem *własnym* osłony. Wyrażenie „pola zniosły się" oznacza, że w każdym punkcie przestrzeni (tutaj wewnątrz osłony) zniosło się działanie sił pochodzących od obu pól.

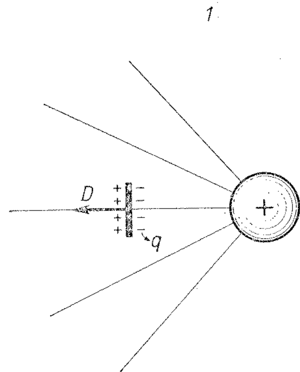
Pole, którego linie sił biegną równolegle do siebie, nazywa się polem *jednorodnym*. Pole między płytkami kondensatora płaskiego (wyjąwszy otoczenie brzegów) jest polem jednorodnym.

***§ 2.29. Pierwsza wielkość charakteryzująca pole elektryczne: indukcja, czyli przesunięcie D.** O polu elektrycznym możemy powiedzieć, że jest silne albo słabe w zależności

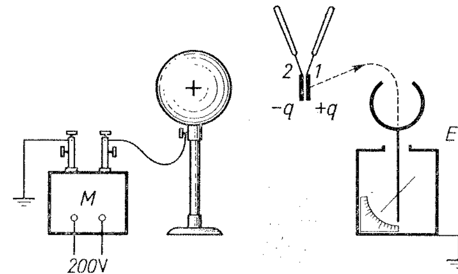

a)



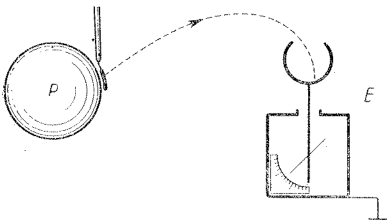
Rys. 2.66. Działanie osłony umieszczonej w polu elektrycznym (w przekroju), a) fotografia, b) rysunek



Rys. 2.67. Do definicji wektora indukcji (przesunięcia) D



Rys. 2.68. Pomiar indukcji D. Uwaga: aby otrzymać większe wychylenie elektrometru, przenoszenie ładunku q powtarzamy kilka razy. Po każdym przeniesieniu ładunek płytki 2 odprowadzamy do ziemi



Rys. 2.69. Pomiar gęstości naelektryzowania σ

od tego, czy wywołuje indukcję silną, czy słabą. Co to jednak znaczy indukcja silna lub słaba? Umówmy się, *że miarą indukcji jest stosunek ładunku indukowanego na powierzchni bardzo małej płytki próbnej, umieszczonej w danym punkcie pola prostopadle do linii sił, do wielkości jej powierzchni* (rys. 2.67). Jeżeli indukowany, czyli „przesunięty" ładunek oznaczymy literą q, powierzchnię płytki (jednostronną) — literą S, to w myśl powyższej definicji *indukcja*, czyli *przesunięcie* D, wyrazi się wzorem

$$D = \frac{q}{S}. \tag{2.9}$$

W ten sposób uzyskaliśmy nową wielkość charakteryzującą pole elektryczne.

Winniśmy teraz obmyślić sposób praktycznego zmierzenia indukcji.

W danym punkcie pola elektrycznego umieszczamy dwie płytki próbne zetknięte ze sobą powierzchniami, jak wskazuje rys. 2.68. Płytki te rozdzielamy, a następnie ładunek q zebrany na jednej z nich (obojętnie, na której) przenosimy do kuli wydrążonej elektrometru. Znając właściwość wiaderka Faradaya rozumiemy, że ładunek q zostanie całkowicie oddany elektrometrowi. Niech elektrometr da wychylenie wskazujące U woltów. Ale elektrometr jest swego rodzaju kondensatorem mającym pewną pojemność C (por. § 2.10); skoro naładował się do napięcia U, to ładunek jego wynosi:

$$q = CU.$$

Znając C i odczytawszy U obliczamy q. Wreszcie ze wzoru (2.9) otrzymujemy D. Jednostką zasadniczą indukcji jest $1\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$; można, oczywiście, posługiwać się niekiedy jednostkami pochodnymi, np. $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{cm}^2}$.

Indukcja, jako przesunięcie elektronów, jest wielkością kierunkową, czyli wektorem. Kierunek wektora $\mathbf{D}$ jest identyczny z kierunkiem linii sił w danym punkcie pola (por. rys. 2.67).

Opisany wyżej pomiar możemy wykonać w dowolnym punkcie pola elektrycznego. Można go również wykonać na samej powierzchni przewodnika naelektryzowanego P (rys. 2.69). Wówczas stosowanie dwóch płytek byłoby zbyteczne; wystarczy jedna, jak wskazuje rysunek. W tym wypadku stosunek $\frac{q}{S}$ nazywamy *gęstością naelektryzowania* przewodnika i oznaczamy literą σ. Analogicznie do (2.9) mamy więc

$$\sigma = \frac{q}{S}. \tag{2.9a}$$

Przy pomocy tego rodzaju pomiarów z łatwością stwierdzamy, że w polu jednorodnym, np. pomiędzy płytkami kondensatora płaskiego (por. rys. 2.78):

1) indukcja elektryczna D jest we wszystkich punktach pola ta sama, byle punkty te nie wychodziły poza obręb jednorodności pola;

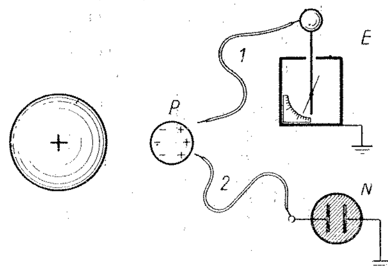
2) gęstość naelektryzowania równa się indukcji: $\sigma = D$ oraz ma tę samą wartość we wszystkich punktach obu powierzchni płyt zwróconych ku sobie, z wyjątkiem najbliższych okolic brzegów, gdzie σ i D są większe.

Doświadczenia wykonane w polu niejednorodnym, np. w polu otaczającym kulę naelektryzowaną (rys. 2.68) przekonują nas, że indukcja D jest większa w tych miejscach pola, gdzie linie sił zagęszczają się, natomiast mniejsza tam, gdzie linie sił rozrzedzają się.

C. O polu elektrycznym: potencjał i natężenie

***§ 2.30. Potencjał przewodnika umieszczonego w polu elektrycznym.** Przewodnik P odizolowany od ziemi i nie naelektryzowany, mający potencjał równy 0, umieśćmy w polu elektrycznym (rys. 2.70). Czy będzie on miał nadal potencjał równy zeru? Przy pomocy jednego z poniższych sposobów łatwo się przekonać, że potencjał przewodnika jest teraz odmienny od zera:

1. Połączmy przewodnik P z elektrometrem, którego osłona jest, jak zwykle, uziemiona: elektrometr wskazuje wychylenie.



Rys. 2.70. Doświadczenie *1* lub *2* poucza, że potencjał przewodnika P uprzednio nie naelektryzowanego, a umieszczonego w polu elektrycznym, nie jest równy zeru

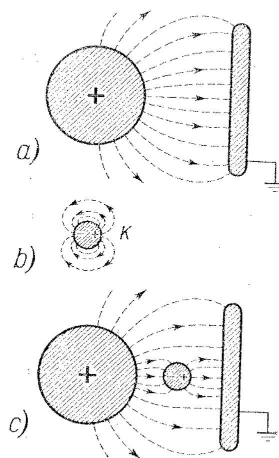
2. Połączmy przewodnik P przez lampkę neonową N z ziemią: lampka rozbłyśnie, co dowodzi, że przepłynął przez nią prąd elektryczny. A zatem potencjał przewodnika nie był zerem. Na rysunku 2.70 potencjał kulki P jest dodatni, gdyż prąd popłynie od P do ziemi (por. § 1.24, punkt 2).

A więc przekonaliśmy się, że *potencjał przewodnika nie naelektryzowanego, wprowadzonego do pola elektrycznego jest odmienny od zera.* Ale uziemijmy choćby na chwilę przewodnik P, a potencjał jego stanie się natychmiast równy zeru. Odpłynął przy tym ładunek swobodny (na rysunku dodatni), a pozostał, mimo uziemienia, ładunek związany. Widzimy zatem, że *jedynie ładunek swobodny decyduje o potencjale przewodnika w polu elektrycznym.*

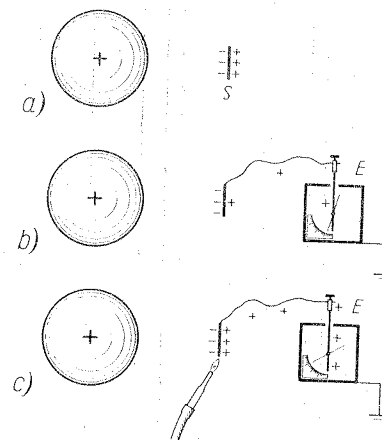
Im bliżej kuli umieścimy przewodnik P, tym wyższy będzie on miał potencjał. Przeciwnie, im dalej umieścimy przewodnik P, tym jego potencjał będzie bliższy zeru. Dopiero w nieskończonej odległości od kuli naelektryzowanej potencjał przewodnika P stanie się zerem albo w skończonej — gdy przewodnik P połączymy z ziemią.

***§ 2.31. Potencjał w punkcie pola elektrycznego.** Niech pomiędzy kulą a płytką uziemioną panuje pole elektryczne (rys. 2.71a). Jeżeli w polu tym umieścimy kulkę K, to stanie się ona dipolem indukowanym; wytwarzać będzie zatem własne pole elektryczne (rys. 2.71b). Pole to nakłada się na pole zewnętrzne pierwotne i zakłóca je, tzn. daje pole będące superpozycją obu pól: pola pierwotnego i pola własnego kulki (rysunek 2.71c).

Zakłócenie polega na tym, że w pobliżu elektrycznych biegunów + i — kulki K pole jest wzmocnione, ponieważ siły elektryczne pola pierwotnego i pola kulki są skierowane zgodnie; linie sił pola są tutaj zagęszczone. Natomiast w pobliżu „równika" kulki — pole jest osłabione, ponieważ siły elektryczne są skierowane przeciwnie; tutaj więc linie sił pola są rozrzedzone. Aby zakłócenie pola pierwotnego było jak najmniejsze, należy wziąć jak najmniejszą kulkę. *Potencjał, jakiego nabędzie w polu elektrycznym ciałko przewodzące, tak małe, że zakłócenie pola można pominąć, nazywać będziemy potencjałem w danym punkcie tego pola.* Owe małe ciałko przewodzące wprowadzone do pola elektrycznego w celu zbadania potencjału w danym punkcie nazywać będziemy *sondą.*



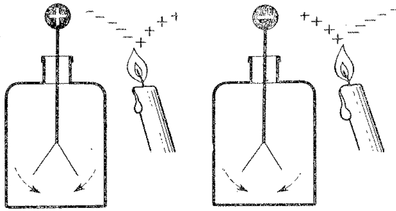
Rys. 2.71. a) Pole pierwotne, nie zakłócone. b) Pole własne kulki-dipola indukowanego. c) Pole zakłócone wprowadzeniem kulki. Linie te można otrzymać doświadczalnie metodą uwidocznioną na rys. 2.63



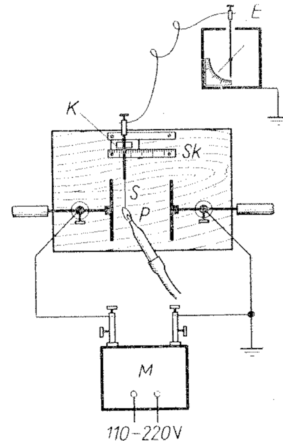
Rys. 2.72. a) Sonda S (mały kawałek drucika) w polu elektrycznym. b) Ta sama sonda połączona z elektrometrem E; elektrometr zabiera część ładunków swobodnych z sondy i obniża jej potencjał. c) Płomyk dostarcza sondzie brakujących ładunków i przywraca równowagę; elektrometr wskazuje teraz prawdziwy potencjał sondy

Jak zmierzyć potencjał w danym punkcie pola? Odpowiedź jest niezwykle prosta: należy zmierzyć elektrometrem potencjał sondy umieszczonej w tym punkcie.

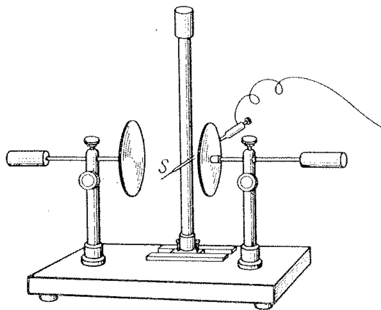
Jednak pomiar taki nastręcza poważną trudność. Rysunek 2.72a przedstawia sondę S, w postaci np. kawałka cienkiego drucika, umieszczoną w polu elektrycznym. Ładunki elektryczne sondy + i — są rozsunięte aż do pewnego stanu równowagi. Równowaga ta wytwarza się między siłami wywieranymi na oba ładunki przez pole zewnętrzne a siłami wzajemnego przyciągania się ładunków sondy. O potencjale sondy decyduje, jak wiemy, wielkość ładunku swobodnego. Jeśliby np. usunąć ten ładunek, to potencjał sondy obniżyłby się do zera. Otóż aby zmierzyć potencjał sondy, należy do niej dołączyć elektrometr, którego osłona jest uziemiona (rys. 2.72b). Wskazówka elektrometru wychyla się, co dowodzi, że elektrometr (jako swego rodzaju kondensator) naładował się — oczy-



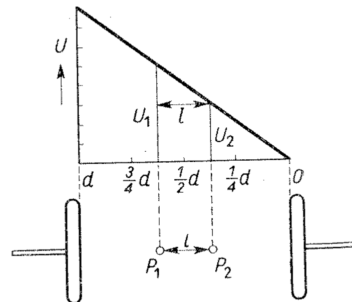
Rys. 2.73. Płomień rozbraja elektroskop naładowany dodatnio lub ujemnie. Wytwarza zatem jony obu znaków



Rys. 2.74. Pomiar potencjału w dowolnym punkcie pola kondensatora płaskiego



Rys. 2.75. Wygląd kondensatora płaskiego z sondą



Rys. 2.76. Przebieg potencjału w polu jednorodnym jest liniowy

wiście ładunkiem swobodnym sondy. I tu się kryje wspomniana trudność pomiaru, albowiem sonda ma już teraz znacznie mniejszy ładunek i potencjał, ponieważ zmniejszyły się one wskutek dołączenia elektrometru do sondy. Równowaga poprzednia ładunków na sondzie jest więc zakłócona i należy ją przywrócić albo przez dodanie brakujących ładunków swobodnych (na rysunku dodatnich), albo przez usunięcie nadmiaru ładunków związanych (na rysunku ujemnych); w tym drugim wypadku, gdy wielkość ładunków + i — zrówna się, nastąpi normalne przesunięcie (indukcja), jak w przypadku a) na rys. 2.72. Istnieją różne sposoby przywrócenia równowagi elektrycznej sondy. Poniżej wymienimy trzy ważniejsze metody:

1. *Sonda zaostrzona.* Sonda zaopatrzona jest w ostrze, z którego wypływa nadmiar ładunku związanego. Służy ona do mierzenia wysokich potencjałów.

2. *Sonda kropląca.* Sonda stanowi wylot rurki, przez którą ze specjalnego zbiorniczka kapie woda. Wraz z kroplami wody uchodzi nadmiar ładunku związanego aż do równowagi. Sondę kroplącą stosuje się często do pomiarów potencjału w polu elektrycznym ziemskim.

3. *Sonda płomykowa.* Płomień ma właściwość wytwarzania jonów obydwu znaków, o czym poucza np. doświadczenie z rys. 2.73. Jeżeli do sondy zbliżymy na chwilę maleńki płomyk, to nadmiar ładunku związanego (np. +) zostanie zobojętniony przez odpowiednie jony (—). Innymi słowy, niedobór ładunku swobodnego zostanie wyrównany i równowaga przywrócona (rys. 2.72c). Objawi się to tym, że wychylenie elektrometru bardzo znacznie wzrośnie aż do pewnego maksimum. Właśnie to największe wychylenie wskazuje potencjał w danym punkcie pola. Sondę płomykową używać będziemy do naszych dalszych doświadczeń (patrz niżej). Płomyk jednak musi być bardzo mały, aby jako ciało przewodzące nie zakłócał pola.

***§ 2.32. Rozkład potencjału między płytkami kondensatora płaskiego.** Kondensatorem płaskim nazywa się kondensator o okładkach płaskich i równoległych do siebie (dla odróżnienia od kondensatorów kulistych, których okładki są współśrodkowymi kulami, kondensatorów walcowych itp.). Rysunek 2.74 przedstawia schematycznie kondensator płaski, połączony z multiplikatorem napięcia, którego prawy biegun jest uziemiony (por. uwagę w § 2.14). Jako kondensator płaski może służyć używany już przez nas kondensator płytkowy rys. 2.75. W otworze kolumny ebonitowej K umieszczamy sondę S. Kolumnę wraz z sondą możemy przesuwać wzdłuż skali Sk. Sondę łączymy z elektrometrem E o uziemionej osłonie. Z chwilą gdy do końca sondy zbliżymy maleńki płomyk P, elektrometr wskaże potencjał panujący w danym punkcie pola elektrycznego.

Wystarczy wykonać kilka pomiarów potencjału, np. w punktach odległych od płytki uziemionej o: $\frac{1}{4}d$, $\frac{1}{2}d$, $\frac{3}{4}d$ i d (gdzie d jest odległością płyt), aby się przekonać, że potencjał rośnie proporcjonalnie do odległości od płytki uziemionej, czyli liniowo (rys. 2.76).

***§ 2.33. Druga wielkość charakteryzująca pole elektryczne: natężenie E.** Z powyższego wynika, że w polu jednorodnym przyrost potencjału na jednostkę długości wzdłuż linii sił jest stały; przyrost ten oznaczamy literą E. Jeśli więc w dwóch punktach P_1 i P_2, leżących na tej samej linii sił i odległych od siebie o l, potencjały są U_1 i U_2, to

$$E = \frac{U_1 - U_2}{l}. \tag{2.10}$$

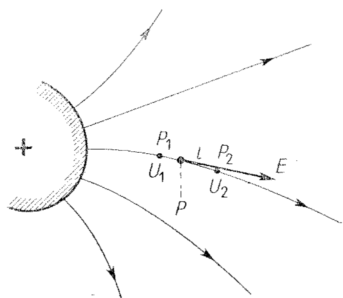
Tę wielkość nazywamy *natężeniem pola elektrycznego*. Od razu widzimy, że natężenie w polu jednorodnym jest stałe i wynosi

$$E = \frac{U}{d}. \tag{2.10a}$$

Jednostką zasadniczą natężenia pola elektrycznego jest 1 V/m; niekiedy jednak wygodniej jest posługiwać się jednostkami pochodnymi, np. V/cm.

Przykład: Odległość płyt kondensatora płaskiego $d = 6$ cm, napięcie 12 000 V, stąd $E = 200\,000$ V/m $= 2000$ V/cm.

Zamiast pola jednorodnego weźmy pole dowolne, niejednorodne (rys. 2.77). Pozostawmy w mocy definicję wielkości E wyrażoną wzorem (2.10). Lecz wówczas natężenie



Rys. 2.77. Do definicji wektora natężenia pola elektrycznego E

nie będzie stałe dla różnych obszarów pola. Jak łatwo przekonać się doświadczalnie, natężenie pola będzie silniejsze bliżej naelektryzowanego ciała, słabsze — dalej. Wobec tego

$$E = \frac{U_1 - U_2}{l}$$

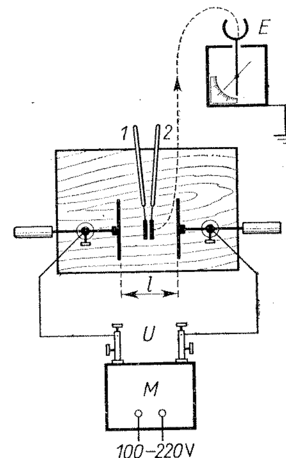
stanowi jakąś średnią wartość natężenia na odcinku $P_1P_2 = l$. Wartość prawdziwą natężenia w punkcie P otrzymamy biorąc

$$E = \lim_{l \to 0} \frac{U_1 - U_2}{l} \tag{2.10b}$$

dla l dążącego do zera w ten sposób, że punkt P zawiera się zawsze między punktami P_1 i P_2. Wielkość E, jako zmiana potencjału wzdłuż linii sił, jest wektorem, którego kierunek jest styczny do linii sił w danym punkcie P. Zwrot jego przyjmujemy za zgodny z kierunkiem (ze zwrotem) danej linii sił, tzn. od punktu o potencjale wyższym (P_1) do punktu o potencjale niższym (P_2).

*§ **2.34. Związek między wektorami D i E.** Aby ten związek uzyskać, należy w jednym i tym samym punkcie pola zmierzyć wielkości D i E. Bardzo łatwo to wykonać w polu jednorodnym kondensatora płaskiego.

Kondensator płaski łączymy z biegunami multiplikatora napięcia. Zmierzywszy odległość płytek l obliczamy natężenie pola ze wzoru $E = \frac{U}{l}$. (Jeśli multiplikator zasilamy napięciem U_0, to między płytkami panuje napięcie $U = nU_0$, gdzie n jest liczbą kondensatorów w multiplikatorze.) Indukcję D mierzymy w sposób wyjaśniony dostatecznie na rys. 2.78 oraz w § 2.29. Powtarzając pomiary E i D przy paru różnych natężeniach pola (np. dla różnych l) stwierdzamy, że wielkości E i D są wzajemnie proporcjonalne.



Rys. 2.78. Pomiar indukcji D w polu kondensatora płaskiego

Piszemy więc

$$D = \varepsilon_0 E, \tag{2.11}$$

gdzie ε_0 jest współczynnikiem proporcjonalności. Pomiary E i D pozwalają obliczyć ten współczynnik; jego wartość wynosi

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}}{\text{V} \cdot \text{m}}.$$

Jednostka „kulomb na woltometr" pochodzi stąd, że pomnożona przez jednostkę natężenia pola $\frac{\text{V}}{\text{m}}$ musi dać jednostkę indukcji $\frac{\text{C}}{\text{m}^2}$. Ponieważ kulomb na wolt jest to farad (patrz § 2.7), przeto można napisać

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}.$$

Powyższa wartość ε_0 stosuje się jedynie do wypadku, gdy płytki kondensatora znajdują się w próżni; dlatego współczynnik ε_0 nazywa się „przenikalnością elektryczną próżni". Badania pokazują, że jeśli przestrzeń między płytkami kondensatora wypełniona jest jakimś ośrodkiem, to współczynnik we wzorze (2.11) ma wartość większą od wartości ε_0, którą wyżej podaliśmy. Dla powietrza jednak różnica tych wartości jest tak mała, że uwzględniać jej tu nie będziemy (patrz tabl. 2.1 § 2.11).

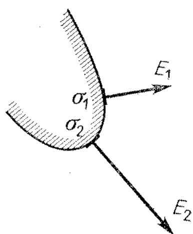
Związek między indukcją D a natężeniem pola elektrycznego E w próżni jest fundamentalny i wartość stałej ε_0 wynikać musi z podstawowych praw natury. Jest rzeczą

niezmiernie doniosłą, że wartość tej stałej identyczna jest z wartością

$$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}, \tag{2.12}$$

gdzie $c = 3 \cdot 10^8$ wyraża prędkość rozchodzenia się światła w próżni, wyrażoną w m/s. Niechże czytelnik obliczy to wyrażenie i sprawdzi, że istotnie ma ono wartość $8{,}85 \cdot 10^{-12}$. Nie jest to przypadek: znaczenie c, jako prędkości fali elektromagnetycznej w próżni, est rzeczywiście wynikiem elektromagnetycznej teorii światła Maxwella (patrz § 5.19).

Związek (2.11) jest słuszny dla dowolnego pola elektrycznego. (W doświadczeniu naszym sprawdziliśmy go tylko w przypadku pola jednorodnego, gdyż to nam ułatwiło pomiar E; niemniej doświadczenie da się wykonać dla dowolnego pola.)



Rys. 2.79. Objaśnienie do twierdzenia Gaussa ($\sigma_2 > \sigma_1$; $E_2 > E_1$)

Związek (2.11) można zastosować do pola panującego tuż przy powierzchni dowolnego przewodnika naelektryzowanego (rys. 2.79). Wówczas przesunięcie D zastępujemy gęstością naelektryzowania (por. rys. 2.69) i otrzymujemy

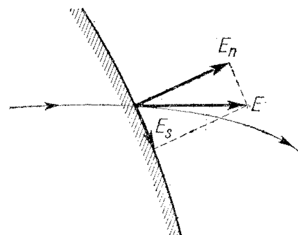
$$\sigma = \varepsilon_0 E. \tag{2.13}$$

W tej postaci związek ten nosi nazwę *prawa Gaussa*. Prawo to uczy, że w miejscach, gdzie jest wielka gęstość naelektryzowania, panuje pole o wielkim natężeniu. Przykład: na ostrych miejscach przewodnika istnieje duża gęstość naelektryzowania — w okolicy tych miejsc panuje najsilniejsze pole. Inny przykład: we wnętrzu pustego przewodnika $\sigma = 0$, tam również $E = 0$.

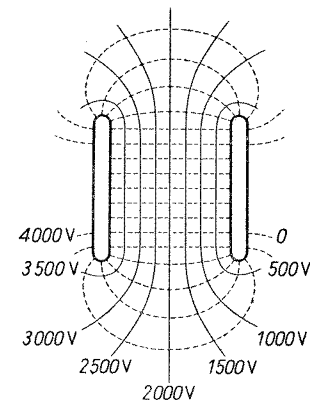
*§ **2.35. Powierzchnie ekwipotencjalne.** *Powierzchnią ekwipotencjalną* nazywamy taką powierzchnię w polu elektrycznym, której wszystkie punkty mają ten sam potencjał. Powierzchnią ekwipotencjalną jest więc przede wszystkim powierzchnia każdego przewodnika (pod warunkiem, że w przewodniku tym nie płynie prąd elektryczny, wówczas bowiem istniałby na nim spadek potencjału).

Twierdzenie: *powierzchnie ekwipotencjalne są prostopadłe do linii sił.* Gdyby było inaczej, wówczas istniałaby składowa styczna E_s wektora E (rys. 2.80). Oznaczałoby to, według definicji natężenia, że wzdłuż tej powierzchni istnieje spadek potencjału. A zatem powierzchnia nieprostopadła do linii sił nie może być powierzchnią ekwipotencjalną. Stąd również wynika, że linie sił tworzą z powierzchnią wszelkich przewodników kąt prosty (patrz rys. 2.62, 2.65, 2.66).

Na podstawie tego twierdzenia nietrudno narysować powierzchnie ekwipotencjalne w polu elektrycznym. Rysunek 2.81 przedstawia powierzchnie ekwipotencjalne (w przekroju) w polu kondensatora płaskiego. W części jednorodnej pola powierzchnie te są płaskie i równoodległe, ponieważ potencjał spada liniowo (§ 2.31). W otoczeniu kuli naelektryzowanej powierzchnie ekwipotencjalne są kulami współśrodkowymi (patrz rys. 2.86).

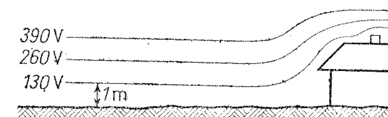


Rys. 2.80. Powierzchnia ekwipotencjalna jest prostopadła do linii sił



Rys. 2.81. Powierzchnie ekwipotencjalne w polu kondensatora płaskiego

Rysunek 2.82 pokazuje powierzchnie ekwipotencjalne pola elektrycznego, jakie normalnie panuje nad powierzchnią ziemi. Pomiary uczą, że na każdy metr wzniesienia nad powierzchnią ziemi (w otwartym polu, z dala od budynków, drzew itp.) potencjał wzrasta o około + 130 V. Czyli natężenie pola elektrycznego *atmosferycznego* wynosi około $130 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$. Na większych wysokościach natężenie pola ziemskiego słabnie do kilku woltów



Rys. 2.82. Powierzchnie ekwipotencjalne w polu elektrycznym ziemskim. (Liczby podane dla orientacji; w rzeczywistości zmieniają się nieco w czasie i przestrzeni)

na metr. Istnienie tego rodzaju pola elektrycznego ziemskiego wskazuje, że żyjemy między „okładkami" olbrzymiego kondensatora, którego górną okładkę stanowią wyższe, zjonizowane warstwy naszej atmosfery, zwane *jonosferą*.

Jedna z warstw jonosfery, najbliższa ziemi, nazywa się *warstwą Heaviside'a*. Znajduje się ona na wysokości około 100 km i ma prawdopodobnie potencjał około 400 000 V w stosunku do ziemi. Jonosfera ma ogromne znaczenie w rozchodzeniu się fal radiowych.

***§ 2.36. Pojemność kondensatora płaskiego i uogólnienie związku między wektorami D i E.** Wewnątrz kondensatora płaskiego panuje pole jednorodne, tzn. że we wszystkich punktach pola, wyjąwszy brzegi, natężenie E jest stałe. Wynosi ono $E = \frac{U}{d}$. Ze stałości E wynika stałość D według związku (2.11). Z tego związku i z twierdzenia Gaussa (2.13) wynika dalej, że $\sigma = D$, czyli że gęstość naelektryzowania równa jest indukcji (sprawdziliśmy to już doświadczalnie w § 2.29). Możemy więc napisać zamiast (2.11) lub (2.13)

$$D = \sigma = \varepsilon_0 \frac{U}{d}.$$

Niech e oznacza ładunek kondensatora płaskiego, a S — pole powierzchni każdej z jego płyt. Przyjmijmy, że rozkład ładunku na płycie jest równomierny, tzn. pomińmy fakt, że na brzegach płyt gęstość ładunku jest większa (uproszczenie takie dla dużych płyt jest dopuszczalne). Wówczas gęstość ładunku będzie

$$\sigma = \frac{e}{S}.$$

Z obu powyższych wzorów wynika

$$\frac{e}{S} = \varepsilon_0 \frac{U}{d},$$

czyli

$$\frac{e}{U} = \varepsilon_0 \frac{S}{d}.$$

Ale stosunek $\frac{e}{U}$ oznacza pojemność C kondensatora. Zatem

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}. \qquad (2.14)$$

$$(\text{F}) \quad \left(\frac{\text{F}}{\text{m}}\right)\left(\frac{\text{m}^2}{\text{m}}\right)$$

Wzór ten mówi, że pojemność kondensatora płaskiego jest proporcjonalna do powierzchni S płyt i odwrotnie proporcjonalna do ich wzajemnej odległości d. Zależność tę stwierdziliśmy już doświadczalnie w § 2.11. Stwierdziliśmy wówczas ponadto, że pojemność zależy również od rodzaju ośrodka wypełniającego przestrzeń między płytkami. Wnosimy stąd, że dla ośrodka nie będącego powietrzem (dokładniej: próżnią) współczynnik proporcjonalności we wzorze (2.14) jest inny, większy od ε_0, mianowicie $\varepsilon_0\varepsilon$, gdzie ε jest stałą dielektryczną danego ośrodka. Pojemność kondensatora po wypełnieniu go dielektrykiem będzie zatem

$$C = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon S}{d}. \qquad (2.14a)$$

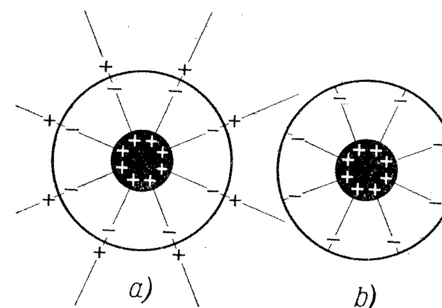
Z faktu, że we wzorze (2.14a) zamiast współczynnika ε_0 zjawił się współczynnik $\varepsilon_0\varepsilon$, możemy wnioskować, że wzór (2.11), jeśli ma być słuszny dla dowolnego ośrodka dielektrycznego o stałej dielektrycznej ε, należy napisać w postaci

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon E, \qquad (2.11a)$$

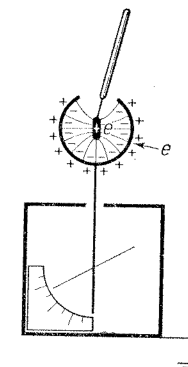
w której oprócz ε_0 występuje ε. To samo stosuje się do wzoru (2.13) wyrażającego gęstość naelektryzowania

$$\sigma = \varepsilon_0 \varepsilon E. \qquad (2.13a)$$

***§ 2.37. Indukcja wewnątrz osłony.** Niech ciało naelektryzowane np. ładunkiem $+e$ znajduje się wewnątrz osłony metalowej. Na wewnętrznej powierzchni tej osłony zbierają się ładunki indukowane przeciwnego znaku (rys. 2.83), natomiast ładunki swobodne tego samego znaku co ładunek indukujący zbierają się na zewnętrznej powierzchni. Ładunki różnoimienne przesunięte w powłoce przewodzącej osłony są oczywiście równe



Rys. 2.83. a) Indukcja wewnątrz osłony; ładunki: indukujący, związany i swobodny są tej samej wielkości, o czym poucza doświadczenie wyobrażone na rys. 2.84, pole na zewnątrz osłony istnieje. b) Po chwilowym uziemieniu osłony pole na zewnątrz osłony zniknęło



Rys. 2.84. Po wprowadzeniu ładunku na płytce próbnej do wiaderka Faradaya elektrometr wskaże wychylenie, które nie zmieni się, gdy płytkę zetkniemy z wiaderkiem

sobie. Ale nietrudno wykazać, że ładunki te są równe ładunkowi indukującemu e. Jeśli bowiem ciało wprowadzone do osłony zetkniemy z wewnętrzną powierzchnią osłony (rys. 2.84), wskazówka elektrometru nawet nie drgnie. Oznacza to, że potencjał osłony nie zmienił się wcale: pozostał taki, jaki był przed zetknięciem. Ale potencjał ten zależy wyłącznie od ładunku swobodnego: wnosimy stąd, że ładunek swobodny nie zmienił się. Po zetknięciu wynosi on $+e$, a zatem tyle co przed zetknięciem.

To samo odnosi się do osłony przewodzącej o dowolnym kształcie, wypełnionej dowolnym, nieprzewodzącym ośrodkiem.

***§ 2.38. Natężenie pola elektrycznego wytworzonego przez kulę naelektryzowaną.** Kula o promieniu r, naładowana ładunkiem np. $+e$, wytwarza pole, którego linie sił roz-

chodzą się promienisto (rys. 2.85). Zapytujemy: jakie jest przesunięcie D i natężenie E w dowolnym punkcie P pola, odległym o x od środka kuli?

Niech S będzie powierzchnią ekwipotencjalną przechodzącą przez punkt P, a więc powierzchnią kuli o promieniu $= x$. Wyobraźmy sobie, że powierzchnia ta „zmaterializowała się", tzn. stała się cienką powłoką przewodzącą. Układ linii sił w niczym się przez to nie zmienił: jak były, tak są prostopadłe do S. Na zewnętrznej powierzchni naszej zmaterializowanej powłoki zebrał się ładunek indukowany $+e$, dokładnie równy ładunkowi $+e$ kuli (§ 2.37). Wobec tego gęstość naelektryzowania σ na tej powierzchni, czyli przesunięcie D w odległości x od środka kuli, jest na podstawie § 2.29 równe $\frac{e}{S}$,

czyli

$$D = \frac{e}{4\pi x^2}, \tag{2.15}$$

ponieważ $S = 4\pi x^2$. Widzimy, że indukcja jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości punktu od środka kuli naelektryzowanej. Ponieważ związek (2.11a) daje

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} D,$$

przeto obliczamy stąd poszukiwane E

$$E = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon} \frac{e}{x^2}. \tag{2.16}$$

O natężeniu pola możemy więc powiedzieć to samo co o indukcji, że maleje z kwadratem odległości od środka kuli. Ale poza tym wzór (2.16) mówi, że wielkość E zależy również od ε, zatem od wypełniającego przestrzeń ośrodka. Dla innych ośrodków aniżeli próżnia natężenie pola elektrycznego przy tym samym ładunku e i w tej samej od niego odległości maleje ε razy. Indukcja D pozostaje jednak ta sama [wzór (2.15)].

*§ **2.39. Potencjał w polu naładowanej kuli.** Nie wiemy, jakie potencjały panują w punktach P_1 i P_2 leżących na tej samej linii sił w bardzo małej odległości Δx od siebie (rys. 2.85). Ale znamy natężenie pola E w punkcie P (w odległości x od środka kuli naelektryzowanej), gdyż wyznacza je nam wzór (2.16). Oprócz tego wiemy, że w myśl definicji wielkości E, którą wyraża wzór (2.10b), jest

$$E = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x) - U(x + \Delta x)}{\Delta x},$$

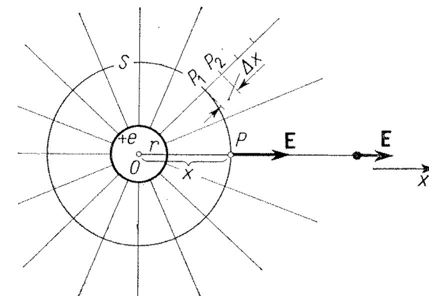
gdzie $U(x)$ i $U(x+\Delta x)$ są to nieznane jeszcze potencjały w punktach P_1 i P_2, odległych od środka kuli o x i o $x+\Delta x$. Przypomnijmy sobie, że definicja pochodnej jakiejś funkcji $U(x)$ jest następująca:

$$\frac{dU}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x+Ux) - U(x)}{\Delta x}.$$

Stąd widać, że

$$E = -\frac{dU}{dx}, \tag{2.17}$$

co wyrazimy słowami: *natężenie pola elektrycznego jest równe minus pochodnej potencjału względem odległości x.*



Rys. 2.85. Wektor natężenia w polu naelektryzowanej kuli

Wiedząc ze wzoru (2.16), jakie jest E, mianowicie

$$E = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon} \frac{e}{x^2},$$

poszukajmy funkcji U zmiennej x, której minus pochodna jest właśnie równa E. Napiszmy więc

$$\frac{dU}{dx} = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{1}{x^2}.$$

Jest to proste równanie różniczkowe, którego rozwiązanie otrzymujemy od razu obliczając całkę

$$U = -\frac{e}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon} \int \frac{dx}{x^2} = \frac{e}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon} \frac{1}{x} + \text{const},$$

gdzie const oznacza dowolną stałą.

Nietrudno zauważyć, że stała ta musi być uznana za zero, ponieważ w nieskończonej odległości od kuli naelektryzowanej ($x \to \infty$), potencjał $U = 0$ (por. § 2.30). Zatem wzór na potencjał w dowolnym punkcie pola, w odległości x od kuli jest

$$U = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon} \frac{e}{x}. \tag{2.18}$$

Kładąc $x = r$ obliczamy potencjał samej kuli:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{e}{r}. \tag{2.18a}$$

Jest to wzór bardzo ważny, ponieważ pozwala nam obliczyć pojemność kuli. Wiemy, że $C = \frac{e}{U}$, zatem pojemność kuli wyrazi wzór

$$C = 4\pi\ \varepsilon_0\ \ \varepsilon\ r. \qquad (2.19)$$
$$(\mathrm{F}) \quad \left(\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}\right) \quad (\mathrm{m})$$

Pojemność elektryczna kuli przewodzącej jest proporcjonalna do jej promienia.

Przykłady: 1. Kula o promieniu $r = 1$ cm, znajdująca się w próżni ($\varepsilon = 1$), ma pojemność

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \cdot r = \frac{1}{9} \cdot 10^{-9} \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} \cdot 0{,}01\ \mathrm{m} = \frac{1}{9} \cdot 10^{-11}\ \ \mathrm{F} = \frac{1}{9} \cdot 10^{-5}\ \mu\mathrm{F},$$

a więc jedną dziewięćsettysięczną część mikrofarada. Ta drobna pojemność, jaką ma kula o promieniu 1 cm, jest jednostką pojemności w układzie elektrostatycznym CGS (patrz § 2.42) i nazywa się *„jednostką elektrostatyczną pojemności"* albo *„1 centymetrem"*. W tych jednostkach pojemność elektryczna C kuli wynosi tyle centymetrów, ile wynosi w centymetrach promień kuli. Czyli po prostu

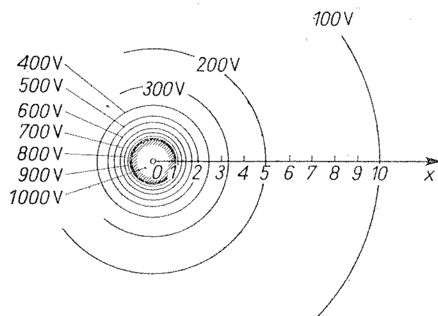
$$\underset{(\mathrm{cm})}{C} = \underset{(\mathrm{cm})}{r}. \qquad (2.19\mathrm{a})$$

Widzimy, że stosując jednostki elektrostatyczne CGS należy przyjąć $4\pi\varepsilon_0 = 1$.

2. Kula ziemska ($r = 6{,}37 \cdot 10^6$) ma pojemność

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \cdot r = \frac{1}{9} \cdot 10^{-9} \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V \cdot m}} \cdot 6{,}37 \cdot 10^6 \mathrm{m} = 708 \cdot 10^{-6}\ \ \mathrm{F} = 708\ \mu\mathrm{F}.$$

Wzór (2.18) powiada, że jeśli kula o promieniu r ma potencjał np. 1000 V, to już w odległości $2r$ potencjał spada do 500 V, w odległości $5\,r$ — do 200 V, a dopiero w odległości $10\ r$ — do 100 V. Widać stąd, że powierzchnie ekwipotencjalne, odpowiadające



Rys. 2.86. Powierzchnie ekwipotencjalne w otoczeniu naelektryzowanej kuli

100, 200, ... woltom, w miarę zbliżania się do kuli zagęszczają się. Stosunki te ilustruje rys. 2.86. Z rysunku tego i poprzedniego widzimy, że w tych punktach pola, gdzie panuje większe natężenie, mamy zarówno większe zagęszczenie powierzchni ekwipotencjalnych, jak i większe zagęszczenie linii sił. W tych miejscach pola natomiast, w których linie sił (i powierzchnie ekwipotencjalne) przebiegają rzadziej, panuje słabsze pole.

Wzór (2.17) został wyprowadzony dla kierunku osi x. Oczywiście w ten sam sposób możemy go wyprowadzić dla dowolnego kierunku r wzdłuż przedłużenia promienia kuli. Będziemy mieli wtedy

$$E = -\frac{dU}{dr}. \qquad (2.17\mathrm{a})$$

Wzór ten wyraża wartość wektora **E**, który — jak widać z wyprowadzenia — jest prostopadły do powierzchni ekwipotencjalnej. Wektor ten w kierunku osi x ma wartości

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x},$$

zaś w kierunku osi y i z ma odpowiednio wartości

$$E_y = -\frac{\partial U}{\partial y},$$

$$E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Piszemy symbole pochodnych cząstkowych $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ i $\frac{\partial}{\partial z}$, ponieważ U zależy od trzech zmiennych niezależnych x, y i z.

Przyjęło się w teorii pola elektrycznego wektor o składowych $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ i $\frac{\partial U}{\partial z}$ nazywać *gradientem potencjału* U i oznaczać symbolem grad U albo symbolem „nabla" ∇. A zatem

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\, U \qquad (2.17\mathrm{b})$$

lub inaczej

$$\mathbf{E} = -\nabla U \qquad (2.17\mathrm{c})$$

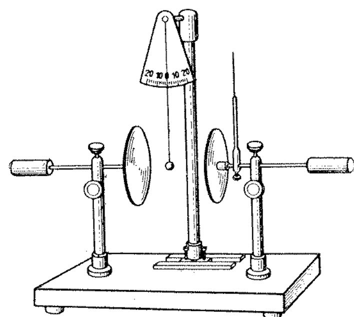
[por. wzór (5.19) i zagadnienie 5.7, wzory (5.83) i (5.84) oraz Aneks do rozdziału 5, wzór (A9)]. Wektor **E** ma największą wartość w kierunku r, tj. w kierunku prostopadłym do powierzchni ekwipotencjalnej, zaś w każdym innym kierunku ma wartość mniejszą, aż wreszcie w kierunku prostopadłym do r, tzn. stycznym do powierzchni ekwipotencjalnej, ma wartość zero: $E_s = 0$.

D. O polu elektrycznym: siły, praca, energia

***§ 2.40. Siła działająca w polu elektrycznym na ładunek.** W wielu doświadczeniach obserwowaliśmy już działanie siły na ładunek elektryczny umieszczony w polu elektrycznym. Obecnie pragniemy siłę tę zmierzyć oraz zbadać, od jakich wielkości zależy i jaka jest ta zależność.

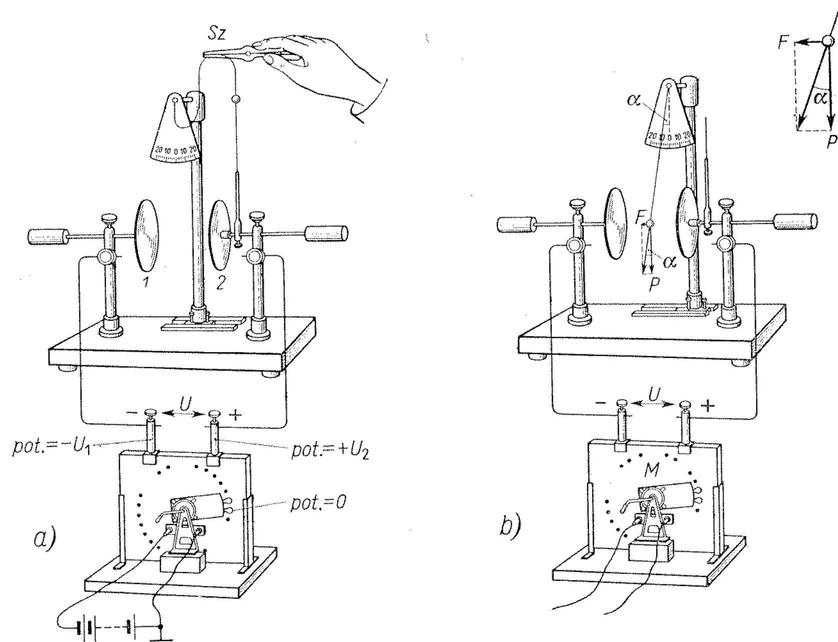
W polu jednorodnym kondensatora płaskiego umieszczamy lekką kuleczkę o powierzchni metalizowanej, zawieszoną na nici jedwabnej. Płytki kondensatora łączymy

z biegunami multiplikatora napięcia, zasilanego z uziemionej baterii o napięciu $U_0 = 100-200$ V. Dzięki uziemieniu jednego z biegunów baterii, a więc jednego z kontaktów ładujących, potencjał zerowy może „wędrować" od jednej płytki do drugiej (por. § 2.14). W ten sposób, nie zmieniając napięcia między płytkami, możemy zmieniać dowolnie potencjały płytek. Na jednej z nich umieszczamy sondę S (rys. 2.87), która tym



Rys. 2.87. Kondensator płaski przygotowany do pomiaru siły działającej na ładunek w polu elektrycznym (patrz rys. 2.88)

razem służyć będzie do udzielania ładunku kulce. Dotknąwszy kulkę do końca sondy udzielamy jej ładunku e tym większego, im wyższy potencjał ma sonda. Jeśli np. zatrzymamy uziemiony kontakt multiplikatora na zacisku n-tym, licząc od bieguna połączonego z sondą, udzielamy sondzie, a więc i kulce, potencjału nU_0. Przed wykonaniem



Rys. 2.88. a) Udzielamy kulce ładunku e (Sz — szczypce celuloidowe). b) Ta sama kulka wychyla się w polu o natężeniu $E = U/d$ pod wpływem siły $F = P\operatorname{tg}\alpha$

właściwego doświadczenia należy zmierzyć ładunek e kulki. Zdjąwszy z kolumny pręcik, na którym wisi kulka, udzielamy jej ładunku przez dotknięcie do sondy. Dalej postępujemy zupełnie tak samo, jak w § 2.29: ładunek kulki przenosimy do kuli wydrążonej elektrometru, wskutek czego wskazówka elektrometru wychyla się. Aby uzyskać większe wychylenie, powtarzamy tę czynność z (np. 5) razy. Jeśli elektrometr naładował się do potencjału U, to ładunek, jaki otrzymał, wynosi CU (C — pojemność elektrometru); zatem ładunek kulki wynosi

$$e = \frac{1}{z} CU. \tag{a}$$

Po tym wstępnym pomiarze umieszczamy kulkę na dawnym miejscu i udzielamy jej znów tego samego ładunku e, jak pokazuje rys. 2.88a. Następnie umieszczamy ją w polu kondensatora, jak wskazuje rys. 2.88b. Z kąta α wychylenia nici obliczamy siłę F wywieraną na kulkę przez pole

$$F = P\operatorname{tg}\alpha \tag{b}$$

(P — ciężar kulki w niutonach). Natężenie pola elektrycznego E między płytkami kondensatora obliczamy ze wzoru

$$E = \frac{U}{d} \tag{c}$$

(d — odległość płytek w metrach). Kilka pomiarów e, F i E poucza nas, że siła F działająca na ładunek e jest wprost proporcjonalna zarówno do wielkości ładunku e, jak i do natężenia pola elektrycznego E. Można to wyrazić równaniem

$$F = AeE,$$

gdzie A jest współczynnikiem proporcjonalności. Jeżeli w pomiarach naszych e, E i F wyrazimy w jednostkach zasadniczych, tzn. odpowiednio w kulombach, w V/m i w niutonach, to wyżej opisane doświadczenia dadzą na współczynnik A dokładnie 1. (Czy to przypadek, że wypada 1? Oczywiście, że nie przypadek: por. § 2.44.) Zatem można napisać

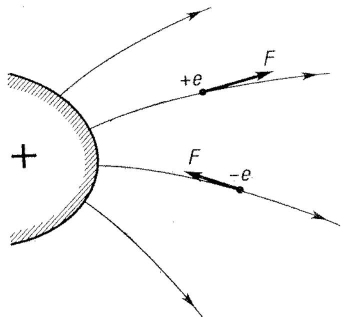
$$\underset{(\mathrm{N})}{F} = \underset{(\mathrm{C})}{e}\ \underset{\left(\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right)}{E}. \tag{2.20}$$

Siła działająca na ładunek w polu elektrycznym równa się iloczynowi tego ładunku i natężenia pola (jeśli wszystkie trzy wielkości wyrażone są w jednostkach zasadniczych). Wzór (2.20) ma fundamentalne znaczenie, gdyż łączy wielkości czysto elektryczne (e, E) z wielkością mechaniczną (F). Doświadczenie pokazuje, że jest słuszny zarówno dla próżni, jak i dla dowolnych ośrodków.

Z § 2.27 i 2.33 wiemy, że kierunek siły działającej w polu elektrycznym i kierunek wektora E są identyczne z kierunkiem linii sił w danym punkcie pola. Zwroty wektorów F i E są jednakowe, jeśli ładunek e jest dodatni, natomiast przeciwne, gdy ładunek e jest ujemny (rys. 2.89).

Uwagi do wykonania powyższego doświadczenia

1. Jeśli multiplikator 60-kondensatorowy zasilamy napięciem 100 V, to między płytkami będziemy mieli napięcie $U = 6000$ V. Potencjał U_2 płytki *2* zależy natomiast od tego, gdzie ustawimy kontakt ładujący, połączony z uziemionym biegunem baterii; dla odróżnienia od siebie kontakty te oznaczone są barwami czerwoną i niebieską. Jeśli między kontaktem uziemionym a kolumną *2* multiplikatora zawiera się 20 kondensatorów, to potencjał kolumny *2* i płytki *2* jest 2000 V. Multiplikator należy od czasu do czasu zakręcić.

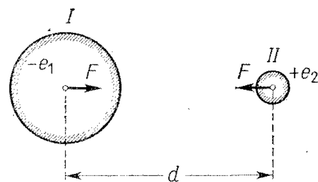


Rys. 2.89. Wektory **F** i **E** mają kierunki jednakowe; natomiast zwroty te same lub przeciwne, zależnie od znaku *e*

2. Wskazane jest nieudzielanie sondzie wyższego potencjału niż 3000 V, aby uniknąć wypływu ładunku z sondy, co obniża potencjał.

3. Kulkę należy umieszczać mniej więcej w środku pola między płytkami, tzn. jak najdalej od płytek, ale w części jednorodnej pola. W doświadczeniu tym bowiem kulka ma oddziaływać wyłącznie z polem elektrycznym E. Oddziaływanie to nie powinno być zakłócone przez oddziaływanie kulki z ładunkami indukowanymi przez nią w płytkach kondensatora. Dlatego właśnie kulka powinna być umieszczona symetrycznie między płytkami.

***§ 2.41. Prawo Coulomba.** Otrzymany przez nas wzór (2.20) stosować można również i do pól niejednorodnych. Pod dwoma jednak warunkami: 1) że E oznaczać będzie natężenie pola w miejscu, gdzie się znajduje ładunek e; 2) że kulka jest tak mała, iż w obszarze, jaki zajmuje, pole można uważać niemal za jednorodne. Doniosłość tego drugiego warunku zrozumiemy, jeśli weźmiemy pod uwagę, że pole zewnętrzne indukuje w kulce ładunki + i —, tak jak i w kulce nie naelektryzowanej z rys. 2.55. Stąd rodzą się jeszcze dwie dodatkowe siły: przyciągania i odpychania. Znoszą się one, gdy kulka jest w polu jednorodnym; natomiast zwycięża siła przyciągania, gdy kulka znajduje się w polu niejednorodnym (rys. 2.55). Owo „zwycięstwo" dodatkowej siły przyciągania mogłoby zmienić siłę F obliczoną ze wzoru (2.20). Dlatego właśnie drugi warunek musi być spełniony.



Rys. 2.90. Objaśnienie do prawa Coulomba

Niech w polu elektrycznym kuli *I* naelektryzowanej ładunkiem e_1 znajduje się kulka *II* bardzo małych rozmiarów (w stosunku do odległości d ich środków), mająca ładunek e_2 (rys. 2.90). Ładunki te będą się przyciągały lub odpychały, zależnie od tego, czy są różnoimienne, czy jednoimienne. Siłę ich wzajemnego działania wyrazić można na podstawie wzoru (2.20) tak:

$$F = e_2 E,$$

gdzie E jest natężeniem pola kuli *I* w miejscu, gdzie się znajduje kulka *II*. Obliczamy je ze wzoru (2.16)

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \frac{e_1}{d^2},$$

a podstawiwszy do wzoru poprzedniego otrzymujemy:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \frac{e_1 \cdot e_2}{d^2}. \tag{2.21}$$

$$(\mathrm{N}) \quad \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{F}}\right) \quad \left(\frac{\mathrm{C \cdot C}}{\mathrm{m^2}}\right)$$

Wzór ten znany jest pod nazwą *prawa Coulomba*: *siła przyciągania się lub odpychania dwóch kul naelektryzowanych jest proporcjonalna do ich ładunków, a odwrotnie proporcjonalna do kwadratu ich wzajemnej odległości oraz do stałej dielektrycznej ośrodka wypełniającego przestrzeń.* Prawo Coulomba słuszne jest dla kul, znajdujących się w znacznym od siebie oddaleniu, w ośrodku jednorodnym i nieograniczonym. W przybliżeniu stosuje się dla przewodników o dowolnych kształtach, byle ich rozmiary były bardzo małe w stosunku do ich odległości. Prawo to było pierwszym w ogóle prawem ilościowym, jakie poznano w dziedzinie zjawisk elektrycznych. Wykryli je w końcu XVIII stulecia: fizyk i chemik angielski Cavendish i fizyk francuski Coulomb.

Przypominamy, że we wzorze (2.21) siła wyrażona jest w niutonach. Istotnie, sprawdźmy, że po prawej stronie wzoru (2.21) mamy

$$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{F}} \frac{\mathrm{C \cdot C}}{\mathrm{m^2}} = \frac{\mathrm{V \cdot m}}{\mathrm{C}} \cdot \frac{\mathrm{C^2}}{\mathrm{m^2}} = \frac{\mathrm{V \cdot C}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}} = \mathrm{N}.$$

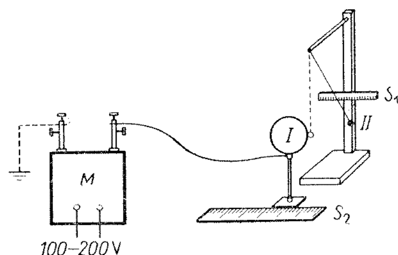
Siłę F można oczywiście wyrazić w dynach, pamiętać jednak trzeba, że prawa strona musi nam dać wówczas liczbę 10^5 razy większą:

$$F = \frac{10^5}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \frac{e_1 e_2}{d^2}. \tag{2.21a}$$

$$(\mathrm{dyn}) \quad \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{F}}\right) \quad \left(\frac{\mathrm{C^2}}{\mathrm{m^2}}\right)$$

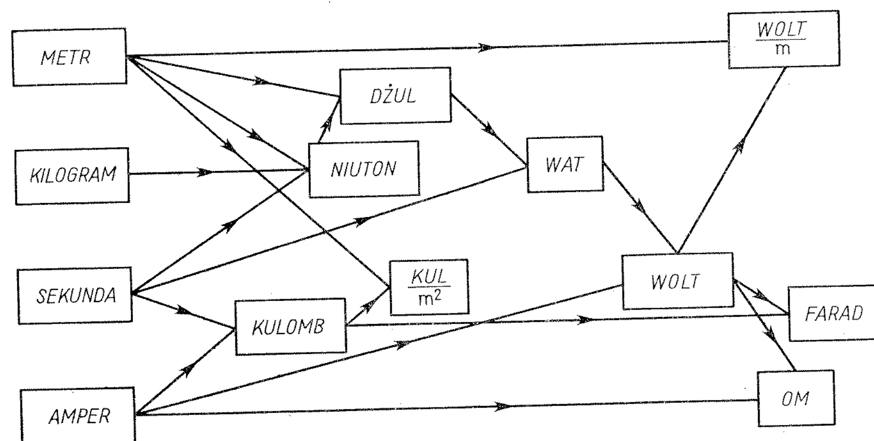
Słuszność prawa Coulomba można udowodnić doświadczalnie, jak pokazuje rys. 2.91. Kulę *I* ładujemy z nieuziemionego bieguna multiplikatora napięcia; natomiast kulce *II* udzielamy ładunku przez zetknięcie na chwilę z kulą *I*. Siłę odpychania obliczamy z kąta wychylenia kulki *II*, jak w paragrafie poprzednim. Odległość d mierzymy przy pomocy

dwóch skal: S_1 — przyklejonej na zwierciadle (dla uniknięcia paralaksy) i S_2 — położonej na stole. Przesuwając kulę I wzdłuż skali S_2 zmieniamy odległość d i stwierdzamy, że iloczyn Fd^2 jest stały, jak wymaga prawo Coulomba.



Rys. 2.91. Urządzenie do sprawdzenia prawa Coulomba. Uwaga: do doświadczenia należy użyć nici doskonale izolującej. Nadaje się do tego celu nić z naturalnego jedwabiu, z polietylenu lub polistyrenu. Sprawdzić jakość nici elektroskopem

*§ 2.42. **Układy jednostek: praktyczny MKSA i elektrostatyczny CGS.** Dotychczas używaliśmy zespołu jednostek, który nazywa się *układem praktycznym MKSA*. Do układu tego wchodzą następujące jednostki (wymieniamy je w takim porządku, w jakim występowały w tej książce): amper, dżul, sekunda, wat, wolt, om, kulomb, farad, metr, $\frac{\text{kulomb}}{\text{m}^2}$, $\frac{\text{wolt}}{\text{m}}$, niuton. Nietrudno zauważyć, że wszystkie te jednostki wywodzą się z trzech podstawowych jednostek układu praktycznego: metra, kilograma (masy), se-



kundy (stąd w nazwie układu litery MKS) oraz z ampera (A) przyjętego, podobnie jak tamte, drogą umowy (por. § 1.10). Więc np. 1) siła nadająca masie 1 kg przyspieszenie 1 m/s^2 = 1 niuton; 2) praca 1 niutona na drodze 1 m = 1 dżul; 3) 1 dżul/1 s = 1 wat; 4) 1 wat/1 amper = 1 wolt; 5) 1 amper·1 s = 1 kulomb itd. Ilustruje to powyższy schemat. Widzimy, że układ ten można było zbudować przede wszystkim dzięki znajomości i zbadaniu zjawiska prądu elektrycznego.

Dzieje rozwoju fizyki potoczyły się jednak w ten sposób, że nie zjawisko prądu elektrycznego, lecz przyciąganie i odpychanie ciał naelektryzowanych zwróciło uwagę pierw-

szych badaczy epoki Odrodzenia (Gilbert i inni). Dalsze, ilościowe badanie tego zjawiska doprowadziło do wykrycia prawa Coulomba. Nic też dziwnego, że prawo to posłużyło do pierwszego w ogóle określenia jednostki elektrycznej, mianowicie jednostki ładunku elektrycznego. Stało się to w następujący sposób.

Przypuśćmy, że kulka przewodząca zostaje zetknięta na chwilę z drugą identyczną kulką mającą pewien ładunek. Po takim zetknięciu kulki uzyskują równe ładunki e, nie wiadomo zresztą, jak wielkie. Jeśli kulki znajdują się w próżni, to prawo Coulomba można napisać tak:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{d^2},$$

gdzie $1/4\,\pi\varepsilon_0$ jest jakimś współczynnikiem proporcjonalności, którego wielkość zależy od obranych jednostek ładunku. Ale jeśli nie istnieje jeszcze żadna umowa określająca jednostkę ładunku, to można $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ uczynić dowolną liczbą (np. równą 1) i na tej podstawie określić jednostkę ładunku. Przyjmijmy więc $4\pi\varepsilon_0 = 1$. Wtedy

$$F = \frac{e^2}{d^2}$$

lub

$$e = d\sqrt{F}. \tag{2.21b}$$

Ze wzoru tego widać, że jeśli na d i F przyjmiemy zasadnicze jednostki CGS (cm i dynę), wówczas e musi być również jednostką; nazwano ją *jednostką elektrostatyczną ładunku*. Mianowicie

$$1 \textit{ jednostka elektrostatyczna ładunku} = 1 \text{ cm}\sqrt{1 \text{ dyn}}.$$

Określenie słowne bardziej trafia do wyobraźni: *jednostka elektrostatyczna ładunku CGS jest to taki ładunek, który na równy sobie ładunek w próżni, z odległości* 1 *cm, działa siłą* 1 *dyny*.

W jakim stosunku pozostaje ta jednostka do kulomba? Ze wzoru (2.21a) widzimy, że ładunek 1 kulomba na drugi taki sam ładunek z odległości 1 cm działałby siłą $9\cdot10^{18}$ dyn. Doświadczenie to jest zresztą niewykonalne. Należałoby wziąć ładunki np. $\frac{1}{3\cdot10^9}$ C, a wówczas działałyby one na siebie z odległości 1 cm siłą 1 dyny:

$$F = 9\cdot10^{18}\,\frac{\left(\frac{1}{3\cdot10^9}\right)^2}{1^2}\,\text{dyn} = 1\ \text{dyn}.$$

Stąd widzimy, że $\frac{1}{3\cdot10^9}$ C jest ładunkiem identycznym z jednostką elektrostatyczną ładunku. Czyli

$$1 \text{ C} = 3\cdot10^9 \text{ jednostek elektrostatycznych ładunku (j. es CGS).}$$

Tablica 2.3

Zestawienie jednostek zasadniczych układu praktycznego i elektrostatycznego

Wielkość fizyczna	Symbole, wzór	Układ praktyczny MKSA	Układ elektrostatyczny CGS	Jednostka praktyczna ma jednostek elektrostatycznych CGS
Długość	s, l, d, r	m	cm	100
Masa	m	kg	g	1000
Czas	t	s	s	1
Siła	F, P	$1\ \text{N} = 1\ \text{kg}\cdot 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	$1\ \text{dyn} = 1\ \text{g}\cdot 1\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}$	10^5
Praca, energia	$L = Fs, E$	$1\ \text{J} = 1\ \text{N}\cdot 1\ \text{m}$	$1\ \text{erg} = 1\ \text{dyn}\cdot 1\ \text{cm}$	10^7
Moc	$M = \frac{L}{t}$	$1\ \text{W} = \frac{1\ \text{J}}{1\ \text{s}}$	$1\ \frac{\text{erg}}{\text{s}}$	10^7
Natężenie prądu	i	1 A	$1\ \text{j. es natężenia prądu} = \frac{1\ \text{j. es ładunku}}{1\ \text{s}}$	$3\cdot 10^9$
Ładunek elektryczny	$e = it$	$1\ \text{C} = 1\ \text{A}\cdot 1\ \text{s}$	$1\ \text{j. es ładunku} = 1\ \text{cm.}\sqrt{1\ \text{dyn}}$	$3\cdot 10^9$
Indukcja, przesunięcie	$D = \frac{e}{S}$	$1\ \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$	$1\ \frac{\text{j. es ładunku}}{\text{cm}^2}$	$3\cdot 10^5$
Napięcie, potencjał	$U = \frac{M}{i}$	$1\ \text{V} = \frac{1\ \text{W}}{1\ \text{A}}$	$1\ \text{j. es napięcia} = \frac{1\ \text{erg}}{1\ \text{j. es ładunku}}$	$\frac{1}{300}$
Natężenie pola elektrycznego	$E = \frac{U_1 - U_2}{l}$	$1\ \frac{\text{V}}{\text{m}}$	$1\ \frac{\text{j. es napięcia}}{\text{cm}}$	$\frac{1}{3}\cdot 10^{-4}$
Opór elektryczny	$R = \frac{U}{i}$	$1\ \Omega = \frac{1\ \text{V}}{1\ \text{A}}$	$1\ \text{j. es oporu} = \frac{1\ \text{j. es napięcia}}{1\ \text{j. es natężenia prądu}}$	$\frac{1}{9}\cdot 10^{-11}$
Pojemność elektryczna	$C = \frac{e}{U}$	$1\ \text{F} = \frac{1\ \text{C}}{1\ \text{V}}$	$1\ \text{j. es pojemności} = \frac{1\ \text{j. es ładunku}}{1\ \text{j. es napięcia}} = 1\ \text{cm}$	$9\cdot 10^{11}$

Jak widać, jednostka elektrostatyczna ładunku jest niezwykle mała. Dlatego do praktycznych celów jest niewygodna. Ma ona jednak poważne znaczenie w nauce. Stanowi tę fundamentalną jednostkę, z której wyprowadza się, w ramach układu CGS (cm, g, s), różne pochodne jednostki elektrostatycznego układu. Oto parę przykładów, w których od razu podajemy przejścia do układu praktycznego.

1. Ze wzoru (2.1) na ładunek: $e = it$ wynika: $i = \frac{e}{t}$;

$$1\ \text{j. es CGS natężenia prądu} = \frac{1\ \text{j. es CGS ładunku}}{1\text{s}} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 10^{-9}\ \text{C}}{1\text{s}} = \frac{1}{3}\cdot 10^{-9}\ \text{A}.$$

2. Ze wzoru (1.6) na pracę prądu elektrycznego $L = Uit$ wynika: $U = \frac{L}{it} = \frac{L}{e}$;

$$1\ \text{j. es CGS napięcia} = \frac{1\ \text{erg}}{1\ \text{j. es CGS ładunku}} = \frac{10^{-7}\text{J}}{\frac{1}{3}\cdot 10^{-9}\text{C}} = 300\ \text{V}.$$

3. Ze wzoru (2.2) na pojemność elektryczną: $C = \frac{e}{U}$;

$$1\ \text{j. es CGS pojemności} = \frac{1\ \text{j. es CGS ładunku}}{1\ \text{j. es CGS napięcia}} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 10^{-9}\text{C}}{300\ \text{V}} = \frac{1}{9}\cdot 10^{-11}\ \text{F itd.}$$

Poznaliśmy zatem dwa układy jednostek wielkości elektrycznych:

1) *układ praktyczny MKSA* — zbudowany na układzie jednostek mechanicznych MKS oraz na jednostce natężenia prądu, amperze, przyjętym według umowy (por. § 1.10, a dokładniej — § 3.12);

2) *układ elektrostatyczny CGS* — zbudowany na układzie jednostek mechanicznych CGS oraz na umowie, że współczynnik proporcjonalności $1/4\pi\varepsilon_0$ w prawie Coulomba równy jest jedności dla próżni.

W tablicy 2.3 na str. 144 podajemy ważniejsze jednostki obu układów.

We wszystkich wzorach stosować można albo jednostki układu praktycznego MKSA albo jednostki układu elektrostatycznego CGS. Pamiętać jednak należy, że jeśli we wzorze występuje współczynnik ε_0, wtedy

$$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \frac{\text{F}}{\text{m}} \quad \text{lub} \quad 4\pi\varepsilon_0 = \frac{1}{9}\, 10^{-9}\ \frac{\text{F}}{\text{m}},$$

gdy używamy jednostek praktycznych, natomiast

$$4\pi\varepsilon_0 = 1,$$

jeśli stosujemy jednostki elektrostatyczne. Dla wygody można niekiedy stosować jednostki „mieszane”, wtedy jednak we wzorze musi się pojawić odpowiedni czynnik liczbowy [patrz np. wzór (2.21a)].

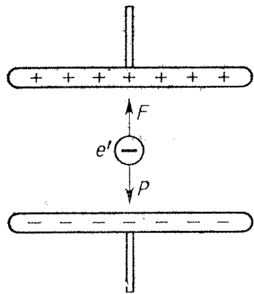
*§ **2.43. Pomiar ładunku elektronu.** Wyobraźmy sobie, że pomiędzy płytkami kondensatora płaskiego znajduje się maleńka kulka mająca ujemny ładunek elektryczny e'. Siła $F = e'E$ działająca na kulkę jest skierowana ku górze (rys. 2.92). Można tak dobrać natężenie pola elektrycznego E, aby siła F dokładnie zrównoważyła ciężar P kulki.

Wówczas

$$P = e'E.$$

Z równania tego można obliczyć ładunek kulki e' zmierzywszy E i P.

Tego rodzaju doświadczenia wykonywał R. A. Millikan w roku 1908. Obserwował on w polu kondensatora kuleczki rozpylonego oleju. Ponieważ ich średnica była rzędu 1 μ, obserwacji dokonywał przez mikroskop. Każda kuleczka wychodząc z rozpylacza elektryzowała się przez tarcie. Otóż Millikan zauważył, że kuleczka oleju, będąca w pewnej chwili w spokoju ($P = e'E$), nagle zyskuje pewną prędkość ku górze lub ku dołowi, tak jakby zyskała jakiś dodatkowy ładunek ujemny lub dodatni. Millikan wytłumaczył to



Rys. 2.92. Zasada pomiaru ładunku elektronu (w daleko idącym uproszczeniu). Między płytkami kondensatora unosi się kuleczka rozpylonego oleju

trafnie, że na kulce oleju osadza się od czasu do czasu to jon ujemny, to znów dodatni (powietrze było specjalnie zjonizowane). Dzięki temu ładunek początkowy kulki (e') raz się zwiększa, drugi raz się zmniejsza, mianowicie o ładunek schwytanego jonu. Następnie Millikan zaobserwował, że owe zwiększania się i zmniejszania ładunku nie są dowolne, lecz są niewielką wielokrotnością pewnej ściśle określonej liczby. Stąd płynie wniosek, że ładunek jonów składa się z pewnej całkowitej liczby jakichś „ładunków elementarnych", które byłyby swego rodzaju atomami elektryczności (elektronami). Na podstawie obserwacji i bardzo drobiazgowych pomiarów Millikan otrzymał wartość ładunku elementarnego

$$e = 4{,}80 \cdot 10^{-10} \text{ j.es ładunku.}$$

Liczba zgadza się doskonale z najnowszymi pomiarami ładunku elektronu, wykonanymi przez innych uczonych, na podstawie zupełnie odmiennych doświadczeń. Fakt, że ładunek elektryczny nie występuje nigdy, w żadnym doświadczeniu, w drobniejszych „porcjach" aniżeli powyżej podane e, przemawia za atomistyczną budową elektryczności.

***§ 2.44. Praca sił w polu elektrycznym.** Wyobraźmy sobie, że w polu elektrycznym jednorodnym, w próżni lub w jakimkolwiek ośrodku dielektrycznym, przesuwa się ładunek $+e$ z punktu A do Z zgodnie z kierunkiem linii sił. Pole elektryczne wykona pracę, podobnie jak pole grawitacyjne, gdy zmusza kamień do spadnięcia na ziemię. Pracę tę obliczymy z łatwością jako iloczyn drogi AZ, którą oznaczymy literą l, oraz siły F, która, jak wiemy ze wzoru (2.20), równa się eE. Mamy więc

$$L = eEl.$$

Przypomnijmy sobie jednak, że iloczyn El jest niczym innym, jak różnicą potencjałów między punktami A i Z [wzór (2.10)], zatem

$$\underset{(J)}{L} = \underset{(C)}{e}\ \underset{(V)}{(U_A - U_Z)} = \underset{(C)(V)}{eU}. \tag{2.22}$$

Widzimy, że praca wykonana przez pole na przeniesienie ładunku z punktu A do Z, równa się po prostu iloczynowi ładunku i napięcia, jakie wzdłuż drogi swojej przebył ładunek.

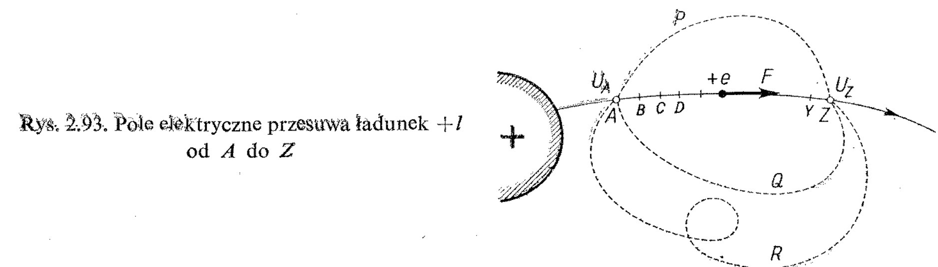
W powyższym zjawisku mieliśmy do czynienia z ruchem ładunku e, przenoszonym np. na kulce z punktu A o potencjale U_A do punktu Z o potencjale U_Z, przy czym $U_A > U_Z$. Wyobraźmy teraz sobie, że tę samą różnicę potencjałów $U_A - U_Z = U$ przebywa ten sam ładunek, ale przejście ładunku odbywa się pod postacią prądu elektrycznego o natężeniu i, w czasie t, płynącego w jakimś przewodniku, którego punkty A i Z mają potencjały U_A i U_Z. Ponieważ ładunek ma być ten sam, przeto $it = e$. Wówczas praca, jaką wykonują siły pola elektrycznego pędząc ładunek it, tzn. praca prądu, wyraża się wzorem

$$\underset{(J)}{L} = \underset{(A)(s)(V)}{itU} = \underset{(C)(V)}{eU}. \tag{2.22a}$$

Widzimy, że jest ona identyczna z pracą poprzednią (2.22). A zatem niezależnie od tego, czy siły pola elektrycznego przenoszą ładunek razem z ciałem, na którym ten ładunek znajduje się (prąd konwekcyjny), czy też przesuwają go wewnątrz przewodnika, do którego przyłożona jest różnica potencjałów (prąd przewodzony), to praca sił pola elektrycznego zawsze wyraża się iloczynem eU, gdzie U jest różnicą potencjałów przebytą przez ładunek e.

Warto jeszcze sobie przypomnieć, że 1 wolt został określony ze wzoru (1.6), albo (2.22a) jako $1\,\frac{J}{A\cdot s}$ $\left(\text{czyli } 1\,\frac{J}{C}\right)$, co spowodowało, że we wzorze tym, a zatem i w (2.22), jako współczynnik występuje 1 ($L = 1\ eU$). Z tego więc powodu i we wzorze (2.20), $F = eE$, z którego wywodzi się (2.22), współczynnikiem jest 1 (patrz § 2.40). Nie jest to więc dziełem przypadku, lecz wynika z wyboru definicji 1 wolta i z równoważności pracy prądu konwekcyjnego i przewodzonego.

Od wypadku, w którym ładunek e poruszał się w polu jednorodnym, przejdziemy do wypadku ogólniejszego, w którym ładunek porusza się w polu niejednorodnym (rys. 2.93) z punktu A do Z wzdłuż linii sił. Obecnie nie możemy pracy obliczać jako iloczynu siły F



Rys. 2.93. Pole elektryczne przesuwa ładunek $+l$ od A do Z

i drogi AZ, gdyż siła F zmienia się wzdłuż drogi. Użyjmy więc znanego sposobu, który polega na podzieleniu drogi AZ na bardzo wiele odcinków: AB, BC, CD itd., tak małych, aby wzdłuż każdego z nich można było uważać siłę za stałą. Niech długość każdego z tych odcinków wynosi Δs, a siły działające na ładunek $+e$, gdy ten znajduje

się kolejno na tych odcinkach, niech wynoszą odpowiednio: $F_1, F_2, F_3, ...$, itd. Wówczas praca L, jaką wykona pole przesuwając ładunek $+e$ z punktu A do Z, wynosi

$$L = F_1 \cdot \Delta s + F_2 \cdot \Delta s + F_3 \cdot \Delta s + ... = eE_1 \cdot \Delta s + eE_2 \cdot \Delta s + eE_3 \cdot \Delta s + ...,$$

gdzie $E_1, E_2, E_3, ...$ są to natężenia pola panujące na kolejnych odcinkach. Ale ze wzoru (2.10) wiemy, że $E_1 = \frac{U_A - U_B}{\Delta s}$, $E_2 = \frac{U_B - U_C}{\Delta s}$, $E_3 = \frac{U_C - U_D}{\Delta s}, ...$, gdzie $U_A, U_B, U_C, ...$, są to potencjały panujące w punktach A, B, C, ... Wobec tego

$$L = e[(U_A - U_B) + (U_B - U_C) + (U_C - U_D) + ... + (U_Y - U_Z)].$$

Po wykonaniu dodawania w nawiasie otrzymujemy

$$L = e(U_A - U_Z),$$

czyli ten sam wzór (2.22) wyprowadzony poprzednio dla pola jednorodnego. Wzór ten mówi nam, że *w dowolnym polu elektrycznym (a więc i niejednorodnym) praca wykonana przez pole na przesunięcie ładunku z punktu A do Z równa jest iloczynowi tego ładunku i różnicy potencjałów między tymi punktami*: $e(U_A - U_Z)$.

Aby zastosować do tego zagadnienia metodę rachunku całkowego, wyraźmy powyższe sumowanie za pomocą symbolu sumy (Σ):

$$L = \Sigma\, e\, E\, \Delta s.$$

Przechodząc do granicy dla $\Delta s \to 0$ mamy

$$L = \int_A^Z eE\, ds.$$

Praca w polu elektrycznym wyraża się więc „całką krzywoliniową" siły, rozciągniętą od punktu A do Z wzdłuż linii sił. Jak się okaże w § 2.45, całka ta może być rozciągnięta wzdłuż jakiejkolwiek drogi prowadzącej od punktu A do Z. Wtedy jednak iloczyn $E\Delta s$ musi być zastąpiony iloczynem skalarnym dwóch wektorów: $\mathbf{E}\Delta\mathbf{s}$. W symbolice rachunku całkowego napiszemy

$$L = \int_A^Z e\mathbf{E}\, d\mathbf{s}.$$

Ponieważ ładunek e jest wielkością stałą, możemy go wynieść przed znak całki. Z drugiej strony $\mathbf{E}\, d\mathbf{s}$ jest spadkiem potencjału $-dU$ panującym na końcach każdego z odcinków. Otrzymamy zatem

$$L = e\int_A^Z \mathbf{E}\, d\mathbf{s} = -e\int_{U_A}^{U_Z} dU = e\int_{U_Z}^{U_A} dU = e(U_A - U_Z). \qquad (2.23)$$

***§ 2.45. Pole elektryczne jest zachowawcze.** Praca wykonana przez pole może być dostarczona na zewnątrz, np. jakiemuś niezmiernie delikatnemu mechanizmowi; może być również zamieniona wskutek tarcia na ciepło. W obu przypadkach układ wykonując tę pracę zmniejsza swoją energię potencjalną. Energia potencjalna układu (rys. 2.93), gdy ładunek $+e$ znajduje się w punkcie A, jest większa aniżeli energia tego samego układu, gdy ładunek $+e$ spoczywa w punkcie Z: $E_A > E_Z$. W myśl zasady zachowania energii różnica tych energii E_A i E_Z równać się musi wykonanej pracy

$$E_A - E_Z = L_{AZ} = e(U_A - U_Z).$$

Gdyby jakieś siły zewnętrzne zmusiły ładunek $+e$ do powrotu z punktu Z do punktu A, wówczas musiałyby wykonać pracę dokładnie taką samą, ponieważ energia układu musi wrócić do dawnej wartości E_A. Nic bowiem w rozkładzie i wielkości ładunków nie zmieniło się podczas przesunięcia ładunku $+e$ z A do Z i z powrotem. Zatem praca sił pola na drodze AZA jest zerem, skoro energia E_A pola nie zmieniła się: $L_{AZ} + L_{ZA} = 0$, stąd $L_{AZ} = -L_{ZA}$. Ponieważ L_{AZ} uznajemy za wielkość dodatnią (bo $U_A > U_Z$), przeto L_{ZA} jest wielkością ujemną. Przez pracę ujemną rozumiemy więc pracę wykonaną wbrew siłom pola; pracę, która nie jest wykonana na koszt energii układu, lecz która energię układu powiększa.

Gdyby jednak jakieś zewnętrzne siły zmusiły ładunek $+e$ do powrotu z punktu Z do punktu A, ale nie wzdłuż dawnej jego drogi, lecz wzdłuż innej (np. na rys. 2.93 — ZPA, ZQA lub ZRA), to czy energia E_A układu wróciłaby do dawnej wartości, czy do innej? Odpowiedzieć na to musimy: do dawnej, ponieważ gdy ładunek $+e$ znalazł się znów w punkcie A, w układzie nic się nie zmieniło: ani ładunki, ani ich położenie. Po prostu nie ma żadnego śladu „wycieczki", jaką odbył ładunek $+e$. Stąd płynie prosty wniosek, że praca sił nie zależy od tego, po jakiej drodze posuwał się ładunek

$$L_{ZA} = L_{ZPA} = L_{ZQA} = L_{ZRA} = e(U_Z - U_A). \qquad (2.24)$$

Podobne równości muszą mieć miejsce i dla przesunięć ładunku w kierunku przeciwnym

$$L_{AZ} = L_{APZ} = L_{AQZ} = L_{ARZ} = e(U_A - U_Z). \qquad (2.24a)$$

Z powyższych równości wynika, że np.

$$L_{APZ} + L_{ZQA} = 0, \qquad (2.24b)$$

co oznacza, *że praca, jaką wykonają siły pola elektrycznego podczas przesunięcia ładunku wzdłuż toru zamkniętego, jest zerem.* Na drodze APZ układ energię traci ($L_{APZ} > 0$, tj. układ wykonuje pracę), natomiast na drodze ZQA układ straconą energię odzyskuje ($L_{ZQA} < 0$, tj. siły zewnętrzne wykonują pracę).

Właściwość wyrażoną powyższymi równościami wypowiadamy krócej mówiąc, że *pole elektryczne jest zachowawcze*. Właściwość ta wiąże się ściśle z zasadą zachowania energii, z niemożliwością istnienia *perpetuum mobile*.

Właściwość zachowawczości pola elektrycznego, którą wyraża równość (2.24b), możemy zapisać w symbolice rachunku całkowego w następujący sposób:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{s} = 0, \qquad (2.25)$$

gdzie symbol całki z kółkiem oznacza, że całka rozciągnięta jest wzdłuż dowolnej linii zamkniętej, np. wzdłuż linii $APZQA$.

***§ 2.46. Energia ciała naelektryzowanego.** Wyobraźmy sobie, że elektryzowanie jakiegoś przewodnika odizolowanego, np. A na rys. 2.94, odbywa się w ten sposób, że płytką próbną przenosimy z bardzo wielkiej odległości ładunek Δe do wnętrza przewodnika A.

Za pierwszym razem przewodnik zyska potencjał, który według wzoru (2.2) § 2.7 będzie

$$\Delta U = \frac{\Delta e}{C},$$

gdzie C jest pojemnością przewodnika A. Za drugim razem potencjał będzie dwa razy wyższy, ponieważ ładunek podwoił się

$$2\Delta U = \frac{2\Delta e}{C};$$

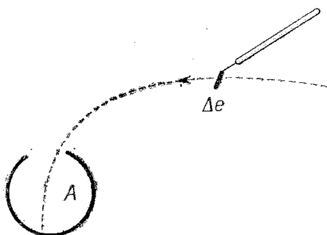
za trzecim razem potencjał będzie trzy razy wyższy itd. Za każdym razem przyrost potencjału wynosi więc

$$\Delta U = \frac{\Delta e}{C}$$

(patrz wykres na rys. 2.95). Czynność przenoszenia ładunku Δe powtarzamy tyle razy (powiedzmy n razy), aż przewodnik A uzyska żądany potencjał U

$$U = \frac{n \cdot \Delta e}{C} = \frac{e}{C}.$$

Zadaniem naszym jest obliczenie pracy wykonanej przez siły zewnętrzne podczas naładowania przewodnika A do potencjału U ładunkiem $e = n \cdot \Delta e$. Przypuśćmy, że



Rys 2.94. Proces ładowania kuli A: po każdym wprowadzeniu ładunku Δe potencjał kuli rośnie o ΔU (patrz wykres na rys. 2.95)

w pewnej chwili, np. po k-tym wprowadzeniu ładunku Δe, potencjał przewodnika A jest U_k. Wówczas, podczas następnego przenoszenia ładunku Δe, siły zewnętrzne muszą wykonać pracę L', którą oblicza się ze wzoru (2.22):

$$L' = U_k \Delta e$$

(ponieważ U_Z — potencjał punktu bardzo znacznie oddalonego od przewodnika A — praktycznie równa się zeru). Praca L' równa jest polu wąskiego paska, zakreskowanego na rys. 2.95. Jeśli paski są bardzo wąskie, tzn. Δe jest małe w stosunku do e (czyli n — bardzo duże), wówczas całkowita praca L, wykonana podczas wszystkich „przenosin" n ładunków Δe na przewodnik A, równa jest sumie pól wszystkich pasków trójkąta z rys. 2.95, czyli po prostu polu tego trójkąta. Ponieważ podstawa tego trójkąta $= e$, wysokość U, przeto

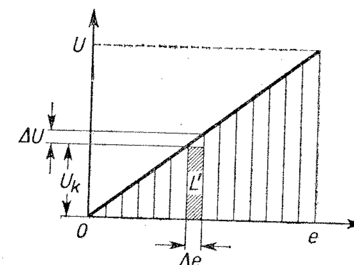
$$L = \tfrac{1}{2} eU.$$

Tyle wynosi energia naładowanego przewodnika. Będziemy oznaczali ją literą E', aby uniknąć pomieszania z natężeniem pola elektrycznego E:

$$\underset{\substack{(\mathrm{J})\\(\mathrm{erg})}}{E'} = \frac{1}{2}\ \underset{\substack{(\mathrm{C})\\ \left(\text{j.es ładunku}\right)}}{e}\ \underset{\substack{(\mathrm{V})\\ \left(\text{j.es napięcia}\right)}}{U}. \qquad (2.26)$$

Podczas rozbrojenia przewodnika A, np. przez opór do ziemi, energia ta zamieni się całkowicie na ciepło wydzielone w oporze.

Rys. 2.95. Wykres procesu ładowania kuli z rys. 2.94



Przewodnik A tworzy względem ziemi swego rodzaju kondensator, którego pojemność oznaczyliśmy przez C. Wiedząc ze wzoru (2.2), że $C = \frac{e}{U}$, możemy wzór wyrażający energię E' napisać w następujących postaciach:

$$E' = \frac{1}{2}\frac{e^2}{C} \qquad (2.26a)$$

lub

$$E' = \tfrac{1}{2} CU^2. \qquad (2.26b)$$

Obliczenie energii ciała naelektryzowanego wykonać można znacznie prościej, stosując rachunek całkowy. Zamiast sumować prace elementarne $L' = U_k \Delta e$ całkujemy U względem zmiennej e w granicach od 0 do e (por. rys. 2.95):

$$E' = \int_0^e U\,de.$$

Ponieważ $U = \frac{e}{C}$, mamy:

$$E' = \frac{1}{C}\int_0^e e\,de = \frac{1}{C}\frac{e^2}{2},$$

co jest identyczne ze wzorem (2.26a).

***§ 2.47. Energia kondensatora płaskiego. Gęstość energii elektrycznej.** Rozumowanie poprzedniego paragrafu absolutnie w niczym się nie zmieni, jeśli kondensator „przewodnik A — ziemia" zmieni w jakikolwiek sposób swoją postać, odległość „okładek" i pojemność. „Okładki" jego mogą nawet przybrać postać płyt kondensatora płaskiego.

Energia jego będzie w dalszym ciągu wyrażała się wzorami (2.26)—(2.26b), w których U oznaczać będzie już nie potencjał, lecz napięcie między płytkami kondensatora (patrz rys. 2.96).

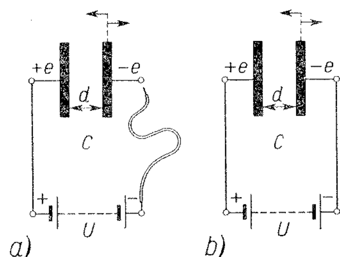
Jeśli kondensator jest płaski, pojemność jego wyraża się wzorem (2.14a). Podstawiając to wyrażenie do wzorów (2.26a, b), mamy

$$E' = \frac{1}{2\varepsilon_0\varepsilon}\frac{e^2}{S}d, \tag{2.27}$$

lub

$$E' = \frac{\varepsilon_0\varepsilon}{2}\frac{U^2}{d}S. \tag{2.27a}$$

Wzory te mówią, że przy stałym ładunku e (kondensator odłączony od źródła prądu) energia kondensatora jest proporcjonalna do odległości d płytek; natomiast przy stałym napięciu (kondensator dołączony do źródła prądu) energia kondensatora jest odwrotnie proporcjonalna do d (patrz rys. 2.96).



Rys. 2.96. a) Przy stałym ładunku e energia kondensatora jest odwrotnie proporcjonalna do jego pojemności C: $E' = \frac{1}{2}\frac{e^2}{C}$. (Zbliżenie płyt zmniejsza napięcie i energię).
b) Przy stałym napięciu U energia kondensatora jest wprost proporcjonalna do jego pojemności C: $E' = \frac{1}{2}CU^2$. (Zbliżenie płyt zwiększa ładunek i energię)

Uwaga: przypominamy, że we wzorach powyższych, podobnie jak we wszystkich innych, wielkości E', S, d, e, U mogą być wyrażone albo w zasadniczych jednostkach praktycznych, jeśli przyjmiemy

$$4\pi\varepsilon_0 = \frac{1}{9}\cdot 10^{-9}\frac{\text{F}}{\text{m}}$$

albo w zasadniczych jednostkach elektrostatycznych, jeśli przyjmiemy

$$4\pi\varepsilon_0 = 1$$

(por. § 2.42).

Na przykład:

$$\underset{(\text{J})}{E'} = \underset{\left(\frac{\text{F}}{\text{m}}\right)}{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{2}}\ \underset{\left(\frac{\text{V}^2}{\text{m}}\right)}{\frac{U^2}{d}}\ \underset{(\text{m}^2)}{S}$$

albo

$$\underset{(\text{erg})}{E'} = \frac{\varepsilon}{8\pi}\ \underset{\frac{(\text{j. es napięcia})^2}{(\text{cm})}}{\frac{U^2}{d}}\ \underset{(\text{cm})^2}{S}. \tag{2.27b}$$

Wzór na energię kondensatora płaskiego wyrazić jeszcze możemy w sposób odmienny, rzucający nowe światło na to zagadnienie. Ze wzoru (2.27a) widzimy, że energia ta wynosi $\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{2}\left(\frac{U}{d}\right)^2 Sd$, gdzie U/d oznacza natężenie pola elektrycznego E między płytkami kondensatora, zaś $Sd = V$ jest objętością, jaką wypełnia pole elektryczne. Otrzymujemy więc

$$E' = \frac{\varepsilon_0\varepsilon}{2}E^2V. \tag{2.27c}$$

Widzimy, że energia naładowanego kondensatora jest proporcjonalna do kwadratu natężenia pola E^2 i do objętości V zajmowanej przez pole. Energia ta znika, gdy znika pole. Możemy ją śmiało nazwać *energią pola elektrycznego*. Ponieważ jest ona proporcjonalna do V, przeto na każdą jednostkę objętości przypada ilość energii wyrażona wzorem

$$\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{2}E^2.$$

Wyrażenie to nazywamy *gęstością energii* w polu elektrycznym:

$$\varrho = \frac{E'}{V} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon}{2}E^2. \tag{2.28}$$

Ponieważ indukcja w tym polu $D = \varepsilon_0\varepsilon E$, przeto wyrażenie na gęstość energii elektrycznej można napisać również w postaci

$$\varrho = \frac{1}{2}DE. \tag{2.29}$$

Wzór ten można otrzymać bezpośrednio z wyrażenia (2.26), jeśli w nim e podzielimy przez S, a U przez d

$$\underset{\left(\frac{\text{J}}{\text{m}^3}\right)}{\varrho} = \frac{1}{2}\cdot\frac{e}{S}\,\frac{U}{d} = \frac{1}{2}\ \underset{\left(\frac{\text{C}}{\text{m}^2}\right)}{D}\ \underset{\left(\frac{\text{V}}{\text{m}}\right)}{E}.$$

Wzór (2.27c) wyrażający energię w polu elektrycznym mówi nam, że energia pola elektrycznego rozmieszczona jest w całej przestrzeni wypełnionej polem elektrycznym. Zatem siedliskiem energii kondensatora nie są jego płytki (które są siedliskiem ładunku), lecz przestrzeń między płytami.

§ 2.48. Siła wzajemnego przyciągania się dwu płytek kondensatora płaskiego. Na rysunku 2.97 F oznacza siłę, z jaką przyciągają się płytki kondensatora płaskiego. Przypuśćmy, że pod wpływem tej siły odległość płyt zmniejsza się od d do d'. Powoduje to — jeśli kondensator jest odłączony od źródła prądu — zmniejszenie się jego energii elektrycznej o

$$\Delta E' = \frac{e^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}d - \frac{e^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}d' = \frac{e^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}(d-d').$$

Kondensator, zmniejszając swoją energię o $\Delta E'$ wykonał pracę wynoszącą $F(d-d')$. Na podstawie zasady zachowania energii

$$E' = F(d-d').$$

Stąd obliczamy siłę

$$F = \frac{1}{2\varepsilon_0\varepsilon}\frac{e^2}{S}.$$

Wzór ten wskazuje nam proporcjonalność siły i kwadratu ładunku. Ale możemy z łatwością ładunek wyrugować z tego wzoru i zastąpić go napięciem. Podstawmy w tym celu

$$e = CU$$

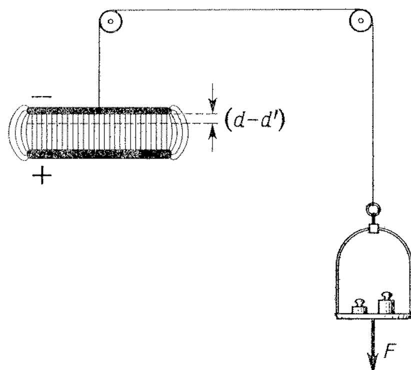
oraz

$$C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}.$$

Otrzymamy

$$F = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{2d^2}U^2. \tag{2.30}$$

Wzór ten stwierdza, że siła wzajemnego przyciągania się płyt kondensatora płaskiego jest proporcjonalna do kwadratu napięcia panującego między jego płytami. Wzór ten



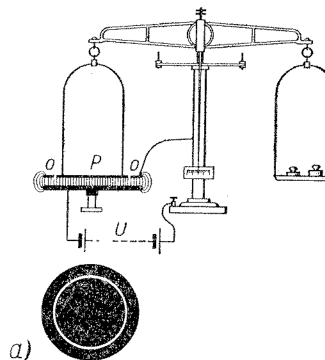
Rys. 2.97. Płyty kondensatora przyciągają się i zbliżając się wzajemnie wykonują pracę

nie przestanie być słuszny i wtedy, gdy kondensator *dołączymy na stałe* do źródła prądu; bowiem przez to nie zmieni się absolutnie ani jego ładunek, ani jego napięcie.

§ 2.49. Elektrometr bezwzględny. Załóżmy we wzorze (2.30) $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi}$, co nas zobowiązuje do stosowania jednostek elektrostatycznych CGS. Jeśli kondensator wypełniony jest powietrzem ($\varepsilon = 1$), wzór (2.30) przybiera postać

$$F = \frac{S}{8\pi d^2}U^2. \tag{2.30a}$$

Widzimy, że wielkości F, S i d dadzą się z łatwością zmierzyć, co pozwala obliczyć napięcie U. Osobliwością tej metody opartej na powyższym wzorze jest to, że pomiar napięcia elektrycznego sprowadza się do pomiarów wielkości nieelektrycznych: siły, powierzchni i odległości. Przyrząd do tego celu służący przedstawia rys. 2.98. Nazywa się on *elektrometrem bezwzględnym*. Opracowany został w r. 1860 przez Williama Thomsona, który za zasługi naukowe odznaczony został tytułem Lorda Kelvina.



Rys. 2.98. Schematyczny rysunek elektrometru bezwzględnego. a) Widok z góry płytki P i pierścienia ochronnego OO

Z rysunku widać, że elektrometr bezwzględny jest właściwie wagą. Jedna z jej szalek (P) jest „okładką" kondensatora płaskiego, a raczej częścią tej okładki, gdyż całą okładkę stanowi płytka P wespół z „pierścieniem ochronnym" OO umocowanym nieruchomo. Płytka i pierścień połączone są przez korpus wagi z jednym z biegunów źródła prądu. Rola pierścienia ochronnego jest zrozumiała z rysunku: sprawia on, że płytka P bierze udział w wytworzeniu dokładnie jednorodnego pola elektrycznego. Natomiast pole niejednorodne (brzegowe) wytwarza się między dolną płytką a pierścieniem ochronnym. Jest to szczegół dużej wagi, gdyż wzór (2.30a) słuszny jest tylko dla pola jednorodnego (S w tym wzorze oznacza więc powierzchnię płytki bez pierścienia ochronnego). Pomiar napięcia sprowadza się do zrównoważenia siły F ciężarkami umieszczonymi na drugiej szalce. „Zważywszy" w ten sposób siłę F (w dynach), obliczamy ze wzoru (2.30a) napięcie badane U (w j. es napięcia). Metoda ta, jako pierwsza metoda *bezwzględnego* pomiaru napięcia, odegrała w nauce ważną rolę; jest jednak bardzo kłopotliwa i w laboratoriach nie jest już dzisiaj stosowana. Wyparta została przez elektrometry *względne*, tzn. wymagające kalibrowania. Jeden z takich elektrometrów, tzw. wskazówkowy, używaliśmy już często. Przypominam, że wykalibrowaliśmy go woltomierzem, a więc przyrządem, który mierzy właściwie natężenie prądu płynącego przez znany opór. Pomiary napięcia zatem opieraliśmy na wzorcach ampera i oma. Dopiero elektrometr bezwzględny pozwala pomiar napięcia uniezależnić od tych wzorców i oprzeć tylko na pomiarach długości i siły.

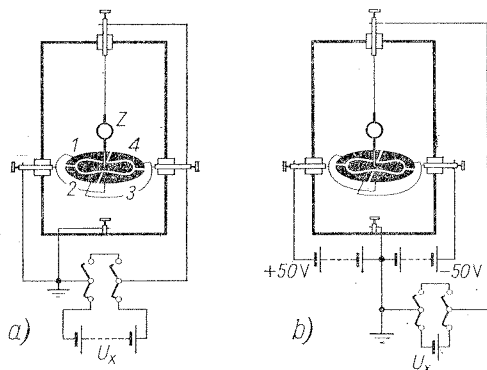
Istnieje bardzo wiele typów elektrometrów względnych. Budowa ich zależy głównie od zakresu napięć, które mają mierzyć. Można by z grubsza podzielić napięcia na 3 zakresy; dla każdego z tych zakresów wymieńmy przynajmniej jeden typ stosowanego elektrometru.

Napięcia niskie: od 1 mV do 100 V — elektrometr kwadrantowy, elektrometr nitkowy.

Napięcia średnie: od 100 V do 1 kV — elektrometr wskazówkowy.

Napięcia wysokie: od 1 kV do kilkuset kV — elektrometry wysokonapięciowe (wskazówkowy, zwierciadłowy).

§ **2.50. Elektrometr kwadrantowy.** Schematycznie wyobraża go rys. 2.99a. Cztery płytki (*1, 2, 3* i *4*) w kształcie ćwiartek koła, czyli tzw. „kwadranty", połączone są przeciwległymi parami (*1* i *3*, *2* i *4*) z biegunami badanego źródła prądu (U_x). Nad kwadrantami, w niewielkiej odległości, zawieszona jest na metalowej nici lekka płytka kształtem swoim przypominająca ósemkę. Połączona jest ona z jedną parą kwadrantów; rys. 2.99a pokazuje ją w położeniu nieodchylonym. Po dołączeniu napięcia U_x płytka wychyla się z położenia początkowego. Wielkość wychylenia odczytuje się metodą optyczną (patrz rys. 1.16). Oczywiście przyrząd należy wykalibrować.



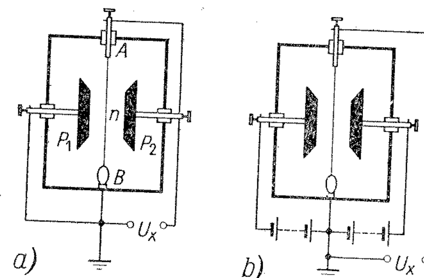
Rys. 2.99. Elektrometr kwadrantowy w rysunku schematycznym: a) połączenie idiostatyczne, b) połączenie heterostatyczne

Przedstawiony na rys. 2.99a sposób łączenia elektrometru ze źródłem napięcia U_x nazywa się połączeniem *idiostatycznym*. Istnieje jeszcze inny sposób, wyobrażony na rys. 2.99b, zwany *heterostatycznym*. Do obu par kwadrantów przykłada się napięcie pomocnicze z baterii akumulatorów tak, aby na jednej parze kwadrantów był potencjał np. + 50 V, a na drugiej — 50 V (dlatego bateria jest w środku uziemiona). Gdy na ruchomej płytce elektrometru panuje potencjał zero, ma ona wówczas położenie symetryczne, zwane położeniem „zerowym". Po przyłożeniu do niej badanego potencjału $\pm U_x$, płytka wychyla się w tę lub tamtą stronę, zależnie od znaku potencjału.

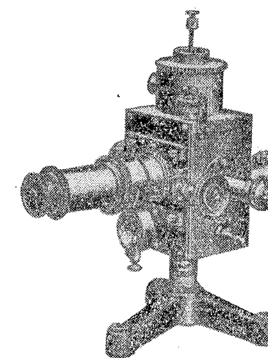
W celu ochronienia elektrometru przed zakłócającym wpływem ładunków elektrycznych z zewnątrz (np. powstających podczas działania maszyn elektrycznych, od instalacji elektrycznej, a nawet chodzenia, przesuwania przedmiotów itp.), elektrometr zamknięty jest w osłonie metalowej, którą należy uziemić.

W czulszych elektrometrach kwadranty tworzą rodzaj puszki, przekrojonej na czworo, wewnątrz której umieszczona jest płytka. Czułość elektrometrów kwadrantowych w połączeniu idiostatycznym, dochodzi do 1 V, zaś w połączeniu heterostatycznym — do ułamka mV.

§ **2.51. Elektrometr nitkowy.** Elektrometr ten wyobraża rys. 2.100. W polu elektrycznym, wytworzonym między płytkami P_1 i P_2, znajduje się bardzo cienka nić platynowa *n* napięta między pręcikiem *A* i „oczkiem" *B* z cienkiego włókna kwarcowego. Nić wygina się w prawo lub w lewo, zależnie od ładunku, jaki jej udzieli dołączone źródło prądu o badanym napięciu U_x. Elektrometr nitkowy można stosować, jak pokazują rys. 2.100a i b, zarówno w układzie idiostatycznym, jak i heterostatycznym. Przesunięcie środka nici (*n*) obserwuje się przez mikroskop wbudowany w osłonę elektrometru (rys. 2.101); okular mikroskopu zaopatrzony jest w podziałkę. Elektrometr należy oczywiście wykalibrować.



Rys. 2.100. Rysunek schematyczny elektrometru nitkowego w układzie: a) idiostatycznym, b) heterostatycznym

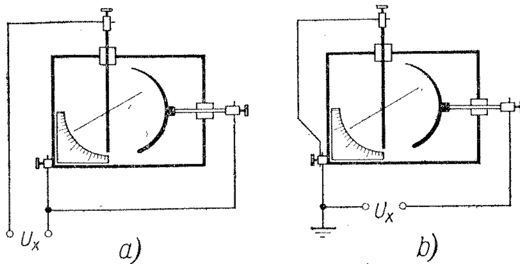


Rys. 2.101. Wygląd elektrometru nitkowego Wulfa

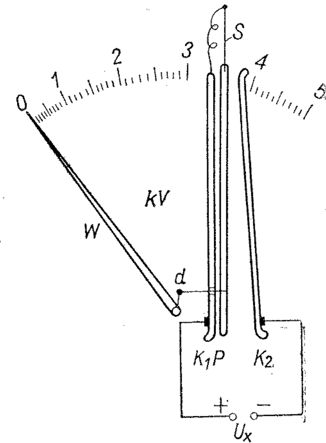
Dla otrzymania możliwie wielkich wychyleń (wielkiej czułości), płytki P_1 i P_2 nie są płaskie, lecz mają postać zbliżoną do ostrza brzytwy, przy czym ostre krawędzie zwrócone są ku nitce. Nitka znajduje się zatem w polu silnie niejednorodnym. Elektrometry nitkowe odznaczają się wielkim zakresem napięć, jakie można nimi mierzyć, mianowicie: w układzie heterostatycznym od 1 mV do 1 V, a w układzie idiostatycznym od 1 V do około 1 kV. Zakres czułości elektrometru zmienia się przez zmianę odległości płytek oraz przez silniejsze lub słabsze naciągnięcie nici. Obu tych regulacji dokonuje się za pomocą odpowiednich śrub mikrometrycznych widocznych na fotografii (rys. 2.101).

§ **2.52. Elektrometr wskazówkowy wysokonapięciowy.** W § 2.10 poznaliśmy elektrometr wskazówkowy, służący do mierzenia napięć w zakresie od 100 do 2000 V. Do mierzenia wyższych napięć służy elektrometr przedstawiony na rys. 2.102; jest to elektrometr wskazówkowy wysokonapięciowy. Wygodnym typem elektrometru wysokonapięciowego jest „woltomierz elektrostatyczny", którego działanie jest zrozumiałe ze schematu przedstawionego na rys. 2.103.

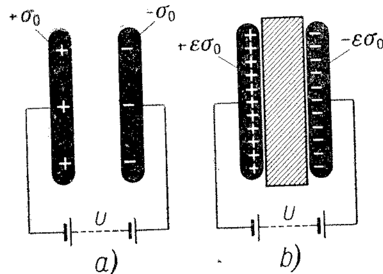
Do mierzenia napięć jeszcze wyższych (dziesiątki i setki kV) stosuje się elektrometry o bardzo dużych rozmiarach, w których wszystkie części mające wysoki potencjał, dla uniknięcia wypływów, muszą być łagodnie zaokrąglone. Jeśli nie chodzi o dużą dokładność, wielkość wysokiego napięcia można oceniać według długości iskry między kulami (patrz § 2.22).



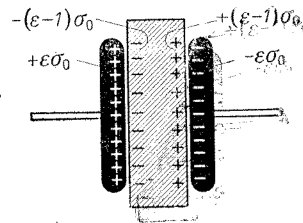
Rys. 2.102. Elektrometr wskazówkowy wysokonapięciowy: a) w połączeniu idiostatycznym, b) w połączenin indukcyjnym



Rys. 2.103. Woltomierz elektrostatyczny. Między płytkami K_1 i K_2 kondensatora porusza się płytka P, zamocowana na sprężynce S. Ruch jej przenosi się za pośrednictwem dźwigni d na wskazówkę W. Połączenie stałe idiostatyczne



Rys. 2.104. a) Kondensator próżny dołączony do baterii o napięciu U. Natężenie pola równa się E_0, gęstość ładunku wynosi σ_0. b) Po wprowadzeniu dielektryka pojemność kondensatora zwiększyła się i nowe ładunki dopłynęły z baterii do płyt. Natężenie pola równa się E_0, gęstość ładunku równa się $\varepsilon\sigma_0$



Rys. 2.105. Polaryzacja dielektryka w polu elektrycznym kondensatora płaskiego

E. Dielektryk w polu elektrycznym

§ 2.53. Dielektryk w polu kondensatora. Płytki próżnego kondensatora płaskiego połączmy z biegunami źródła prądu o stałym napięciu U (rys. 2.104a). Między płytkami panuje pole jednorodne z wyjątkiem brzegów, gdzie pole nie jest jednorodne; natężenie pola jednorodnego wyraża się wzorem

$$E_0 = \frac{U}{d}$$

(d — odległość płyt kondensatora). Gęstość ładunku σ_0 na powierzchni płyt wynosi

$$\sigma_0 = \frac{e_0}{S}$$

(e_0 — ładunek płyty, S — powierzchnia). Z drugiej strony (§ 2.34) σ_0 równe jest przesunięciu D_0, jakie panuje między płytami $\sigma_0 = D_0 = \varepsilon_0 E_0$.

Przestrzeń między płytami kondensatora wypełnijmy teraz dielektrykiem o stałej dielektrycznej ε (rys. 2.104b). Pojemność kondensatora zwiększy się teraz ε razy, a zatem jego ładunek będzie teraz wynosił εe_0; stąd widać, że gęstość ładunku, a więc i przesunięcie będą teraz również ε razy większe

$$\sigma = D = \varepsilon_0 \varepsilon E_0 .$$

Ale natężenie pola E_0 pozostało bez zmiany, ponieważ U i d nie zmieniły się. Gdybyśmy chcieli gęstość ładunku na płytach zwiększyć z σ_0 do σ przez zbliżenie wzajemne płyt, to wówczas w tym samym stopniu zwiększylibyśmy natężenie pola między płytami. Tymczasem przez wprowadzenie dielektryka osiągamy zwiększenie gęstości ładunku i przesunięcia bez zmiany E. Jak sobie takie działanie dielektryka wytłumaczyć?

Po wprowadzeniu dielektryka między płytki kondensatora gęstość ładunku na nich wzrosła od σ_0 do $\sigma = \varepsilon\sigma_0$. Ale ponieważ między płytkami natężenie pola jest to samo co dawniej, przeto wnosimy, że część ładunku, która przybyła na płytki podczas wprowadzania dielektryka, tj. $\sigma - \sigma_0 = (\varepsilon-1)\,\sigma_0$, nie jest w stanie wywołać swojego własnego pola elektrycznego między płytkami, które by wzmocniło pole dawne E_0. Mamy więc prawo sądzić, że ta część ładunku została w swoim działaniu zobojętniona w jakiś sposób, a reszta, tj. σ_0, działa po dawnemu, wywołując dawne pole E_0. Aby to zrozumieć, przyjmujemy, że powierzchnie dielektryka stykające się z płytami naelektryzowanymi są naelektryzowane ładunkiem przeciwnego znaku, o gęstości $(\varepsilon-1)\,\sigma_0$, jak to unaocznia rys. 2.105. Wskutek tego pole między płytami jest superpozycją dwóch pól przeciwnie skierowanych: jednego — pochodzącego od gęstości naelektryzowania płyt $\sigma = \varepsilon\sigma_0$ i drugiego — pochodzącego od gęstości naelektryzowania dielektryka $\sigma - \sigma_0 = (\varepsilon-1)\,\sigma_0$. W rezultacie pole między płytami jest dokładnie takie, jak w przypadku pierwotnej gęstości naelektryzowania, równej σ_0. Natomiast przesunięcie D w dielektryku, jak już mówiliśmy, jest ε razy większe od przesunięcia D_0 w próżni. Można więc napisać

$$D = \varepsilon D_0 , \tag{2.31}$$

albo

$$D = D_0 + (\varepsilon-1)\,D_0 ,$$

albo inaczej jeszcze

$$D = D_0 + (\varepsilon - 1)\sigma_0 .$$

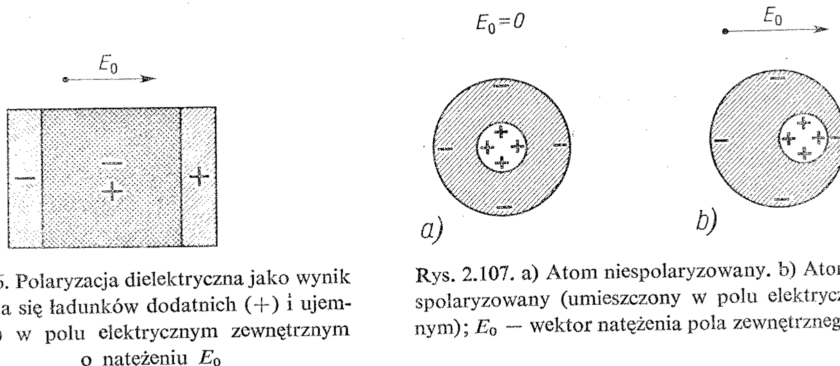
Jak widzimy, ów dodatek do indukcji, wywołany przez dielektryk, wynosi $(\varepsilon-1)\sigma_0$ i jest identyczny z gęstością naelektryzowania dielektryka. Gęstość naelektryzowania dielektryka $(\varepsilon-1)\sigma_0$ oznaczać będziemy literą P i nazywać będziemy *polaryzacją dielektryczną*

$$P = \sigma - \sigma_0 = (\varepsilon-1)\sigma_0 = \varepsilon_0(\varepsilon-1)E_0 . \qquad (2.32)$$

Zatem

$$D = D_0 + P . \qquad (2.33)$$

§ **2.54. Założenia teorii polaryzacji dielektrycznej.** Dielektryk pod wpływem pola elektrycznego ulega polaryzacji. Dzieje się to tak, jak gdyby ładunki dodatnie i ujemne, zawarte w nim z natury i pomieszane ze sobą, rozsunęły się nieco pod wpływem sił pola elektrycznego, jak wskazuje poglądowo rys. 2.106. Że polaryzacja dielektryczna jest faktem, dowodzi już doświadczenie takie, jak na rys. 2.59, w którym widać, że kawałek korka, a nawet ebonitu, szkła lub innego izolatora może stać się dipolem indukowanym (objawem jest przekręcanie się w polu elektrycznym).



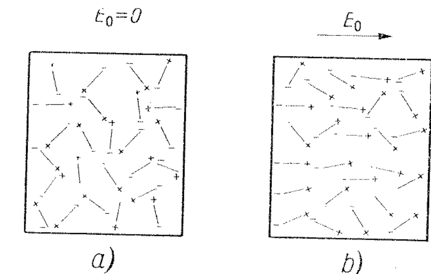
Rys. 2.106. Polaryzacja dielektryczna jako wynik rozsunięcia się ładunków dodatnich (+) i ujemnych (−) w polu elektrycznym zewnętrznym o natężeniu E_0

Rys. 2.107. a) Atom niespolaryzowany. b) Atom spolaryzowany (umieszczony w polu elektrycznym); E_0 — wektor natężenia pola zewnętrznego

Skoro ładunki elektryczne rozsuwają się w dielektryku, rozsuwają się także w najdrobniejszej części tego dielektryka. A zatem i drobiny i atomy ulegać muszą polaryzacji. Rysunek 2.107 przedstawia obrazowo polaryzację atomu w polu elektrycznym: część dodatnia atomu (tzw. jądro) przesunięta zostaje w jedną stronę, a część ujemna (chmura elektronów) — w drugą. Atom lub drobina znalazłszy się w polu elektrycznym staje się *dipolem indukowanym.*

Badania współczesne fizyków wskazują, że drobiny bardzo wielu ciał mają nie tylko właściwość polaryzowania się w polu elektrycznym, ale nawet i bez pola elektrycznego są również trwale spolaryzowane, czyli są dipolami. Takie dipole, w odróżnieniu od indukowanych, nazywają się *dipolami trwałymi.* Jeśli ciało nie znajduje się w polu elektrycznym, dipole-drobiny mają najrozmaitsze kierunki, tak że żaden kierunek nie jest

uprzywilejowany (rys. 2.108a). Rozmieszczenie kierunków dipoli jest zupełnie bezładne. Inaczej rzecz się będzie miała w polu elektrycznym. Jeśli dielektryk wprowadzimy do pola elektrycznego, dipole jego (jeżeli dielektryk jest cieczą lub gazem) dążą do ustawienia się równolegle do linii sił pola elektrycznego. Ale takiemu uporządkowaniu się kierunków dipoli stoi na przeszkodzie ruch cieplny drobin, który ten porządek psuje. W rezultacie wytwarza się pewna „równowaga", tj. pewien stan, w którym jednak uporządkowanie częściowo dochodzi do skutku (rys. 2.108b). Takie są główne założenia teorii polaryzacji dielektrycznej rozwiniętej przez Debye'a.



Rys. 2.108. a) Drobiny ciała dipolowego w bezładzie (bez pola elektrycznego). b) Te same drobiny w polu elektrycznym wykazują pewne uporządkowanie

Ciecze dipolowe, tj. takie, których drobiny są dipolami, mają zazwyczaj większą polaryzację, a zatem i stałą dielektryczną, aniżeli ciała niedipolowe. Jako przykład niech służą następujące ciecze:

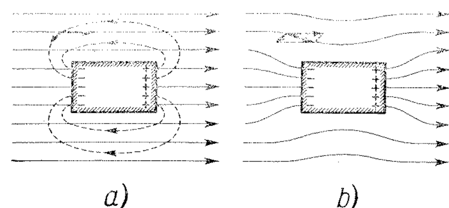
dipolowe:	woda	$\varepsilon = 81$,
	alkohol etylowy	$\varepsilon = 26$,
	gliceryna	$\varepsilon = 56$,
niedipolowe:	benzen	$\varepsilon = 2,3$,
	dwusiarczek węgla	$\varepsilon = 2,6$,
	czterochlorek węgla	$\varepsilon = 2,3$.

Jeżeli ciecz dipolową zestalić, stała dielektryczna gwałtownie maleje (do kilku jedności), ponieważ dipole zostają unieruchomione i nie mogą już ustawiać się w polu elektrycznym, a zatem nie mogą swoim udziałem powiększać polaryzacji dielektrycznej.

Inaczej rzecz się będzie miała, jeśli dipole zostaną unieruchomione przez zestalenie substancji stopionej, znajdującej się w bardzo silnym polu elektrycznym. Wówczas częściowe ich uporządkowanie zostanie utrwalone i całe ciało uzyska trwałą polaryzację. Takie utrwalenie polaryzacji dielektrycznej udaje się tylko z niektórymi ciałami, jak z żywicami, woskiem itd. (w innych ciałach siły międzydrobinowe powstające podczas krystalizacji niszczą uporządkowanie dipoli wywołane elektrycznym polem zewnętrznym). Jeżeli więc np. żywicę zestalić w silnym polu elektrycznym, otrzymuje się ciało trwale spolaryzowane mające dwa bieguny, dodatni i ujemny; tak spolaryzowane ciało nosi nazwę *elektretu.* Elektrety są elektrycznym odpowiednikiem magnesów.

§ **2.55. Pole na zewnątrz dielektryka spolaryzowanego.** Wyobraźmy sobie kawałek dielektryka np. w postaci pręta. Umieszczony w polu elektrycznym równolegle do linii sił staje się wielkim dipolem elektrycznym. Jako dipol wytwarza *własne* pole elektryczne,

które pokazuje rys. 2.109a. Pole to nakłada się na pole pierwotne, wskutek czego wytwarza się pole *wypadkowe*, którego linie przedstawia rys. 2.109b. W okolicy biegunów dipola linie pola pierwotnego i linie pola własnego dipola mają kierunki zgodne. Wytwarza się więc pole wypadkowe, silniejsze od pierwotnego: linie sił są w tych miejscach zagęszczone. Inaczej rzecz się ma w okolicy „równika" dipola. Tutaj, jak widać z rysunku 2.109a, linie pola pierwotnego i własnego dipola mają kierunki przeciwne. Pole wypadkowe jest więc słabsze od pierwotnego: linie sił w tej okolicy są rzadsze niż w polu niezakłóconym obecnością dipola.



Rys. 2.109. Pręcik dielektryczny, umieszczony w polu elektrycznym, wytwarza własne pole (a) (linie przerywane), które wraz z polem zewnętrznym daje pole wypadkowe (b)

Podobnie, lecz silniej, polaryzuje się kawałek metalu umieszczony w polu elektrycznym. Linie sił na zewnątrz takiego przewodnika mają przebieg zupełnie podobny do linii sił na rys. 2.109 i nietrudno je otrzymać w doświadczeniu (rys. 2.63—2.66).

Zagadnienia do rozdziału 2

Do części A

*2.1. Akumulator najmniejszej spotykanej w handlu wielkości może dostarczyć prądu o natężeniu $i = 0,2$ A w ciągu $t = 10$ godzin. Obliczyć ładunek elektryczny, który dzięki chemicznej przemianie płyt przepłynie przez drut z jednej płyty na drugą.

Odpowiedź. $e = it = 2$ A·godz $= 7200$ C.

*2.2. Czy ten ładunek (patrz zagad. 2.1) można by było zgromadzić na okładkach stosunkowo bardzo dużego kondensatora blokowego, o pojemności $C = 12$ μF? Do jakiego napięcia U należałoby ten kondensator naładować?

Odpowiedź. $U = \frac{e}{C} = 600$ MV, zupełnie niemożliwe.

2.3. Kondensator o pojemności $C = 1$ μF został naładowany do napięcia U_0. Okładki tego kondensatora połączono oporem $R = 1$ MΩ. Po jakim czasie t napięcie kondensatora U spadnie do $1/n$ wartości początkowej ($n = 2$, 10, 100 i 1000)? Kiedy kondensator rozładuje się całkowicie?

Odpowiedź. Ze wzoru (2.3) otrzymujemy: $\frac{1}{n} = e^{-t(s)}$.

W tablicach funkcji e^{-x} znajdujemy:

$\frac{1}{n} =$	0,5	0,1	0,01	0,001
t (s) $=$	0,69	2,3	4,6	6,9

Kondensator teoretycznie nie rozładuje się nigdy; praktycznie już po 5 s możemy go uważać za rozładowany.

2.4. Rozwiązać zagadnienie 2.3 w przypadku, gdy opór zwierający okładki wynosi $R = 10$ MΩ.

Odpowiedź. $\frac{1}{n} = e^{-0,1\,t}$; z tablic funkcji e^{-x} uzyskujemy x, a stąd otrzymujemy następujące wartości $t = \frac{x}{0,1}$:

$\frac{1}{n} =$	0,5	0,1	0,01	0,001
t (s) $=$	6,9	23	46	69

2.5. Kondensator naładowany do napięcia $U_0 = 200$ V rozbrojono za pomocą przewodnika o oporze $R = 20$ Ω. Obliczyć natężenie prądu i_0 w pierwszej chwili. Aby zdać sobie sprawę z tego, jak krótko trwa ten prąd „udarowy", obliczmy, po jakim czasie natężenie prądu rozładowania spadnie do 1/1000 swej wartości początkowej, jeśli $C = 1$ μF.

Odpowiedź. $i_0 = \frac{U_0}{R} = 10$ A; $0,001 = e^{-t/RC}$, stąd $RC = 6,9$ (patrz tablice funkcji wykładniczej), wreszcie $t = 6,9 \cdot 10^{-6}$ F·20 Ω $= 138 \cdot 10^{-6}$ s $= 138$ μs.

2.6. Kondensator naładowany pozostawiony sam sobie nie zachowuje ładunku wiecznie i traci go powoli. Czym to się tłumaczy? Wiedząc, że napięcie kondensatora o pojemności $C = 1$ μF spada do połowy po upływie czasu $t = 2$ min, obliczyć opór izolacji R.

Odpowiedź. Przyczyną jest niedoskonałość wszelkiej izolacji, która nie ma nieskończenie wielkiego oporu R. Opór ten jest skończony (chociaż bardzo wielki) i rozbraja kondensator tak, jak gdyby łączył jego okładki. Z równania: $\frac{1}{2} = e^{-t/RC}$ znajdujemy przy pomocy tablic: $\frac{t}{RC} = 0,693$; stąd $R = 173$ MΩ.

*2.7. Kondensator obrotowy o pojemności $C_0 = 500$ pF wstawiamy do naczynia i zalewamy a) naftą, b) wodą destylowaną. Ile wyniesie pojemność C kondensatora w obu wypadkach? Czy w drugim wypadku kondensator nie straci na swej dobroci?

Odpowiedź. $C = \varepsilon C_0$; a) $C = 1000$ pF; b) $C = 40\,500$ pF, kondensator jednak będzie miał tak wielkie „straty" (tzn. straty ładunku), z powodu znacznego przewodnictwa wody nawet destylowanej (por. tabl. 1.1, § 1.22), że stanie się niezdatny do użytku; to samo dotyczy rozmaitych alkoholi i wielu innych cieczy organicznych.

*2.8. Multiplikator napięcia zawiera baterię szeregową złożoną z sześćdziesięciu kondensatorów, których bieguny połączone są z 61 kontaktami na tarczy, oznaczonymi numerami: 0, 1, 2, 3, ..., 60. Kondensatory zostają naładowane z baterii o napięciu $u = 100$ V w ten sposób, że kontakt „1" jest dodatni względem „0", kontakt „2" jest dodatni względem „1" itd. Jakie potencjały U_0 i U_{60} mają bieguny krańcowe baterii (kolumny multiplikatora), jeśli kontakt „15" został uziemiony?

Odpowiedź. $U_0 = -15\,u = -1500$ V; $U_{60} = +45\,u = +4500$ V.

*2.9. Multiplikator napięcia zawiera $n = 60$ kondensatorów, każdy o pojemności $C_1 = 0,5$ μF. Ile wynosi pojemność C całej baterii? Ile wyniesie pojemność C' tej baterii, jeśli dołączymy do jej krańcowych biegunów butelkę lejdejską o pojemności $C_2 = 2000$ cm?

Odpowiedź. $C = \frac{1}{n} C_1 = 7500$ cm; $C' = \frac{1}{n} C_1 + C_2 = 9500$ cm.

*2.10. Elektrometr (rys. 2.27) lub elektroskop z osłoną, uprzednio naelektryzowany, ustawiamy na płycie izolacyjnej. Pręcik elektrometru dotykamy palcem. Wskazówka opada tylko częściowo. Wytłumaczyć to zjawisko.

*2.11. (P). Zbadać wytrzymałość na przebicie kilku izolatorów: miki, papieru zwykłego, papieru parafinowanego, celuloidu, celofanu, polietylenu itp. Podać przybliżone wartości wytrzymałości na przebicie w V/cm. Badanie wykonujemy umieszczając badany izolator w postaci kawałka cienkiego arkusza między płytami kondensatora płaskiego, którymi ściskamy izolator. Kondensator płytkowy łączymy z multiplikatorem napięcia. Stopniowo zwiększamy napięcie, aż do przebicia. Jeżeli badany

dielektryk jest dobrym izolatorem, napięcie przyłożone U jest iloczynem napięcia U_0 zasilającego multiplikator i liczby kondensatorów n: $U = nU_0$. Jeżeli jednak dielektryk jest złym izolatorem (jak np. fibra), wówczas multiplikator rozładowuje się stopniowo i nawet podczas ciągłego kręcenia multiplikatora napięcie na jego biegunach jest nieco obniżone. W takim wypadku należy je mierzyć elektrometrem o odpowiednim zakresie (rys. 2.102).

2.12. (P). Sposobem opisanym w § 2.23c porównać jakościowo przewodnictwo właściwe następujących izolatorów: drewna (suchego, wilgotnego i nasyconego parafiną na gorąco), parafiny, wosku, siarki, smoły, kalafonii, fibry, miki, porcelany, bakelitu, ebonitu, trolitu, galalitu, kalitu, polistyrenu itp. Uszeregować materiały te według rosnącego przewodnictwa. Z powyższych materiałów sporządzamy jednakowe (mniej więcej) płytki lub pręciki i nakładamy na nie jednakowe elektrody. Mierzymy czas rozładowania elektroskopu. Kto przestudiował § 2.8, może na tej zasadzie zaprojektować dokładną metodę pomiaru oporu właściwego izolatorów (zwrócić uwagę na olbrzymią wartość ϱ dla izolatorów; por. tabl. 1.1, § 1.22).

***2.13.** Kondensator blokowy został naładowany do napięcia około 200 V. Jak rozpoznać znaki jego biegunów a) za pomocą woltomierza, b) za pomocą lampki neonowej? Oba te sposoby powodują jednak rozładowanie kondensatora. Obmyślić takie sposoby rozpoznania znaków biegunów kondensatora, aby kondensator przy tym nie został rozładowany (pomoce: elektrometr, potarty ebonit).

***2.14.** Kula została naelektryzowana. Jak ustalić znak ładunku?

***2.15.** Pewien nieznany ładunek e zebrany na płytce próbnej wprowadzono, w celu zmierzenia go, do wydrążonej kuli elektrometru o pojemności $C = 10{,}5$ cm. Elektrometr wskazał potencjał $U = 350$ V. Obliczyć ładunek płytki próbnej w kulombach i jednostkach elektrostatycznych ładunku.

Odpowiedź. $e = CU = 4{,}08\cdot10^{-9}$ C $= 12{,}25$ j. es ładunku.

2.16. Baterię $n = 9$ butelek lejdejskich, każda o pojemności $C = 1000$ cm, połączonych równolegle, dołączono do iskiernika kulkowego (średnica kulek $= 2{,}5$ cm), nastawionego na długość iskry $= 2{,}7$ cm. Jak wielki ładunek musi być nagromadzony na okładkach baterii, aby przeskoczyła iskra?

Odpowiedź. $e = nCU = 10^{-4}$ C (napięcie U odczytujemy z tabl. 2.2, § 2.22).

2.17. Dwa kondensatory o pojemnościach $C_1 = 1000$ pF i $C_2 = 9000$ pF zostały połączone w szereg. Krańcowe bieguny tej baterii połączono ze źródłem prądu o napięciu $U = 10\,000$ V. Jakie napięcia U_1 i U_2 panują na biegunach poszczególnych kondensatorów? Jaką pojemność C ma bateria?

Odpowiedź. $U_1 = U\dfrac{C_2}{C_1+C_2} = 9000$ V; $U_2 = U\dfrac{C_1}{C_1+C_2} = 1000$ V. $C = \dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2} = 900$ pF.

2.18. Dwa kondensatory o pojemnościach $C_1 = 1000$ pF i $C_2 = 9000$ pF, połączone szeregowo, dołączono krańcowymi biegunami do źródła prądu o nieznanym napięciu U_x. Do kondensatora C_2 przyłączamy elektrometr; wskazuje on napięcie $U_2 = 670$ V. Ile wynosi napięcie U_x źródła prądu? Jaki pożytek laboratoryjny mamy z tego układu?

Odpowiedź. $U_x = U_2\dfrac{C_1+C_2}{C_1} = 10\,U_2 = 6700$ V; układ ten zwany *pojemnościowym dzielnikiem napięcia*, pozwala nam za pomocą elektrometru o zakresie do 1000 V mierzyć napięcia do 10 kV.

2.19. Zaprojektować pojemnościowy dzielnik napięcia (patrz zagadnienie 2.18) redukujący napięcie mierzone w stosunku: a) 1:5, b) 1:100.

Do części B

***2.20.** Za pomocą elektroforu wytwarzamy ładunki elektryczne, a więc i energię elektryczną. Kosztem jakiej pracy to się dzieje? (Uwaga: nie kosztem natarcia ebonitu!).

***2.21.** W celu zmierzenia przesunięcia D w pewnym punkcie pola elektrycznego umieszczamy w tym punkcie, prostopadle do linii sił, dwa zetknięte ze sobą krążki próbne o średnicy $d = 2{,}0$ cm (patrz rys. 2.68). Płytki te rozdzielamy i ładunek indukowany jednej z nich przenosim do wnętrza kuli elektrometru o pojemności $C = 1{,}17\cdot10^{-11}$ F. Po $n = 3$-krotnym powtórzeniu tej manipulacji

elektrometr wskazał potencjał $U = 240$ V. Obliczyć przesunięcie D w danym punkcie pola elektrycznego.

Odpowiedź. $D = \dfrac{4CU}{n\pi d^2} = 3{,}0\cdot10^{-6}\,\dfrac{\text{C}}{\text{m}^2}$.

***2.22.** Płytką próbną o powierzchni (jednostronnej) $S = 3{,}0$ cm² dotykamy kuli naelektryzowanej (rys. 2.69) i ładunek zebrany przenosimy do wiaderka elektrometru o pojemności $C = 1{,}17\cdot10^{-11}$F. Elektrometr wskazuje potencjał $U = 290$ V. Jaka jest gęstość naelektryzowania σ kuli?

Odpowiedź. $\sigma = \dfrac{CU}{S} = 1{,}13\cdot10^{-5}\,\dfrac{\text{C}}{\text{m}^2}$.

***2.23.** Jeśli gęstość naelektryzowania kuli wynosi $\sigma = 1{,}13\cdot10^{-5}\,\dfrac{\text{C}}{\text{m}^2}$, a jej promień $r = 4$ cm, to ile wynosi ładunek e kuli?

Odpowiedź. $e = 4\pi r^2\sigma = 2{,}27\cdot10^{-7}$ C.

***2.24.** (P) Metodą opisaną w § 2,29 mierzymy indukcję D w polu elektrycznym wytwarzanym przez kulę o promieniu r, będącą na stałym potencjale. Pomiary wykonujemy w punktach odległych od środka kuli o $x = r$ (rys. 2.69), $x = 2r$ i $x = 3r$ (rys. 2.68). Na tej podstawie ustalamy, jak zmienia się indukcja D w zależności od odległości x od kuli.

Do części C

2.25. (P) Za pomocą sondy płomykowej oraz elektrometru mierzymy potencjały w różnych punktach pola wytworzonego przez naelektryzowaną kulę o promieniu r. Jaka jest zależność potencjału od odległości x punktu od środka kuli? (Jako sondy płomykowej można użyć kawałka drutu na uchwycie izolacyjnym; w chwili pomiaru zbliżamy do końca sondy jakikolwiek mały płomyk).

2.26. (P) Za pomocą sondy płomykowej wykazać istnienie pola elektrycznego atmosferycznego. Sondę stanowi osłonięta przed wiatrem świeca umieszczona na długiej rurze polietylenowej zatkniętej pionowo na pustym polu (pręt przewodzący odkształciłby powierzchnie ekwipotencjalne). W płomieniu umieszczony jest jeden koniec cienkiego drutu, drugi zaś koniec połączony jest z elektrometrem, którego osłona jest uziemiona. Zbadać zwrot wektora pola elektrycznego atmosferycznego ustalając znak naelektryzowania elektrometru na różnych wysokościach.

***2.27.** Na szybie szklanej (grubość $d = 3$ mm, stała dielektryczna $\varepsilon = 6$) naklejono po obu stronach dwa arkusze cynfolii, nie dochodzące do brzegów szyby bliżej niż na kilka centymetrów. Wymiary każdego z arkuszy: 30 cm × 40 cm. Obliczyć pojemność tak utworzonego kondensatora. (Kondensator taki nosi nazwę „tablicy Franklina").

Odpowiedź. $C = \dfrac{\varepsilon_0\,\varepsilon\,S}{d} = 8{,}85\cdot10^{-12}\cdot\dfrac{6\cdot0{,}12}{0{,}003}$ F $= 212{,}4\cdot10^{-11}$ F $= 2124$ pF $= 1912$ cm.

***2.28.** Butelka lejdejska ma następujące rozmiary: promień $r = 3{,}5$ cm, wysokość okładek $h = 12$ cm, grubość szkła $d = 2{,}5$ mm. Uważając ją w przybliżeniu za kondensator płaski i przyjmując wartość stałej dielektrycznej szkła $\varepsilon = 6$, obliczyć jej pojemność.

Odpowiedź. $C = \dfrac{\pi\,r\,\varepsilon_0\varepsilon}{d}(2h+r) = 64{,}2\cdot10^{-11}$ F $= 624$ pF $= 578$ cm.

***2.29.** Grubość papieru parafinowanego w kondensatorze blokowym wynosi $d = 0{,}04$ mm, jego stała dielektryczna $\varepsilon = 2{,}3$. Obliczyć powierzchnię S każdego z dwóch pasków cynfolii, jeżeli pojemność kondensatora wynosi $C = 1$ μF.

Odpowiedź. $S = \dfrac{Cd}{\varepsilon_0\varepsilon} = 1{,}97$ m².

***2.30.** Obliczyć gęstość naelektryzowania okładek tablicy Franklina, o której mowa w zadaniu 2.27, jeśli naładowano ją do napięcia $U = 20$ kV.

Odpowiedź. $\sigma = \dfrac{e}{S} = \dfrac{CU}{S} = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon\,U}{d} = 35{,}4\cdot10^{-5}\,\dfrac{\text{C}}{\text{m}^2}$.

***2.31.** Do kuli wydrążonej (elektrometru z rys. 2.27) o promieniu $r = 2{,}5$ cm wprowadzono ładunek na małej kulce, nie dotykając nią wnętrza kuli. Znaną nam już metodą (np. z zagadnienia 2.15) zmierzono ładunek małej kuli; wynosi on $e = 10$ j. es ładunku. Obliczyć gęstość σ ładunku, indukowanego *wewnątrz* kuli wydrążonej.

Odpowiedź. $\sigma = \frac{e}{4\pi r^2} = 0{,}127 \frac{\text{j. es ładunku}}{\text{cm}^2}$.

***2.32.** W powyższym zagadnieniu małą kulką dotknięto wnętrza kuli wydrążonej. Obliczyć gęstość ładunku σ_1 wewnątrz kuli i gęstość ładunku σ_2 na zewnętrznej powierzchni kuli.

Odpowiedź. $\sigma_1' = 0$; $\sigma_2 = \frac{e}{4\pi r^2} = 0{,}127 \frac{\text{j. es ładunku}}{\text{cm}^2}$, jeśli kula jest zupełnie odosobniona; natomiast σ_2 na kuli będzie mniejsza, jeśli kula, jak np. w elektrometrze, połączona jest z pręcikiem elektrometru.

2.33. Kuli o promieniu $r = 2{,}5$ cm udzielono ładunku $e = 25$ j. es ładunku. Jaki potencjał osiągnęła i jakie natężenie ma pole elektryczne tuż przy jej powierzchni, jeżeli kula znajduje się: a) w powietrzu ($\varepsilon = 1$), b) w oleju transformatorowym ($\varepsilon = 2{,}2$).

Odpowiedź. $U = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$; $E = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$; a) $U = 10$ j. es napięcia $= 3000$ V; $E = 1200 \frac{\text{V}}{\text{cm}}$; b) $U = 1364$ V; $E = 545{,}4 \frac{\text{V}}{\text{cm}}$.

2.34. Kula o promieniu $r = 2{,}5$ cm połączona jest na stałe cienkim drutem z przewodem instalacji wysokonapięciowej, mającym potencjał $U = 10$ kV. Obliczyć ładunek kuli e i natężenie pola elektrycznego tuż przy jej powierzchni, jeżeli kula znajduje się: a) w powietrzu, b) w oleju transformatorowym. Porównać z zadaniem poprzednim! (Wpływ obecności cienkiego drutu na pojemność kuli pomijamy.)

Odpowiedź. $e = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon rU$; $E = \frac{U}{r}$ (nie zależy od stałej dielektrycznej ośrodka);

a) $e = 27{,}8 \cdot 10^{-9}$ C; $E = 4000 \frac{\text{V}}{\text{cm}}$; b) $e = 61{,}1 \cdot 10^{-9}$ C; $E = 4000 \frac{\text{V}}{\text{cm}}$.

2.35. Jeden z biegunów instalacji wysokiego napięcia, mający potencjał $U_0 = 10^6$ V, jest kulą o promieniu $r = 0{,}5$ m. Jaki potencjał panuje w powietrzu w odległości $x = 20$ m od kuli i jakie natężenie E ma pole elektryczne w tym miejscu?

Odpowiedź. Ze wzorów $U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{e}{x}$ i $U_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{e}{r}$ wynika $U = U_0 \frac{r}{x} = 25\,000$ V; $E = \frac{rU_0}{x^2} = 1250 \frac{\text{V}}{\text{m}}$.

2.36. Obliczyć gęstość ładunku σ powyższej kuli oraz natężenie pola E w pobliżu jej powierzchni.

Odpowiedź. $\sigma = \frac{\varepsilon_0 U_0}{r} = 17{,}7 \cdot 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{m}^2} = 5{,}31 \frac{\text{j.es ładunku}}{\text{cm}^2}$; $E = \frac{U_0}{r} = 20\,000 \frac{\text{V}}{\text{cm}}$.

2.37. Przypuśćmy, że instalacja dająca potencjał $U_0 = 10^6$ V jest zaopatrzona w kulę o promieniu zaledwie $r = 5$ cm (por. zagadnienia 2.35 i 2.36). Obliczyć natężenie pola elektrycznego panujące w pobliżu powierzchni kuli. Wniosek.

Odpowiedź. $E = \frac{U_0}{r} = 200\,000 \frac{\text{V}}{\text{cm}}$. Przy tak silnym natężeniu pola występuje iskrzenie, gdyż powietrze wytrzymuje co najwyżej około 30 kV na cm. Wyładowania miotełkowe spowodują wypływ ładunku i spadek potencjału. Widzimy, że stosunkowo duża kula ($r = 5$ cm) zachowuje się podobnie jak ostrze dla niższych potencjałów. Rozumiemy teraz, dlaczego w instalacjach na bardzo wysokie napięcia bieguny mają postać tak ogromnych kul (patrz rys. 2.50).

Do części D

2.38. Kula instalacji wysokiego napięcia o promieniu $r_1 = 0{,}5$ m ma potencjał $U_1 = 10^6$ V. W odległości $x = 10$ m od jej środka umieszczono małą kulkę, o promieniu $r_2 = 1$ cm, mającą potencjał $U_2 = 20\,000$ V. Jaka siła F działa na tę kulkę?

Odpowiedź. $F = \frac{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2 U_1 U_2}{x^2} = 1{,}11 \cdot 10^{-4}$ N $= 11{,}1$ dyn.

2.39. Jakie natężenie ma pole elektryczne, jeśli zawieszona w nim na bardzo lekkiej nici jedwabnej kulka o promieniu $r = 0{,}5$ cm i o ciężarze $P = 70$ dyn, mająca potencjał $U = 3000$ V, wychyla się o $\alpha = 13^0$ od pionu?

Odpowiedź. $E = \frac{P \operatorname{tg} \alpha}{4\pi \varepsilon_0 rU} = 97\,000 \frac{\text{V}}{\text{m}}$.

***2.40.** Jakie ładunki (w C i j. es) mają dwie jednakowe małe kulki, mające ten sam potencjał, jeśli z odległości $d = 5$ cm odpychają się siłą $F = 9$ dyn?

Odpowiedź. $e = d\sqrt{kF} = 5 \cdot 10^{-9}$ C $= 15$ j. es ładunku.

***2.41.** Kondensator o olbrzymiej pojemności $C = 3000$ μF (tak dużą pojemność mają tzw. kondensatory elektrolityczne) naładowany został pod napięciem $U = 2$ V. Obliczyć energię E, która wydzieli się w drucie podczas rozładowania tego kondensatora, i ładunek e, jaki przepłynie przez drut.

Odpowiedź. $E = \frac{1}{2} eU = \frac{1}{2} CU^2 = 0{,}006$ J; $e = CU = 0{,}006$ C.

***2.42.** Z akumulatora $U = 2$ V czerpiemy prąd $i = 6$ mA w ciągu czasu $t = 1$ s. Obliczyć energię E wydzieloną w drucie w tym czasie i ładunek e, jaki przepłynął przez drut. Porównać z wynikami zagadnienia 2.41. Skąd powstaje taka różnica?

Odpowiedź. $E = Uit = 0{,}012$ J; $e = it = 0{,}006$ C.

2.43. Jeden z największych na świecie generatorów wysokiego napięcia ma dwie kule o promieniu $r = 2{,}5$ m (dlaczego takie duże? — por. zagadnienie 2.37). Obliczyć energię nagromadzoną na jednej z tych kul, gdy potencjał jej wynosi 5 MV.

Odpowiedź. $E = \frac{1}{2} 4\pi \varepsilon_0 rU^2 = 3470$ J.

2.44. Obliczyć ładunek powyższej kuli i natężenie pola elektrycznego na jej powierzchni (czy jest groźba wypływów? — por. zagadnienie 2.37).

Odpowiedź. $e = 4\pi\varepsilon_0 rU = 1{,}39 \cdot 10^{-3}$ C; $E = \frac{U}{r} = 20\,000 \frac{\text{V}}{\text{cm}}$.

2.45. Na płycie metalowej o powierzchni $S = 100$ cm², odizolowanej od ziemi, znajduje się ładunek elektryczny $e = 100$ j. es. Płytę tę zbliżono na odległość kilku do kilkunastu mm do drugiej takiej samej płyty uziemionej. Jak zależy potencjał U pierwszej płyty od odległości d od drugiej płyty? Czy siła przyciągania się płyt zależy od tej odległości? Obliczyć tę siłę.

Odpowiedź. $U = \frac{ed}{\varepsilon_0 S}$; nie zależy; $F = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 S} = 628$ dyn.

2.46. Płytę metalową o powierzchni $S = 100$ cm² połączono z biegunem baterii o potencjale 3000 V i zbliżono ją do drugiej takiej samej płyty uziemionej na odległość d. Jak zależy ładunek e każdej z płyt od odległości d? Jak zależy siła F przyciągania się płyt od odległości płyt? Obliczyć tę siłę dla $d = 1$ cm.

Odpowiedź. $e = \frac{\varepsilon_0 SU}{d}$; $F = \frac{\varepsilon_0 SU^2}{2} \frac{1}{d^2}$; $F = 398$ dyn; wyniki te porównać z wynikami zagadn. 2.45.

2.47. Kondensator o pojemności zmiennej (np. obrotowy), ustawiony na maksimum pojemności dołączamy na chwilę do sieci prądu stałego lub do baterii, aby go naładować. Po odłączeniu zmniejszamy pojemność do minimum. Jak się zmieniła energia kondensatora? Kosztem czego?

Odpowiedź. Patrz wzór (2.26a); kosztem pracy sił zewnętrznych.

2.48. Kondensator obrotowy, ustawiony na maksimum pojemności, dołączamy na stałe do baterii lub sieci. Pojemność zmniejszamy do minimum. Jak się zmieniła energia kondensatora? Gdzie się podziała?

Odpowiedź. Patrz wzór (2.26b); odpłynęła do źródła prądu; sprawdzić to za pomocą lampki neonowej włączonej w szereg z kondensatorem (porównać z zagadnieniem 2.47).

***2.49.** Kondensator obrotowy (zwykły radiowy, o pojemności około 500 pF) ładujemy do napięcia kilkuset woltów (np. z multiplikatora napięcia zasilanego napięciem kilkunastu woltów). Po odłączeniu od źródła prądu zmniejszamy jego pojemność. Między okładkami przebija iskra. Dlaczego?

2.50. Kondensator płytkowy ładujemy i odłączamy od źródła prądu. Między płytki wsuwamy płytę dielektryczną. Jak się zmienia energia kondensatora? Na co się zamienia?

Odpowiedź. Patrz wzór (2.27); układ wykonuje pracę wciągania płyty.

2.51. Kondensator płytkowy dołączamy na stałe do źródła prądu. Między płytki wsuwamy płytę dielektryczną. Jak się zmienia energia kondensatora? Skąd się bierze?

Odpowiedź. Patrz wzór (2.27a); przypływa ze źródła prądu; sprawdzić to za pomocą lampki neonowej, jak w zagadnieniu 2.48. Porównać z zagadnieniem 2.50.

2.52. Między okładki naładowanego kondensatora płytkowego a) odłączonego od źródła prądu, b) połączonego ze źródłem, wstawiamy płytkę dielektryczną. Jak zmieni się siła przyciągania się płyt?

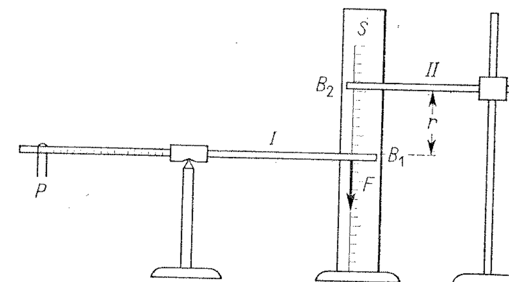
Odpowiedź. a) Zmniejszy się, b) zwiększy się; patrz § 2.48.

Rozdział 3

POLE MAGNETYCZNE

A. Pole magnetyczne magnesu

*§ **3.1. Prawo Coulomba.** W § 14 mieliśmy już możność stwierdzić, że bieguny jednoimienne dwóch magnesów odpychają się tym silniej, im bardziej są do siebie zbliżone. Podobnie jak Coulomb (1785) stawiamy sobie pytanie: jak zależy siła odpychania się biegunów magnetycznych od ich wzajemnej odległości?



Rys. 3.1. Pomiar siły odpychania się dwóch biegunów magnetycznych (sprawdzenie prawa Coulomba za pomocą wagi magnetycznej)

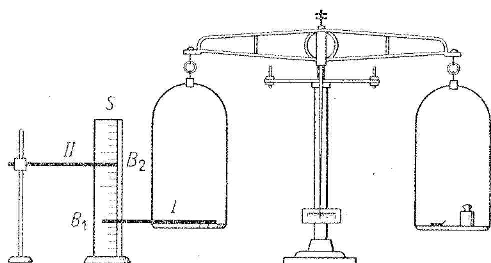
Rysunek 3.1 przedstawia niezwykle prosty przyrząd, tzw. *wagę magnetyczną*, za pomocą której można zmierzyć siłę F, jaką odpychają się bieguny B_1 i B_2 dwóch magnesów I i II. Magnes I stanowi jedno ramię wagi, podczas gdy drugie ramię jest to pręcik mosiężny, na którym zawieszamy ciężarek P równoważący siłę F. Odległość r między biegunami mierzymy na skali zwierciadlanej S; jest to skala papierowa naklejona na zwierciadle. Podczas pomiaru położenia bieguna magnetycznego trzymamy oko na takiej wysokości, aby biegun i jego obraz w zwierciadle pokryły się; unikamy w ten sposób dużej dowolności w położeniu naszego oka, a co za tym idzie — w odczytaniu na skali.

Jeszcze dokładniej zmierzyć można siłę F za pomocą wagi, co dostatecznie jasno przedstawia rys. 3.2. Waga musi być dość precyzyjna (dokładność 0,01 g) i nie powinna mieć części żelaznych.

Wykonawszy z tymi samymi biegunami kilka pomiarów siły F dla różnych odległości r stwierdzamy, że dla wszystkich pomiarów iloczyn Fr^2 wypada ten sam, powiedzmy k. Zatem $Fr^2 = k$ jest dla danych dwóch biegunów wielkością stałą. Związek ten można również napisać w postaci $F = \frac{k}{r^2}$, z której wyraźnie widać, że siła wzajemnego odpychania się dwu jednoimiennych biegunów magnetycznych jest odwrotnie proporcjonalna

do kwadratu ich wzajemnej odległości. Doświadczenie stwierdza, że ten sam wzór stosuje się do siły przyciągania się dwu różnoimiennych biegunów.

Łatwo również stwierdzić doświadczalnie, że na ten sam biegun B_1 (rys. 3.1), z tej samej odległości r, inny biegun, np. B_3, działa na ogół inną siłą aniżeli biegun B_2. Jeśli większą — powiedzielibyśmy, że biegun B_3 jest „silniejszy" od bieguna B_2, jeśli mniejszą — że jest „słabszy". Inaczej możemy to wyrazić w ten sposób, że biegun B_3 ma większą lub mniejszą „masę magnetyczną" albo „ilość magnetyzmu" aniżeli biegun B_2. Na tym jakościowym porównywaniu mas magnetycznych nie poprzestaniemy. Ilościowo porównywać je będziemy w sposób następujący: biegun magnetyczny B_3 ma n razy większą



Rys. 3.2. Sprawdzenie prawa Coulomba za pomocą zwykłej wagi

masę magnetyczną aniżeli biegun B_2, jeśli na jakikolwiek biegun B_1 działa siłą n razy większą aniżeli biegun B_2, umieszczony w tej samej odległości od bieguna B_1, co i biegun B_3. Zatem siła wzajemnego działania na siebie dwóch biegunów jest na podstawie powyższej umowy proporcjonalna do masy magnetycznej m_1 jednego z tych biegunów. Ale skoro jest proporcjonalna do masy magnetycznej m_1 jednego z biegunów, musi też być proporcjonalna do masy magnetycznej m_2 drugiego z biegunów; jeśli bowiem „silniejszy" biegun wywiera na jakiś inny biegun większą siłę, to i sam doznaje większej siły (III zasada dynamiki Newtona). Zamiast poprzedniego wzoru możemy więc napisać

$$F = k' \frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{3.1}$$

gdzie k' jest nowym współczynnikiem proporcjonalności. Związek ten wyraża *prawo Coulomba*, które brzmi: *dwa bieguny magnetyczne przyciągają się lub odpychają się wzajemnie siłą proporcjonalną do ich mas magnetycznych i odwrotnie proporcjonalną do kwadratu ich wzajemnej odległości*. Warunkiem stosowalności tego prawa jest stosunkowo znaczna wzajemna odległość biegunów od siebie. W przeciwnym razie występujące zjawisko indukcji (por. § 3.27) powoduje dodatkową siłę przyciągania się biegunów.

* **3.2. Jednostka masy magnetycznej CGS.** Prawo Coulomba dla biegunów magnetycznych jest bardzo podobne do prawa Coulomba dla ładunków elektrycznych. Wzory (3.1) i (2.21), które wyrażają oba prawa Coulomba mają analogiczną postać. Różnica jest ta, że współczynnik proporcjonalności $(1/4\pi\varepsilon_0\varepsilon)$ we wzorze (2.21) miał ściśle określoną wartość, natomiast współczynnik proporcjonalności k' we wzorze (3.1) jest jeszcze nieokreślony. Pochodzi to stąd, że nie mamy jeszcze żadnej jednostki do mierzenia mas magnetycznych. Przypomnijmy sobie jednak, że w § 2.42 wprowadziliśmy nową jednostkę ładunku elektrycznego tak określoną, aby współczynnik proporcjonalności

we wzorze wyrażającym prawo Coulomba stał się równy 1. Była to jednostka elektrostatyczna ładunku CGS. Obecnie postąpimy analogicznie określając „jednostkę masy magnetycznej CGS".

Weźmy dwa bieguny magnetyczne o jednakowych masach magnetycznych, które oznaczymy literą m. (Że dwa bieguny mają jednakowe ilości magnetyzmu, stwierdzamy na podstawie umowy z § 3.1 w sposób następujący: jeśli każdy z obu biegunów działa na jakiś trzeci biegun z tej samej odległości tą samą siłą, to wówczas oba bieguny mają te same ilości magnetyzmu.)

W tym wypadku prawo Coulomba wyrazi się wzorem

$$F = k' \frac{m^2}{r^2} \tag{3.1a}$$

analogicznym do wzoru (2.21a). W powyższym wzorze jednostki obu wielkości: r i F są nam dobrze znane (cm i dyna w układzie CGS), natomiast nie mamy jeszcze określonej jednostki wielkości m. Jeśli przyjmiemy $k = 1$, będziemy zmuszeni do określenia jednostki ilości magnetyzmu m ze wzoru $F = \frac{m^2}{r^2}$ i to już bez żadnej dowolności. Mianowicie ze wzoru tego wynika, że

$$m = r\sqrt{F}. \tag{3.1b}$$

Otóż jeśli po prawej stronie przyjmujemy wielkości równe jedności, to i po lewej otrzymamy jednostkę. A więc gdy: $r = 1$ cm i $F = 1$ dyna, wtedy dla m otrzymamy jednostkę, którą nazwiemy *jednostką masy magnetycznej* CGS:

1 jednostka masy magnetycznej CGS $= 1$ cm $\sqrt{1 \text{ dyn}}$.

A oto określenie słowne, zapewne bardziej jasne: *biegun magnetyczny ma* 1 *jednostkę masy magnetycznej CGS, jeśli na taki sam biegun z odległości* 1 cm *działa siłą* 1 dyny. Ale ponieważ doświadczenie pokazało, że siły magnetyczne zależą nieco od ośrodka, w którym bieguny są pogrążone, przeto umówiono się pomiar powyższy wyznaczający jednostkę ilości magnetyzmu wykonywać w *próżni*. Okazuje się jednak, że po przeniesieniu biegunów z próżni do powietrza siły zmieniają się tylko bardzo nieznacznie.

Zauważmy znów, że określenie jednostki masy magnetycznej jest zupełnie analogiczne do określenia jednostki elektrostatycznej ładunku elektrycznego. Nawet więcej. Porównajmy wzory (2.21b) i (3.1b), a okaże się, że obie wielkości: ładunek elektryczny e i masa magnetyczna m mierzą się tymi samymi wielkościami podstawowymi, na których wykonuje się te same działania $(r\sqrt{F})$; mówimy więc, że e i m mają ten sam wymiar (długość razy pierwiastek kwadratowy z siły).

W nauce o magnetyzmie innej jednostki masy magnetycznej (np. analogicznej do jednostki praktycznej ładunku elektrycznego) *nie wprowadza się*. Jednostka masy magnetycznej umożliwi nam niebawem zbudowanie całego układu jednostek zarówno magnetycznych, jak i elektrycznych, który nazywać się będzie „układem elektromagnetycznym CGS" (patrz str. 247).

Wobec ustalenia jednostki masy magnetycznej prawo Coulomba możemy wyrazić wzorem, w którym $k' = 1$

$$F = \frac{m_1 m_2}{r^2}. \tag{3.1c}$$

Wzór ten słuszny jest z całą ścisłością tylko dla próżni. Dla innych ośrodków stosuje się tylko w przybliżeniu. Na przykład w powietrzu siła oddziaływania dwóch mas magnetycznych jest o cztery dziesięciomilionowe większa, zaś w wodzie — o dziewięć milionowych mniejsza aniżeli w próżni. Dla ścisłości należy więc do wzoru (3.1c) wprowadzać współczynnik korygujący ten wzór dla ośrodka. Możemy ogólnie napisać

$$F = \frac{1}{\mu} \frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{3.1d}$$

gdzie μ nazywa się *przenikalnością magnetyczną* ośrodka. Dla próżni mamy *ex definitione* $\mu = 1$, natomiast doświadczenie daje: dla powietrza $\mu = 1+0{,}4\cdot 10^{-6}$, zaś dla wody $\mu = 1-9\cdot 10^{-6}$ (por. tablicę 3.3). Ośrodki, dla których $\mu > 1$, nazywają się *paramagnetyczne*, zaś te, dla których $\mu < 1$, nazywają się *diamagnetyczne*.

Gdybyśmy mieli dwa zupełnie identyczne magnesy, moglibyśmy bez trudu wyznaczyć masy magnetyczne, np. ich biegunów północnych. Należałoby tylko zmierzyć r i F i obliczyć m ze wzoru (3.1b). Ale oczywiście trudno jest znaleźć dwa identyczne magnesy; postępujemy więc tak, że bierzemy trzy dowolne magnesy sztabkowe i wykonujemy pomiar siły kolejno dla trzech par biegunów jednoimiennych: $m_1 m_2$; $m_1 m_3$ i $m_2 m_3$. Uzyskujemy trzy równania o postaci (3.1c) zawierające trzy niewiadome m_1, m_2 i m_3, które z łatwością obliczamy. W ten sposób możemy wyznaczyć masy magnetyczne, np. północnych biegunów trzech magnesów (patrz zagadnienie 3.1).

Doświadczenie poucza, że biegun południowy magnesu ma tę samą masę magnetyczną, co jego biegun północny. Umawiamy się masę magnetyczną bieguna północnego oznaczać liczbą dodatnią (np. + 100 jednostek masy magnetycznej CGS). Ponieważ biegun południowy tego magnesu wywiera na jakikolwiek inny biegun (tzw. „próbny") siłę taką samą jak biegun północny (umieszczony w tej samej odległości od bieguna próbnego), lecz *przeciwnie skierowaną*, przeto przypisujemy biegunowi południowemu masę magnetyczną ujemną (np. — 100 jednostek masy magnetycznej).

Bieguny zwykłych magnesów spotykanych w laboratoriach mają masę magnetyczną wynoszącą od kilkudziesięciu do kilkuset jednostek masy magnetycznej CGS.

***§ 3.3. Natężenie pola magnetycznego H.** Niech w pobliżu jednego z biegunów magnesu SN, np. N, o masie magnetycznej m' znajduje się mała igiełka magnetyczna „próbna" sn (rys. 3.3). Na jej biegun północny, o masie magnetycznej m, działa siła

$$F = \frac{m'm}{r^2},$$

gdzie r oznacza jak dawniej odległość między biegunami N i n. Jeśli magnes SN jest bardzo długi, to biegun S znajduje się daleko od n i siły pochodzącej od bieguna S możemy nie brać w rachubę. Ze wzoru powyższego widzimy, że siła działająca w danym punkcie pola magnetycznego na biegun próbny jest proporcjonalna do jego masy magnetycznej m. Można to napisać tak

$$F = H m, \tag{3.2}$$

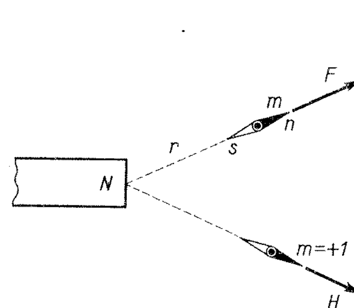
gdzie H zastępuje $\frac{m'}{r^2}$ i jest współczynnikiem proporcjonalności

$$H = \frac{m'}{r^2}. \tag{3.2a}$$

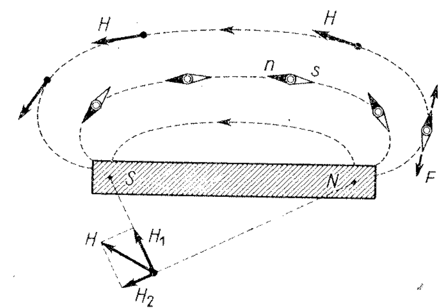
Współczynnik H charakteryzuje pole magnetyczne w danym punkcie; mówi on nam, czy pole jest „silne" czy „słabe". *H nazywamy natężeniem pola magnetycznego w danym punkcie.* Jeżeli napiszemy wzór (3.2) w postaci

$$H = \frac{F}{m}, \tag{3.2b}$$

widzimy wyraźnie, że *natężenie pola magnetycznego H mierzy się siłą F, która działa na biegun mający + 1 jednostkę masy magnetycznej, umieszczony w danym punkcie pola.* Pod względem wartości liczbowej H jest więc m-tą częścią F. Ponieważ siła F jest wek-



Rys. 3.3. Na biegun $+m$ igiełki próbnej działa siła F. Na biegun $+1$ igiełki próbnej działa siła liczbowo równa wartości H



Rys. 3.4. Wektor magnetyczny H jest sumą wektorową wektorów H_1 i H_2 pochodzących od poszczególnych biegunów S i N. Kierunek wektora H pokazują w każdym punkcie pola igiełki magnetyczne

torem, wektorem jest również H. Dlatego natężenie pola magnetycznego nazywają również *wektorem magnetycznym.* Kierunek i zwrot wektora magnetycznego są identyczne z kierunkiem i zwrotem siły F działającej na biegun północny igiełki próbnej. Oczywiście na biegun południowy igiełki działa siła przeciwna F i co do wartości bezwzględnej równa F, jeśli tylko igiełka jest bardzo mała w stosunku do r; bowiem tylko wtedy możemy uważać, że natężenie pola magnetycznego w miejscach, gdzie się znajdują oba bieguny igiełki, jest jednakowe. Igiełka ustawia się więc tak, że jej oś, tzn. odcinek skierowany od s do n, przyjmuje kierunek siły F, a więc i kierunek wektora H, jaki w danym miejscu pola panuje. Przesuwając igiełkę stale w kierunku, jaki każdorazowo wskazuje jej oś, zakreślimy linię zwaną *linią sił.* Z tego sposobu wykreślenia linii sił wynika, że wektor H jest w każdym punkcie linii styczny do niej (rys. 3.4). Przyjęty przez nas w § 1.5 kierunek linii sił od N do S zgadza się z kierunkiem wektora H.

Jeśli pole magnetyczne wytworzone jest przez dwa lub więcej biegunów magnetycznych (rys. 3.4), wówczas siły działające na biegun n igiełki próbnej dodają się wektorowo.

Stąd wynika, że i wektor magnetyczny H w takim polu powstaje przez dodanie wektorowe wektorów magnetycznych (H_1, H_2 itd.) pochodzących od poszczególnych biegunów, wytwarzających pole.

Ze wzoru (3.2b) z łatwością ustalimy *jednostkę natężenia pola magnetycznego* CGS. Mianowicie, kładąc po prawej stronie równości same jednostki ($F = 1$ dyn i $m = 1$ jednostek masy magnetycznej CGS), otrzymamy po lewej stronie również jednostkę. Tę jednostkę nazwano 1 *erstedem* ku czci duńskiego fizyka Oersteda, który w roku 1820 wykrył, że prąd elektryczny wytwarza pole magnetyczne. Napiszemy więc

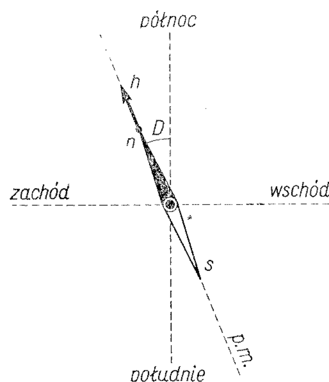
$$1 \text{ Oe} = \frac{1 \text{ dyn}}{1 \text{ j. masy magnetycznej CGS}},$$

co słowami oznacza: *pole magnetyczne ma w danym punkcie natężenie* 1 *ersteda, jeśli na biegun o masie magnetycznej równej jednostce CGS umieszczony w tym punkcie działa siła* 1 *dyny.*

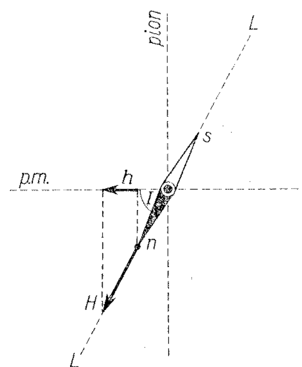
Przykłady: 1. Pole magnetyczne między biegunami zwykłego magnesu w kształcie podkowy jest rzędu 100 Oe.

2. Między biegunami niewielkiego elektromagnesu (rys. 4.107) wytwarza się pole o natężeniu rzędu 10 000 Oe. Większe elektromagnesy wytwarzają pole dochodzące do 40 000 Oe (rys. 3.47), a jeszcze większe — do 60 000 Oe (rys. 3.48).

***§ 3.4. Pole magnetyczne ziemskie.** Znany nam dobrze fakt, że igła magnesowa kompasu (busoli) ustawia się zawsze w pewien określony sposób, mianowicie w kierunku zbliżonym do północnego, świadczy o tym, że na jej bieguny działają siły mające ten kierunek. Innymi słowy, igła przyjmuje w polu magnetycznym ziemskim, kierunek składowej poziomej wektora magnetycznego (rys. 3.5). Kierunek ten nosi nazwę *południka magnetycznego*. Tworzy on z południkiem geograficznym pewien kąt D, zwany *deklinacją* lub *zboczeniem magnetycznym*.

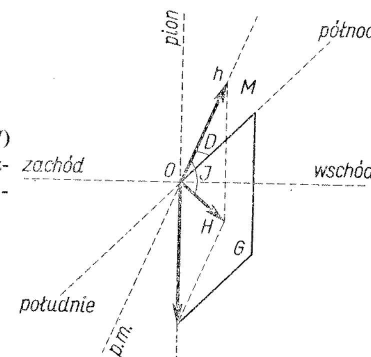


Rys. 3.5. Igła *ns* zwykłego kompasu ustawia się wzdłuż południka magnetycznego (*p. m.*); D — deklinacja, h — składowa pozioma



Rys. 3.6. Igła inklinacyjna ustawia się wzdłuż linii sił pola magnetycznego ziemskiego (*LL*), H — wektor natężenia pola magnetycznego ziemskiego; h — składowa pozioma; I — inklinacja

Zauważmy jednak, że igła kompasu może się obracać jedynie w płaszczyźnie poziomej. Gdyby więc wektor magnetyczny nie leżał w płaszczyźnie poziomej, lecz był w płaszczyźnie południka magnetycznego (płaszczyźnie pionowej przechodzącej przez południk magnetyczny) pochylony np. ku dołowi — igła nie byłaby w stanie tego kierunku wskazać. Weźmy jednak igłę mogącą obracać się w płaszczyźnie pionowej, umieśćmy ją w płaszczyźnie południka magnetycznego, a wskaże nam kierunek prawdziwy wektora pola magnetycznego ziemskiego. Wyniki takiego doświadczenia pokazuje rys. 3.6. Wektor magnetyczny H jest rzeczywiście pochylony ku dołowi: tworzy on z płaszczyzną poziomą dość duży kąt I, zwany *inklinacją*, czyli *nachyleniem magnetycznym*. Igła służąca do pomiaru inklinacji nazywa się igłą inklinacyjną. Musi ona być przed namagnesowaniem (por. § 3.18) doskonale zrównoważona; inaczej pomiary I byłyby złudne. Widzimy, że igła zwykłego kompasu skręca się jedynie pod wpływem składowej h (w kierunku poziomym) wektora H. Dlatego wektor h ma dla nas największe znaczenie: nazywają go po prostu *składową poziomą*.



Rys. 3.7. Elementy magnetyzmu ziemskiego (H, h, D, I) w przestrzeni; *p. m.* — południk magnetyczny; M — płaszczyzna południka magnetycznego; G — płaszczyzna południka geograficznego

Wektor H natężenia pola magnetycznego ziemskiego, jego składowa pozioma oraz oba kąty: deklinacyjny i inklinacyjny, uwidocznione są na wspólnym rysunku oddającym stosunki przestrzenne (rys. 3.7).

Wartości tych elementów magnetyzmu ziemskiego u nas w Polsce pokazuje tablica 3.1. Wartości te odnoszą się do lat 1901, 1928 i 1958. W ciągu lat h oraz I zmieniają się niewiele. Jedynie deklinacja zmienia się znacznie. Zmiana jej w Polsce wynosi obecnie około $+7'$ w ciągu roku. W tablicy tej brakuje wartości H; zauważmy jednak, że H można z łatwością obliczyć przy pomocy h i I, ponieważ, jak to widać z rys. 3.6 lub 3.7,

$$H = \frac{h}{\cos I}.$$

Znajomość dokładnych wartości deklinacji dla różnych miejsc globu ziemskiego ma doniosłe znaczenie praktyczne w żegludze morskiej i powietrznej, w górnictwie, a szczególnie w artylerii. Wystarczy wspomnieć, że celowanie przy strzelaniu z dział odbywa się najczęściej przy pomocy mapy; strzelający musi więc znać dokładnie kierunek np. północny, który wyznaczyć może według kompasu jedynie wtedy, gdy dla

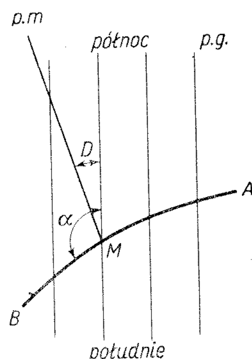
Tablica 3.1

Wartości elementów pola magnetycznego ziemi w Polsce (średnie roczne)

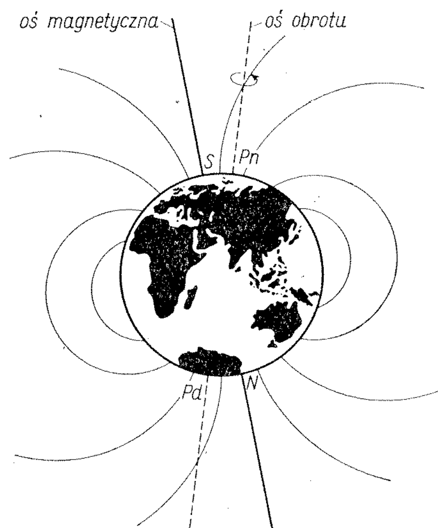
Miejscowość	Rok	h Oe	I	D
Świder koło Warszawy	1901	0,1906	66°50′	—6°13′
	1928	0,1854	66°54′	—2°15′
	1958	0,1825	67°54′	+1°15′
Kraków	1901	0,2026	64°15′	—6°33′
	1928	0,1978	64°51′	—2°35′
	1958	0,1962	65°46′	+0°55′
Poznań	1928	0,1866	66°38′	—3°56′
	1958	0,1843	67°26′	—

(Przy deklinacji znak + oznacza zboczenie w kierunku wschodnim, znak — zboczenie w kierunku zachodnim.)

danego miejsca, w którym znajduje się działo, zna wartość zboczenia magnetycznego. W nawigacji kompas jest tym przyrządem, według którego kieruje się statkiem. Niech linia AB oznacza na mapie żądany kurs statku (rys. 3.8). Mierzymy kąt α zawarty mię-



Rys. 3.8. Ustalenie kursu statku według busoli. D — zboczenie magnetyczne; $(\alpha - D)$ — kąt pomiędzy kilem statku a igłą busoli; $p. m.$ — południk magnetyczny; $p. g.$ — południk geograficzny



Rys. 3.9. Linie sił pola magnetycznego ziemskiego. Pn i Pd — bieguny geograficzne; S i N — bieguny magnetyczne

dzy AB i południkiem geograficznym w miejscu M, w którym w danej chwili znajduje się statek. Jeśli w tym miejscu zboczenie magnetyczne wynosi D, to kąt pomiędzy kilem statku a igłą busoli wynosić musi $\alpha - D$. Nad spełnieniem tego warunku czuwa sternik.

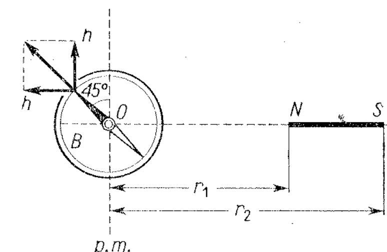
Na szkle przykrywającym busolę nakreślona jest cienka linia, równoległa do kilu statku.

Poznawszy wartości nachylenia magnetycznego w różnych miejscach kuli ziemskiej możemy wyrobić sobie pewne wyobrażenie o przebiegu linii sił pola magnetycznego ziemskiego. Linie te ukazuje w grubym przybliżeniu rys. 3.9. Punkty S i N są to tzw. *bieguny magnetyczne ziemi*, w których inklinacja wynosi 90°. Leżą one w pobliżu biegunów geograficznych, przy czym w pobliżu bieguna północnego znajduje się siedlisko magnetyzmu południowego.

Co jest przyczyną magnetyzmu ziemskiego, nie jest dotychczas wyjaśnione. Prawdopodobnie prądy elektryczne, jakie krążą w ziemi, a których istnienie doświadczalnie udowodniono, jak również złoża minerałów nie pozostają tu bez wpływu. Na zmianę elementów magnetyzmu ziemskiego wpływ pewien mają prądy elektryczne krążące w powietrzu, szczególnie w warstwach górnych, silnie zjonizowanych (por. § 2.35). Jonizacja tych warstw odbywa się wskutek promieniowania Słońca. Toteż nic dziwnego, że pojawianiu się plam słonecznych towarzyszą krótkotrwałe, przejściowe zmiany elementów magnetyzmu ziemskiego zwane *burzami magnetycznymi*. Podczas burzy magnetycznej (która nie ma nic wspólnego z burzą atmosferyczną), zboczenie magnetyczne podlega wahaniom nierzadko przekraczającym 1°.

Badaniem i pomiarami magnetyzmu ziemskiego w Polsce zajmują się: Centralne Obserwatorium Geofizyczne w Belsku, Obserwatorium Geofizyczne im. prof. S. Kalinowskiego w Świdrze i Obserwatorium Geofizyczne w Helu.

§ 3.5. Pomiar składowej poziomej *h*. Niech igła małej busoli wskazuje kierunek południka magnetycznego. Wzdłuż linii OA, prostopadłej do tego kierunku i przechodzącej przez środek busoli O, połóżmy długi i cienki magnes NS (rys. 3.10). Odległość jego od busoli uregulujemy tak, aby igła wychyliła się o 45° z dawnego położenia. Magnes użyty



Rys. 3.10. Pomiar składowej poziomej. Magnes liniowy NS wytwarza pole równe h, lecz prostopadłe do południka magnetycznego, wskutek czego igła wychyla się o 45°

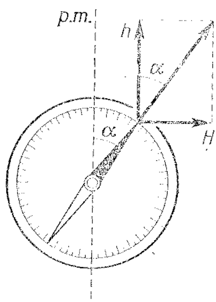
do tego doświadczenia musi być niezbyt słaby, aby odległość jego od busoli była znaczna. Najlepiej użyć magnesu liniowego, o wyznaczonej uprzednio masie magnetycznej m (patrz niżej, przykład liczbowy). Fakt wychylenia się igły o 45° świadczy o tym, że obecnie na każdy biegun igły oprócz dawnego wektora h działa jeszcze jeden wektor natężenia, prawie prostopadły do dawnego (duża odległość r_1!) o tej samej wielkości h. Ten dodatkowy wektor pochodzi od obu biegunów magnesu SN i wynosi w myśl wzoru (3.2a): $\frac{m}{r_1^2} - \frac{m}{r_2^2}$, ponieważ $+m$ jest masą magnetyczną bieguna N, a $-m$ jest masą magnetyczną bieguna S; r_1 i r_2 oznaczają odległości obu biegunów od busoli. A zatem składowa po-

zioma, jako równa powyższemu wektorowi natężenia pola magnesu, oblicza się według wzoru

$$h = m\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right).$$

Przykład liczbowy: $m = 100$ j.m. magn. CGS (wyznaczona na podstawie prawa Coulomba, por. § 3.1 oraz zagadnienie 3.1), $r_1 = 20$ cm, $r_2 = 40$ cm, stąd obliczamy $h = 0{,}19$ Oe.

*§ 3.6. **Magnetometr.** Metodę, jaką zastosowaliśmy w poprzednim paragrafie, można odwrócić: można ją zastosować do wyznaczenia natężenia nieznanego pola H zakładając, że składowa pozioma h jest znana. Nie trzeba przy tym dobierać warunków tak,



Rys. 3.11. Zasada magnetometru; h — składowa pozioma; H — natężenie badanego pola magnetycznego; $p.\,m.$ — południk magnetyczny

by H równe było h, lecz dbać tylko o to, aby H było prostopadłe do h; jeśli bowiem badane pole H będzie np. słabsze niż h, wówczas kąt wychylenia igły będzie mniejszy od 45°. Niechaj kąt ten wynosi α (rys. 3.11); wówczas mamy

$$H = h \operatorname{tg} \alpha .$$

Stąd obliczamy natężenie H badanego pola magnetycznego. Polem tym może być zarówno pole jakiegoś magnesu, jak elektromagnesu, albo pole w otoczeniu solenoidu itp. Metoda ta może być bardzo dokładna, ponieważ h znamy z dużą dokładnością (istnieją daleko dokładniejsze metody pomiaru składowej poziomej aniżeli ta, jaką opisaliśmy w § 3.5). Należy stosować przy tym igłę bardzo krótką, aby natężenie pola badanego w miejscach, gdzie się znajdują oba bieguny igły, było jednakowe. Gdy jednak igła jest krótka, odczytanie kąta jej wychylenia jest mało dokładne. Dlatego do krótkiej igły przymocowujemy długą, lekką wskazówkę aluminiową lub też stosujemy odczytanie optyczne jak w galwanometrach zwierciadłowych (por. § 1.7, rys. 1.16).

Przyrząd opisany nosi nazwę *magnetometru*. Jako magnetometru można użyć również zwykłego kompasu, jeśli nie jest wymagana wielka dokładność.

*§ 3.7. **Strumień indukcji magnetycznej.** Wyobraźmy sobie biegun bardzo długiego liniowego magnesu. Biegun ten wytwarza pole (rys. 3.12). Linie sił tego pola, ze względu na znaczne oddalenie bieguna przeciwnego, biegną niemal promienisto. Weźmy pod uwagę ostrosłup ograniczony liniami sił i zakreślmy promieniami o długości 1, 2, 3, ..., r powierzchnie kuliste. Części tych powierzchni, jakie wytnie nasz ostrosłup, są proporcjo-

nalne do kwadratu odległości od bieguna: $S = \omega r^2$, gdzie ω jest miarą kąta bryłowego, jaki tworzą ściany ostrosłupa u jego wierzchołka. Zauważmy, że natężenie pola magnetycznego H na każdej z tych powierzchni jest stałe (stałość r) i w odległości r wynosi $H = \frac{m}{\mu r^2}$, gdzie m jest masą magnetyczną danego bieguna. Pole pochodzące od bieguna przeciwnego pomijamy, ze względu na znaczne jego oddalenie. Wobec tego iloczyn μHS nie zależy od r

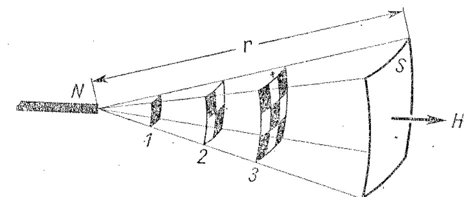
$$\mu HS = \text{const}.$$

W wypadku naszego odosobnionego bieguna: $\mu HS = m\omega$. A jeśli jako powierzchnię S weźmiemy powierzchnię kuli zamykającej w sobie biegun N, to wówczas $\mu HS = 4\pi m$, ponieważ kąt bryłowy pełny $\omega = 4\pi$ (por. zagadnienie 3.9). Iloczyn μHS nazywamy *strumieniem indukcji magnetycznej* przez powierzchnię S i oznaczamy go literą Φ

$$\Phi = \mu HS. \tag{3.3}$$

Wzór powyższy, określający strumień indukcji magnetycznej, pozwala ustalić jednostkę tego strumienia w układzie elektromagnetycznym CGS. Jeśli mianowicie $H = 1$ Oe, $S = 1$ cm² i $\mu = 1$ (próżnia), to Φ jest wówczas strumieniem jednostkowym; jednostka ta nosi nazwę *makswela* (Mx).

Rys. 3.12. Objaśnienie definicji strumienia indukcji magnetycznej $\Phi = \mu HS$



Jeśli w każdym punkcie powierzchni równej 1 cm² *wektor magnetyczny H wynosi* 1 ersted *i jest do tej powierzchni prostopadły, to mówimy, że przez tę powierzchnię przechodzi strumień indukcji magnetycznej równy* 1 *makswelowi* (1 Mx), *jeśli dla danego ośrodka można przyjąć $\mu = 1$.*

Pojęcie strumienia wektora magnetycznego wprowadził pierwszy Faraday, choć w nieco odmiennej postaci. Mianowicie, jeśli wyobrazimy sobie powierzchnię 1 cm² ustawioną prostopadle do linii sił w polu o natężeniu np. 20 Oe, to Faraday wyrażał się, że przez tę powierzchnię przechodzi 20 linii sił, my natomiast powiemy, że przez tę powierzchnię przechodzi strumień indukcji równy 20 makswelom. Różnica nie jest więc zasadnicza, tkwi raczej tylko w nazwie: strumień indukcji magnetycznej oznacza to samo, co „*liczba linii sił*" u Faradaya, a 1 makswel oznacza to samo, co „1 linia sił". Zauważmy, że warunek $\mu HS = \text{const}$ mówi nam, że im H większe, tym S mniejsze, i odwrotnie; tzn. że w silniejszych partiach pola linie zagęszczają się, w słabszych — stają się rzadsze. W polu jednorodnym linie są równoległe.

Wyrysujmy wiązkę linii sił według sposobu Faradaya dla pola jednorodnego o natężeniu H: przez każdy cm² ustawiony prostopadle do linii sił musi przechodzić μH linii sił. Przez powierzchnię S przechodzi więc μHS linii sił (rys. 3.13). Jeśli tę wiązkę przetniemy większą powierzchnią S', ale ukośną do linii sił, to liczba linii sił przechodząca

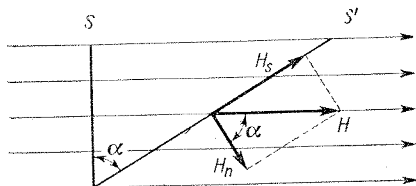
przez nią nie zmieni się. Strumień indukcji przez powierzchnię S' jest więc ten sam. Możemy napisać

$$\Phi = \mu HS = \mu HS' \cos\alpha = \mu H \cos\alpha \cdot S',$$

gdzie α jest kątem między powierzchniami S' i S. Ale $H \cos\alpha$ jest to składowa H_n, normalna (prostopadła) do powierzchni S', zatem

$$\Phi = \mu H \cos\alpha \cdot S' = \mu H_n S'. \tag{3.3a}$$

We wzorze (3.3a) mamy ogólniejsze określenie strumienia indukcji, mianowicie strumienia przechodzącego przez powierzchnię S' nieprostopadłą do linii sił. Jeśli linie sił pola jednorodnego o natężeniu H przechodzą (nie prostopadle) przez powierzchnię S',



Rys. 3.13. Strumień indukcji magnetycznej przechodzi przez powierzchnie S i S' zaznaczone na rysunku w przekroju

to *strumień indukcji przez tę powierzchnię jest proporcjonalny nie do natężenia pola H, lecz tylko do składowej normalnej H_n*. Ze wzoru tego zrozumiemy, że jeśli mamy powierzchnię S' o stałym niezmiennym polu i ustawiać ją będziemy pod różnymi kątami α do linii sił, to największy strumień indukcji (największą liczbę linii sił) otrzymamy ustawiwszy powierzchnię prostopadle do linii sił; wówczas bowiem $\cos\alpha = 1$ i H_n przybiera największą swoją wartość $= H$. Ze wzoru tego również widać, że jeśli powierzchnię S' ustawić stycznie do linii sił ($\cos\alpha = 0$, $H_n = 0$), to strumień $\Phi = 0$, mimo że składowa styczna H_s osiągnęła największą swoją wartość $= H$.

§ 3.8. Moment magnetyczny dipola. Obliczmy natężenie pola magnetycznego w otoczeniu krótkiego liniowego magnesu SN (rys. 3.14). Jeśli długość magnesu jest bardzo mała w stosunku do odległości r rozważanych punktów P, Q itd., od magnesu, wówczas magnes taki, stanowiący swego rodzaju dipol magnetyczny nazywać, będziemy *dipolem elementarnym*.

1. Przede wszystkim obliczymy natężenie pola magnetycznego H_1 dipola elementarnego w punkcie P, leżącym na przedłużeniu osi dipola. Odległość punktu P od środka dipola oznaczamy literą r; masy magnetyczne obu biegunów dipola wynoszą $+m$ i $-m$, a ich wzajemna odległość — l. Stosując wzór (3.2a) otrzymujemy

$$H_1 = \frac{m}{\mu\left(r-\frac{l}{2}\right)^2} - \frac{m}{\mu\left(r+\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{2mlr}{\mu\left(r-\frac{l}{2}\right)^2\left(r+\frac{l}{2}\right)^2}.$$

Biorąc pod uwagę, że l jest bardzo małe w stosunku do r (czyli $l \ll r$), możemy mianownik powyższego wyrażenia zastąpić przez r^4; jest to bowiem wartość, do której dąży mianownik, gdy $l \to 0$. Tym sposobem otrzymamy.

$$H_1 = \frac{2ml}{\mu r^3}.$$

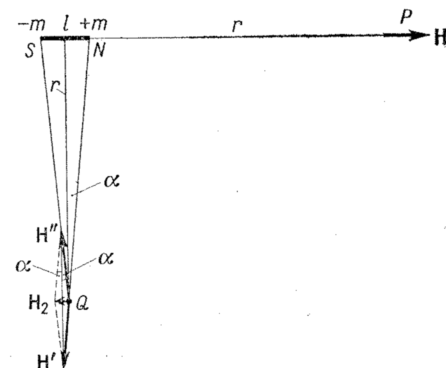
Iloczyn ml nazywamy momentem magnetycznym dipola (czy magnesu) i oznaczamy literą M:

$$M = ml. \tag{3.4}$$

Wówczas

$$H_1 = \frac{2M}{\mu r^3}. \tag{3.4a}$$

2. Podobnie obliczymy natężenie pola magnetycznego H_2 tego samego dipola w punkcie Q leżącym w płaszczyźnie prostopadłej do osi dipola i przechodzącej przez jego środek



Rys. 3.14. Obliczenie wektorów H_1 i H_2 natężenia pola magnetycznego w punktach P i Q odległych o r od środka dipola elementarnego

(czyli w płaszczyźnie „równikowej"). Wektor $\mathbf{H}_2$ jest sumą geometryczną dwóch wektorów $\mathbf{H}'$ i $\mathbf{H}''$ pochodzących od obu biegunów dipola z osobna; ich wartość skalarna wynosi

$$H' = H'' = \frac{m}{\mu r^2}$$

(jeśli pominiemy niezmiernie małą różnicę między odległością r a odległością SQ, czy NQ). Suma geometryczna obu tych wektorów daje H_2:

$$H_2 = 2\frac{m}{\mu r^2}\sin\alpha,$$

gdzie (ponieważ kąt α jest mały) $\sin\alpha \cong \operatorname{tg}\alpha = \frac{l/2}{r}$. Podstawiając tę wartość do ostatniego wzoru otrzymujemy

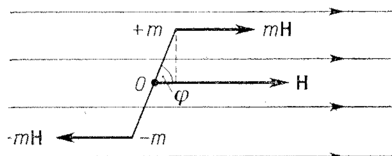
$$H_2 = \frac{ml}{\mu r^3}$$

albo

$$H_2 = \frac{M}{\mu r^3}. \tag{3.4b}$$

Ze wzorów (3.4a, b) widzimy, że pole magnetyczne w określonej odległości r od dipola elementarnego zależy wyłącznie od jego momentu magnetycznego M, czyli od iloczynu ml (od rodzaju ośrodka — jeśli w nim nie ma żelaza — zależy niezwykle słabo). Mierząc H_1 lub H_2 oraz r możemy wyznaczyć moment magnetyczny dipola M; nie możemy natomiast uzyskać dokładnych informacji o masach magnetycznych $\pm m$ tego dipola i ich wzajemnej odległości l. Odległość ta bowiem nie jest identyczna z długością magnesu; przeciwnie, jest nieco mniejsza, gdyż masy magnetyczne nie są umiejscowione na samych końcach magnesu, lecz zajmują mniejsze lub większe obszary w pobliżu końców sztabki magnesowej.

3. Obliczmy wreszcie moment sił skręcających, które działają na dowolny dipol magnetyczny (niekoniecznie elementarny) umieszczony w jednorodnym polu magnetycznym o natężeniu H (rys. 3.15). Moment obu sił działających na bieguny dipola oznaczmy symbolem M^*; wyraża się on jako suma dwóch iloczynów „siła razy ramię"; ponieważ według wzoru (3.2), siłą jest mH, zaś ramieniem $\frac{l}{2}\sin\varphi$ (gdzie l oznacza długość dipola, a φ — kąt między osią dipola a kierunkiem linii sił pola H), przeto



Rys. 3.15. Na dipol umieszczony w polu magnetycznym działa moment skręcający

$$M^* = mH\frac{l}{2}\sin\varphi + mH\frac{l}{2}\sin\varphi = mlH\sin\varphi.$$

Ponieważ moment magnetyczny dipola $M = ml$, przeto na moment sił skręcających dipol otrzymujemy wyrażenie

$$M^* = MH\sin\varphi. \tag{3.5}$$

Dla dipola ustawionego poprzecznie do linii sił pola magnetycznego ($\varphi = 90°$) moment skręcający jest największy i wynosi

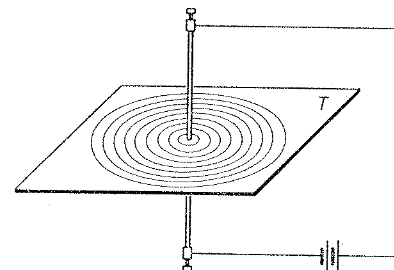
$$M^* = MH. \tag{3.5a}$$

Zmierzywszy M^* i H możemy z tego wzoru obliczyć moment magnetyczny M magnesu. I znów, wobec nieokreśloności odległości l mas magnetycznych magnesu, nie możemy wyznaczyć dokładnie wielkości masy magnetycznej m. Ta sama niedokładność wyznaczenia m występuje również w doświadczeniach przedstawionych na rys. 3.1 i 3.2, w których dwa bieguny jednoimienne dwóch różnych magnesów odpychają się (por. zagadnienie 3.1). Dochodzi tu jeszcze zakłócenie związane z działaniem przeciwnych biegunów tych magnesów, nigdy bowiem nie mamy do czynienia z odosobnionymi biegunami. Widzimy więc, że wielkość masy magnetycznej m bieguna magnetycznego, jako nie dająca się dokładnie wyznaczyć, nie może mieć w nauce o magnetyzmie większego znaczenia. Natomiast moment magnetyczny M dipola magnetycznego, który daje się dokładnie wyznaczyć, jest ważną wielkością, która charakteryzuje dipol magnetyczny.

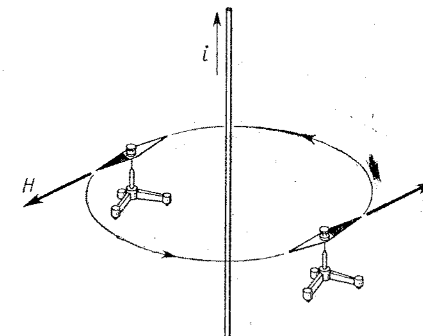
Stosuje się to zwłaszcza do prądu kołowego, wytwarzającego pole magnetyczne równoważne polu blaszki namagnesowanej, na której powierzchniach znajdują się bieguny N i S (patrz rys. 3.20 w § 3.10). Nie możemy wprawdzie nic powiedzieć o wielkości mas magnetycznych owej blaszki magnetycznej i o jej grubości, niemniej jednak możemy z całą dokładnością wyznaczyć jej moment magnetyczny M.

B. Pole magnetyczne prądu elektrycznego

***§ 3.9. Pole magnetyczne prądu liniowego.** Już z doświadczenia przedstawionego na rys. 1.9 (§ 1.5) widać, że linie sił pola magnetycznego okrążają przewodnik. Wyraźniej to zobaczymy biorąc przewodnik prosty. W okolicy takiego przewodnika, podczas przepływu przez niego prądu wytwarzają się linie sił dokładnie kołowe, co uwidocznić nietrudno przy pomocy opiłek żelaznych (rys. 3.16). Kierunek linii pola magnetycznego



Rys. 3.16. Linie sił pola magnetycznego prądu liniowego są kołowe. Uwidoczniamy je przy pomocy opiłek żelaznych, którymi posypujemy tekturkę T

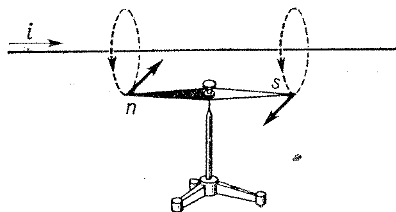


Rys. 3.17. Ustalenie reguły śruby pozwalającej odnaleźć kierunek linii sił pola magnetycznego (H), gdy wiadomy jest kierunek prądu (i)

ustalamy przy pomocy busoli, jak poucza rys. 3.17. Na tej podstawie możemy wypowiedzieć następującą regułę, zwaną regułą śruby: *kierunek sił pola magnetycznego prądu liniowego jest taki jak kierunek obrotu śruby prawoskrętnej, która kręcąc się posuwałaby się w kierunku prądu elektrycznego.* Zauważmy, że kierunek linii sił jest jednocześnie tym kierunkiem, w którym wychyli się biegun północny igiełki magnesowej wprowadzonej w pole; jej biegun południowy wychyli się oczywiście w kierunku przeciwnym.

Poznawszy strukturę pola magnetycznego prądu liniowego rozumiemy teraz doświadczenie przedstawione na rys. 1.1, a które odtwarzamy raz jeszcze na rys. 3.18. Nad igiełką magnesową wzdłuż południka magnetycznego rozciągnięty jest drut. Z chwilą puszczenia prądu igiełka wychyla się. Zapytujemy: w którą stronę igła się wychyli w stosunku

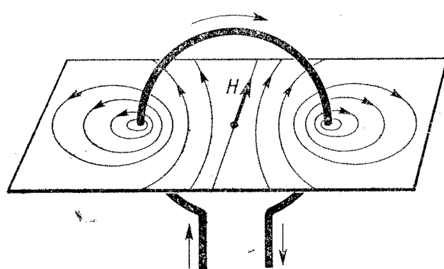
do kierunku prądu? Zastosujemy regułę śruby: kierunek obrotu śruby wkręcanej wzdłuż prądu jest kierunkiem linii sił; linia przechodząca przez biegun północny igiełki wskazuje kierunek odchylenia się tego bieguna. Jednocześnie na biegun południowy działa siła w kierunku przeciwnym do linii sił.



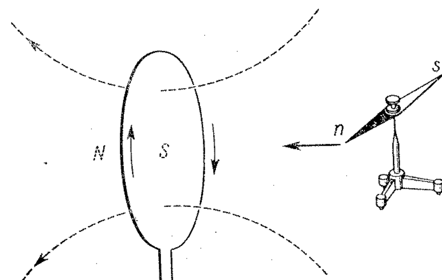
Rys. 3.18. Doświadczenie z rys. 1.1 wytłumaczone za pomocą struktury pola magnetycznego prądu

***§ 3.10. Pole magnetyczne prądu kołowego.** W § 1.5 poznaliśmy pole magnetyczne wytworzone przez solenoid. Przekonaliśmy się, że solenoid wytwarza pole magnetyczne podobne do pola liniowego magnesu: linie sił pola magnetycznego na zewnątrz solenoidu mają podobny przebieg jak linie sił zwykłego magnesu liniowego (por. rys. 1.6 i 1.9).

Jeżeli będziemy brali solenoid coraz krótszy, zmniejszając liczbę jego zwojów, to będzie on wytwarzał pole takie, jak odpowiednio krótszy magnes. Wreszcie dojdziemy do jednego tylko zwoju. Prąd przepływający przez ten zwój wytworzy pole, którego strukturę łatwo zbadać przy pomocy opiłek żelaznych, jak wskazuje rys. 3.19. Widzimy,



Rys. 3.19. Obwód kołowy przechodzi przez tekturę, na której opiłki żelazne ukazują przebieg linii sił. Kierunek linii sił ustalamy, jak wskazuje rys. 3.20



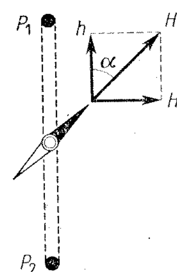
Rys. 3.20. Odszukanie biegunów „blaszki" magnetycznej wytworzonej przez obwód kołowy prądu

że linie sił biegną tak, jakby obwód kołowy prądu wytwarzał niewidzialną blaszkę magnetyczną. Bieguny N i S tej blaszki znajdujemy doświadczalnie zbliżając do nich busolę (rys. 3.20). Stwierdzamy i tu słuszność reguły, wypowiedzianej na końcu § 1.5 w odniesieniu do solenoidu: *jeżeli patrząc na obwód kołowy widzimy, że prąd płynie w kierunku niezgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, to biegun, na który patrzymy, jest biegunem północnym* (N); *w przeciwnym razie jest to biegun południowy* (S). Stąd wynika kierunek linii sił: biegną one od N do S na zewnątrz obwodu (rys. 3.20).

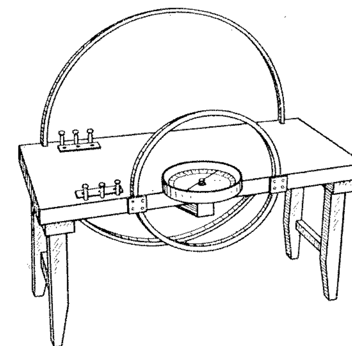
Doświadczenie z opiłkami żelaznymi poucza nas (rys. 3.19), że wektor H jest prostopadły do płaszczyzny obwodu. Zapytujemy, jak zależy on od natężenia prądu i oraz od

promienia r obwodu? Odpowiedzi udzieli nam doświadczenie, w którym natężenie pola H mierzyć będziemy za pomocą magnetometru w postaci choćby zwykłego kompasu umieszczonego w środku obwodu.

Obwód kołowy ustawiamy w płaszczyźnie południka magnetycznego. Po włączeniu prądu, na bieguny igły działają dwa wektory magnetyczne: h — składowa pozioma wektora magnetycznego ziemskiego oraz H — wektor magnetyczny badanego prądu (rys.



Rys. 3.21. Pomiar wektora H w środku obwodu kołowego (igła musi być krótka). P_1 i P_2 oznaczają punkty przebicia płaszczyzny rysunku przez przewodnik kołowy



Rys. 3.22. Przyrząd do wyznaczania zależności H od i oraz r. W środku mniejszego obwodu znajduje się magnetometr o krótkiej igle, z przymocowaną długą wskazówką aluminiową

3.21). Igła ustawia się pod wpływem wypadkowego wektora H', tzn. że na każdy biegun igły działa siła mH', gdzie m jest masą magnetyczną bieguna. Jeśli α oznacza kąt wychylenia się igły z pierwotnego położenia, to

$$H = h \operatorname{tg} \alpha;$$

stąd znając h i zmierzywszy α obliczamy H. Pomiar należy powtórzyć dla rozmaitych wartości natężenia prądu i oraz przynajmniej dla dwóch wartości promienia r obwodu kołowego. Przyrząd nadający się do tego celu pokazuje rys. 3.22; zawiera on dwa obwody kołowe o różnych promieniach. Wynik doświadczenia jest prosty i daje się wyrazić wzorem

$$H = \frac{2\pi}{10} \frac{i}{r} \qquad (3.6)$$

$$(\text{Oe}) \quad \left(\frac{\text{A}}{\text{cm}}\right)$$

lub słowami: natężenie H pola magnetycznego w środku obwodu kołowego jest proporcjonalne do natężenia prądu, a odwrotne proporcjonalne do promienia koła; współczynnik proporcjonalności jest dokładnie równy $2\pi/10$. Że współczynnik ten wypadł taki a nie inny, nie jest oczywiście sprawą przypadku, lecz wynika ze specjalnego celowego określenia 1 ampera (por. § 1.10).

Na obręczach przyrządu przedstawionego na rys. 3.22 nawinięty jest nie jeden zwój drutu, lecz kilkadziesiąt zwojów podzielonych na dwie części. Doświadczenie pokazuje, że H jest proporcjonalne do liczby n zwojów, czyli do liczby okrążeń prądu:

$$H = \frac{2\pi}{10} \frac{in}{r}. \tag{3.7}$$

Ponieważ $H = h \operatorname{tg} \alpha$, przeto możemy wzory te połączyć i napisać w takiej postaci:

$$i = \frac{5hr}{\pi n} \operatorname{tg} \alpha.$$

Stąd widać, że natężenie prądu oraz tangens kąta wychylenia igły są wzajemnie proporcjonalne, przy czym współczynnik proporcjonalności $\frac{5hr}{\pi n}$ można z łatwością obliczyć znając h, r i n. Wobec tego przyrząd taki, jak na rys. 3.22 (lecz tylko z jedną obręczą) może służyć do pomiaru natężenia prądu; pomiar polegałby na odczytaniu α i obliczeniu i według powyższego wzoru. Przyrząd taki, zwany *busolą stycznych* był dawniej często używany. Dzisiaj w laboratoriach używa się wyłącznie galwanometrów i amperomierzy i to nie z ruchomym magnesem jak w busoli stycznych, lecz z ruchomą cewką. Te drugie mają bowiem wiele zalet, których brak pierwszym (por. np. § 4.3, punkt 1).

***§ 3.11. Prawo Biota i Savarta.** Wzór (3.6) można napisać również tak:

$$H = \frac{1}{10} \frac{2\pi ri}{r^2},$$

a ponieważ $2\pi r$ jest to długość l obwodu kołowego, przeto

$$H = \frac{1}{10} \frac{il}{r^2}.$$

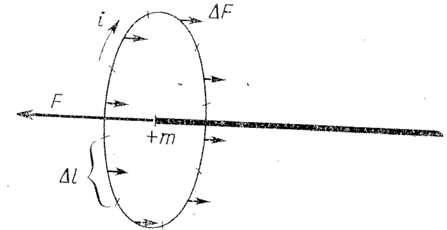
Siła F, którą wywiera prąd kołowy na biegun $+m$ jakiegoś cienkiego i długiego magnesu umieszczony w środku koła, wynosi $F = mH$, więc

$$F = \frac{1}{10} \frac{mil}{r^2}.$$

Ale w myśl III zasady Newtona biegun magnetyczny musi wywierać na obwód z prądem taką samą siłę F, lecz przeciwnie skierowaną. Siła ta jest równomiernie rozłożona na cały obwód i działa na każdą cząstkę drutu. Ilustruje to rys. 3.23, w którym obwód kołowy został podzielony (w myśli) na N odcinków, czyli elementów o długości $\Delta l = \frac{l}{N}$. Na każdy element działa siła $\Delta F = \frac{F}{N}$, tak że suma wszystkich tych sił równa jest sile F, lecz jest przeciwnie skierowana. Dzieląc obie strony ostatniego wzoru przez N otrzymujemy

$$\Delta F = \frac{1}{10} \frac{mi\Delta l}{r^2}.$$

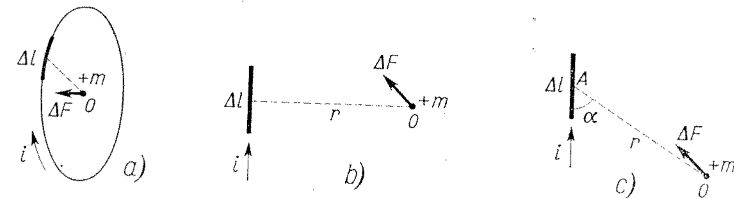
Możemy znów powiedzieć, że skoro każdy element Δl prądu doznaje siły ΔF, to i wzajemnie siłę ΔF wywiera na biegun $+m$; działanie wszystkich elementów Δl daje razem całkowitą siłę F. A zatem jeden element prądu o długości Δl wywiera na biegun $+m$ siłę ΔF wyrażoną powyższym wzorem; ilustruje to rys. 3.24a. Jeśli obwód kołowy podzielimy na wielką liczbę elementów Δl, to każdy z tych elementów możemy uważać za prosty. W punkcie O (rys. 3.24b) odległym o r od elementu, a leżącym w płaszczyźnie do niego prostopadłej, element ten wywiera na biegun $+m$ siłę ΔF wyrażoną tym samym wzorem. Stanowi to treść *prawa Biota i Savarta*: *działanie prądu na biegun magnetyczny możemy uważać za wypadkową działań poszczególnych elementów prądu; element prądu i o długości Δl działa w odległości r (prostopadłej do niego) na biegun magnetyczny + m siłą ΔF wyrażoną wzorem*



Rys. 3.23. Obwód kołowy prądu działa na biegun $+m$ siłą F. Ta sama siła ($\Sigma\Delta F$), lecz przeciwnie skierowana, działa na wszystkie elementy obwodu

$$\Delta F = \frac{1}{10} \frac{mi\Delta l}{r^2}, \tag{3.8}$$

przy czym wektor ΔF jest prostopadły zarówno do Δl, jak do r; kierunek jego, tak jak kierunek linii sił, wyznacza reguła śruby.



Rys. 3.24. Pojedynczy element Δl prądu wywiera na biegun $+m$ siłę ΔF

Napiszemy teraz prawo Biota i Savarta w ogólniejszej postaci. Mianowicie, jeśli odległość punktu O od środka A elementu z prądem Δl nie jest do niego prostopadła, lecz tworzy z nim kąt α (rys. 3.24c), wówczas we wzorze (3.8) określającym ΔF pojawi się zależność od α. Żeby poznać rodzaj tej zależności, potraktujmy natężenie prądu elektrycznego, będącego w istocie swej ruchem ładunków elektrycznych, jako wielkość wektorową. Rozłóżmy ją na dwie składowe i_1 oraz i_2 (rys. 3.25). Przy takim rozkładzie, w którym prąd i_1 płynie wzdłuż osi OA, zaś prąd i_2 jest do tej osi prostopadły, siłę na biegun $+m$ wytwarza jedynie prąd i_2. A ponieważ $i_2 = i \sin\alpha$, przeto prawo Biota i Savarta przybierze postać

$$\Delta F = \frac{1}{10} \frac{mi\Delta l}{r^2} \sin\alpha, \tag{3.8a}$$

przy czym kierunek ΔF pozostaje po dawnemu prostopadły do Δl i r.

Zastosujemy wzór (3.2b) do określenia natężenia pola magnetycznego w punkcie O:

$$\Delta H = \frac{\Delta F}{m};$$

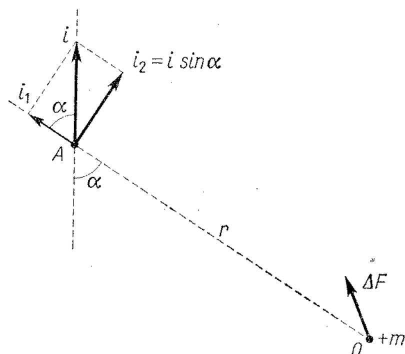
otrzymamy

$$\Delta H = \frac{1}{10}\,\frac{i\Delta l}{r^2}\sin\alpha. \tag{3.9}$$

Gdy odcinek $OA \equiv r$ jest prostopadły do elementu Δl, wówczas $\sin\alpha = 1$:

$$\Delta H = \frac{1}{10}\,\frac{i\Delta l}{r^2}. \tag{3.9a}$$

Powróciliśmy więc do przypadku przedstawionego na rys. 3.24a i b.



Rys. 3.25. Prąd i z rys. 3.24c działa w punkcie O na biegun magnetyczny $+m$ siłą ΔF. Siłę tę wywiera jedynie składowa prądu i_2 prostopadła do r. Dlatego natężenie pola magnetycznego ΔH w punkcie O wyraża wzór (3.9)

Wzory powyższe są w istocie wzorami różniczkowymi, chociaż tutaj nadaliśmy im postać różnicową. Jak bardzo pożyteczny okaże się wzór (3.9) w postaci różniczkowej:

$$dH = \frac{1}{10}\,\frac{idl}{r^2}\sin\alpha, \tag{3.9b}$$

przekonamy się w § 3.15.

***§ 3.12. Jednostka elektromagnetyczna CGS natężenia prądu. Ścisłe określenie ampera.** Wzór (3.6) wyrażający związek pomiędzy natężeniem pola magnetycznego H w środku obwodu kołowego a natężeniem prądu i płynącego w tym obwodzie jest pierwszym wzorem, który wiąże wielkość magnetyczną (H) z wielkością elektryczną (i). Równoważnym mu wzorem jest wzór (3.9), który wyznacza natężenie pola magnetycznego ΔH, pochodzące jedynie od odcinka Δl obwodu. Wyobraźmy sobie, że wszystkie wielkości po prawej stronie wzoru (3.9) uczyniliśmy jednostkowymi: $i = 1$ A, $\Delta l = 1$ cm; wówczas otrzymujemy $\Delta H = 1/10$ Oe. Dlaczego właśnie doświadczenie dało dokładnie 1/10 Oe, a nie trochę mniej lub więcej? Czy nie jest to rzecz przypadku? Otóż nie. Przypomnijmy sobie, że 1 amper określiliśmy jako taką jednostkę natężenia prądu, która w ciągu 1 sekundy wydzieli na katodzie podczas elektrolizy azotanu srebra 1,1183 mg srebra (por. § 1.10). Obecnie możemy powiedzieć, że liczba „1,1183 mg" została wybrana dlatego,

aby we wzorze (3.9) lub (3.6) wystąpił właśnie współczynnik dokładnie równy 1/10. Współczynnik ten nie jest więc dziełem przypadku, lecz jest wynikiem celowego określenia jednostki ampera.

Zapytajmy, jak silny prąd należy przepuścić przez obwód kołowy o promieniu jednostkowym ($r = 1$ cm), aby jego odcinek Δl jednostkowy ($\Delta l = 1$ cm) dał w środku koła natężenie ΔH jednostkowe ($\Delta H = 1$ Oe)? Odpowiedź jest łatwa: natężenie prądu musi wynosić 10 A. Otóż natężenie prądu, który przepływając przez łuk długości 1 cm należący do koła o promieniu 1 cm wytwarza w środku tego koła pole magnetyczne o natężeniu 1 ersteda, nazywamy *jednostką elektromagnetyczną natężenia prądu.* Wobec tej definicji: 1 j. em natężenia prądu = 10 A. Związek

$$1\ \text{A} = \frac{1}{10}\ \text{j. em natężenia prądu}$$

uznano w nauce za podstawową definicję ampera.

Jeśli i wyrazimy nie w amperach, lecz w jednostkach elektromagnetycznych natężenia prądu, we wzorach (3.6) i (3.9) zniknie czynnik 1/10. A więc będziemy mieli dla całego obwodu kołowego

$$H = 2\pi\frac{i}{r}, \tag{3.6a}$$

oraz dla elementu Δl tegoż obwodu

$$\Delta H = \frac{i\Delta l}{r^2} \tag{3.9c}$$

lub ogólnie

$$\Delta H = \frac{i\Delta l}{r^2}\sin\alpha \tag{3.9d}$$

(i — w j. em natężenia prądu).

Słowne określenie jednostki elektromagnetycznej natężenia prądu jest więc na podstawie tych wzorów następujące: *prąd ma natężenie równe* 1 *jednostce elektromagnetycznej natężenia prądu, jeśli przepływając przez obwód kołowy o promieniu* $r = 1$ cm *wytwarza w jego środku pole magnetyczne o natężeniu* $H = 2\pi$ Oe, [*wzór* (3.6a)]; *lub jeśli każdy odcinek łuku o długości* $\Delta l = 1$ cm *powyższego obwodu kołowego* (*o promieniu* $r = 1$ cm) *wytwarza w środku koła pole magnetyczne o natężeniu* $\Delta H = 1$ Oe [wzór (3.9c)].

Jednostka elektromagnetyczna natężenia prądu elektrycznego daje początek *całemu układowi jednostek elektromagnetycznych* CGS. Można więc przy jej pomocy ustalić jednostki elektromagnetyczne: ładunku (na podstawie wzoru $e = it$), napięcia (na podstawie wzoru $U = \frac{M}{i}$), oporu itd. Dla przykładu wyprowadzimy jednostkę elektromagnetyczną napięcia.

$$1\ \text{j. em. napięcia} = \frac{1\ \text{erg/s}}{1\ \text{j. em natężenia prądu}} = \frac{10^{-7}\ \text{W}}{10\ \text{A}} = 10^{-8}\,\frac{\text{W}}{\text{A}} = 10^{-8}\ \text{V}.$$

Jak na praktyczne zastosowania, jest to jednostka niezwykle mała.

***§ 3.13. Wzmianka historyczna o amperze absolutnym i o dawniej używanym amperze międzynarodowym.** Przypomnijmy sobie dla przykładu historię określenia 1 metra. Umową międzynarodową ustalono, że 1 m ma być 1/10 000 000 ćwiartki południka ziemskiego, przy czym sporządzono odpowiedni wzorzec. Późniejsze jednak pomiary pokazały, że tak sporządzony metr jest nieco za krótki, mianowicie krótszy o 0,2 mm od 1/10 000 000 ćwiartki południka ziemskiego. Niemniej pozostawiono pierwotny wzorzec jako wzorzec „międzynarodowego" metra, chociaż okazał się nieco krótszy od metra „zamierzonego".

Podobna nieco historia wydarzyła się przy określeniu ampera, który jest fundamentem układu praktycznego jednostek elektrycznych. Otóż amper określono jako 1/10 jednostki elektromagnetycznej CGS natężenia prądu; tak określony amper nazwano *amperem absolutnym*. Ponieważ jednak pomiar prądu w jednostkach elektromagnetycznych jest nader trudny, oparto definicję ampera na zjawisku elektrolizy azotanu srebra. Przede wszystkim przy pomocy pomiarów ustalono w końcu ubiegłego stulecia, że 1 amper wydziela 1,1180 mg srebra w ciągu 1 s. Wynik ten posłużył jako podstawa umowy międzynarodowej; umówiono się, aby natężenie prądu, który w ciągu 1 sekundy wydziela z roztworu azotanu srebra 1,1180 mg srebra uznać za jednostkowe i nazwać *amperem międzynarodowym*. Czytelnik domyśla się już, że późniejsze, dokładniejsze pomiary pokazały, że amper absolutny wydziela w ciągu 1 s jednak nieco inną ilość srebra. Rzeczywiście, obecnie wiemy, że 1 amper absolutny (1/10 j. em) wydziela w ciągu 1 s nie 1,1180 mg, lecz 1,1183 mg srebra. Wobec tego amper międzynarodowy (który wydziela 1,1180 mg srebra) był nieco mniejszy od ampera absolutnego (równego 1/10 j. em), mianowicie o około 3 dziesięciotysięczne, czyli o około 0,03%. Była to różnica tak mała, że w praktyce laboratoryjnej i w technice nie miała żadnego znaczenia i tylko w bardzo precyzyjnych pracach naukowych musiała być brana pod uwagę. Obecnie ten kłopot odpada, ponieważ „Międzynarodowa Komisja Wag i Miar" postanowiła, aby począwszy od 1 stycznia 1940 roku zarzucić całkowicie „amper międzynarodowy" i wywodzące się z niego inne „jednostki międzynarodowe", a pozostawić w mocy amper absolutny i oparte na nim jednostki absolutne (por. tabl. 2.3, § 2.42). Podkreślić więc chcemy, że *obowiązujący powszechnie układ praktyczny jednostek opiera się na amperze absolutnym*. Amper międzynarodowy, używany przeszło 30 lat przeszedł do historii.

§ 3.14. Stosunek elektromagnetycznej do elektrostatycznej jednostki natężenia prądu. W § 2.42 zdefiniowaliśmy jednostkę elektrostatyczną ładunku, a znając z pomiaru wartość liczbową współczynnika ε_0, który występuje w prawie Coulomba [wzór (2.21a)], wyprowadziliśmy związek

$$1\ \mathrm{C} = 3\cdot 10^9 \text{ j.es ładunku}.$$

Stąd wyniknęło, że

$$1\ \mathrm{A} = 3\cdot 10^9 \text{ j.es natężenia prądu}.$$

Z drugiej strony, w § 3.12 zdefiniowaliśmy jednostkę elektromagnetyczną natężenia prądu. Przy tym na podstawie pomiarów § 3.10 okazało się, że

$$1 \text{ j.em natężenia prądu} = 10\ \mathrm{A}.$$

Porównanie obu ostatnich związków daje, że

$$1 \text{ j.em natężenia prądu} = 3\cdot 10^{10} \text{ j.es natężenia prądu}. \tag{3.10}$$

Związek ten mówi, że stosunek jednostki elektromagnetycznej do jednostki elektrostatycznej natężenia prądu w układzie CGS jest równy $3\cdot 10^{10}$. Osobliwą jest rzeczą, że liczba ta wyraża prędkość światła w jednostkach tegoż układu CGS, tzn. w cm/s.

Podkreślić należy, że związek ten został potwierdzony przez liczne i niezwykle dokładne pomiary wielu fizyków: Webera i Kohlrauscha (1856), Kelvina (1869), J. J. Thomsona (1883), Abrahama (1892) i innych. Związek ten został przewidziany przez Maxwella w jego słynnej teorii elektromagnetycznej światła, według której światło jest zjawiskiem elektromagnetycznym. Z teorii tej mianowicie wynika, że stosunek obu jednostek natężenia prądu: elektromagnetycznej i elektrostatycznej *jest równy prędkości światła* w cm/s. A zatem jest liczbą nie oderwaną, lecz mianowaną.

Gdybyśmy natężenie pewnego prądu i płynącego w jakimś obszarze raz wyrazili w jednostkach elektrostatycznych — i (j. es), a drugi raz wyrazili w jednostkach elektromagnetycznych — i (j. em), to nietrudno zrozumieć, że stosunek *liczby jednostek* elektrostatycznych do *liczby jednostek* elektromagnetycznych, jakimi wyraża się ten sam prąd i, wyniesie $3\cdot 10^{10}$. Wykażemy jednak, że stosunek ten ma wymiar prędkości i w układzie CGS mierzy się w cm/s:

$$\frac{i(\text{j.es})}{i(\text{j.em})} = 3\cdot 10^{10}\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}. \tag{3.10a}$$

Bowiem ze wzoru (3.6a) mamy

$$i(\text{j.em}) = \frac{Hr}{2\pi}.$$

Ale wzór (3.2a) poucza nas, że H można mierzyć w $\dfrac{\text{j. masy magnetycznej}}{\text{cm}^2}$. Zatem

$$i(\text{j.em}) \text{ mierzy się w } \frac{\text{j. masy magnetycznej}}{\text{cm}}.$$

Z drugiej strony według definicji natężenia prądu:

$$i = \frac{e}{t},$$

możemy więc napisać, że i (j. es) mierzy się w $\dfrac{\text{j. es ładunku}}{\text{s}}$.

A zatem stosunek ilości jednostek mierzących ten sam prąd,

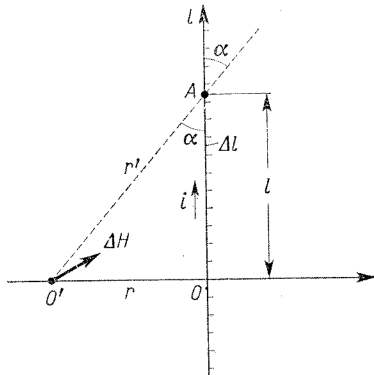
$$\frac{i(\text{j.es})}{i(\text{j.em})} \text{ mierzy się w } \frac{\text{j. es ładunku}}{\text{j. masy magnetycznej}}\cdot\frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

Przypomnijmy sobie jeszcze, że zarówno jednostka elektrostatyczna ładunku, jak i jednostka masy magnetycznej są odpowiednio identyczne z cm $\sqrt{\text{dyn}}$ (por. § 2.42 i § 3.2), a zatem stosunek $\frac{\text{j. es ładunku}}{\text{j. masy magnetycznej}} = 1$. Wobec tego

$$\frac{i\,(\text{j.es})}{i\,(\text{j.em})} \text{ mierzy się w } \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

Dlatego w równości (3.10a) przy liczbie $3 \cdot 10^{10}$ muszą figurować jednostki prędkości.

§ 3.15. Natężenie pola magnetycznego wokół prostego i nieograniczenie długiego przewodnika z prądem. Jak powiedzieliśmy już w § 3.11, prawo Biota i Savarta wyrażone wzorem różniczkowym (3.9b) pozwala na ważne zastosowania. Można bowiem za pomocą niego obliczyć pole magnetyczne w pobliżu przewodnika o określonej długości i o dowolnym kształcie. Zastosujemy go teraz do przypadku przewodnika prostego i bardzo długiego.



Rys. 3.26. Natężenie pola magnetycznego H w punkcie O' jest sumą natężeń ΔH wytwarzanych przez poszczególne elementy przewodnika z prądem Δl. Sumowanie przechodzi w całkowanie, gdy $\Delta l \to 0$; otrzymuje się wówczas wzór (3.10)

Przypadek ten przedstawiony jest na rysunku 3.26. Pole H obliczamy w punkcie O' odległym od przewodnika o $O'O \equiv r$. Na pole to składają się pola dH pochodzące od poszczególnych elementów przewodnika dl:

$$dH = \frac{i\,dl}{r'^2} \sin\alpha,$$

gdzie r', odległość punktu O' od elementu dl, wynosi

$$r' = \frac{r}{\sin\alpha}.$$

Odległość $l \equiv OA$ wynosi

$$l = \frac{r}{\operatorname{tg}\alpha},$$

stąd

$$dl = r\frac{-(\operatorname{tg}\alpha)'}{\operatorname{tg}^2\alpha}\,d\alpha = -r\frac{d\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Zatem

$$dH = -\frac{i}{r}\sin\alpha\, d\alpha.$$

Całkowite pole H, pochodzące od wszystkich elementów nieograniczenie długiego przewodnika, jest sumą pól dH, wyraża się więc całką rozciągniętą na całą długość przewodnika, albo, co na jedno wychodzi, podwójną wartością tejże całki, rozciągniętej na połowę długości przewodnika, od punktu O do bardzo odległego punktu A. Zmienna α przebiega wtedy wartości od 90° do 0:

$$H = -\frac{2i}{r}\int_{90°}^{0} \sin\alpha\, d\alpha,$$

co po elementarnym obliczeniu daje:

$$H = \frac{2i}{r}. \tag{3.10}$$

We wzorze tym wszystkie wielkości wyrażone są w jednostkach elektromagnetycznych układu CGS.

§ 3.16. Siła magnetomotoryczna. Prawo Ampère'a. Jeśli wzór (3.10) napiszemy w postaci: $Hr = 2i$ i pomnożymy obustronnie przez 2π, otrzymamy

$$H\cdot 2\pi r = 4\pi i, \tag{3.10a}$$

gdzie $2\pi r$ jest długością okręgu, do którego w każdym punkcie styczny jest wektor H (rys. 3.27a). Oznaczmy obwód tego okręgu przez s, $s = 2\pi r$, i podzielmy go na wiele elementów Δs (rys. 3.27b). Wtedy lewa strona równości (3.10a) będzie sumą $\Sigma H_s \cdot \Delta s$, rozciągniętą na wszystkie elementy Δs, gdzie składowa H_s (tutaj identyczna z H) jest styczna do okręgu koła:

$$\Sigma H_s \Delta_s = 4\pi i. \tag{3.10b}$$

Zauważmy, że lewa strona równości (3.10a) lub (3.10b) nie zależy od promienia koła, gdyż zawsze równa jest $4\pi i$ (rys. 3.27c). Wynika stąd oczywiście, że dla dowolnej „krzywej łamanej" otaczającej przewodnik z prądem (rys. 3.27d) równość (3.10b) pozostaje w mocy. W wypadku gdy krzywa otaczająca przewodnik z prądem nie jest łamana, lecz ciągła (rys. 3.27e), należy powiększyć liczbę elementów Δs nieograniczenie, zmniejszając je również nieograniczenie ($\Delta s \to 0$). Zamiast sumowania otrzymujemy wtedy całkę krzywoliniową i wzór (3.10b) przybierze postać:

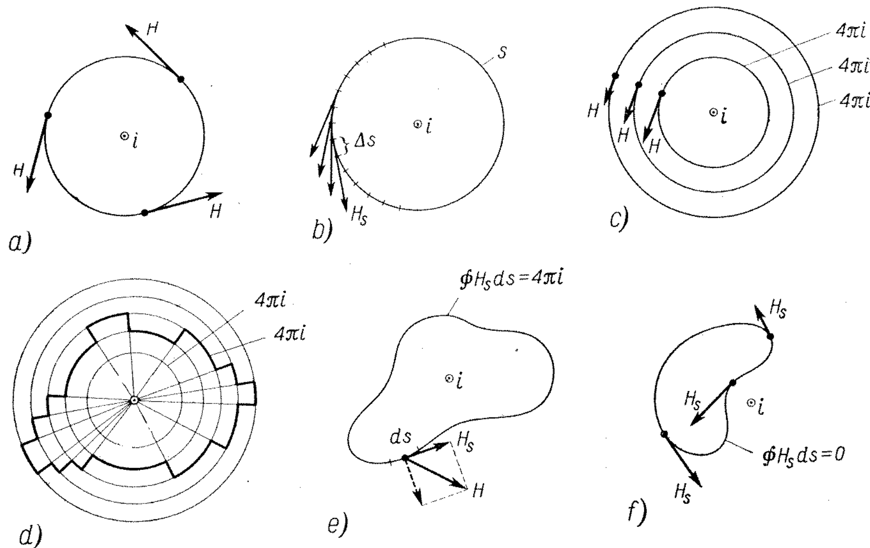
$$\oint H_s\, ds = 4\pi i. \tag{3.10c}$$

Uważając ds za wektor o kierunku i zwrocie prądu, możemy napisać poniższy wzór w postaci wektorowej

$$\underset{(\text{Oe})}{\oint \mathbf{H}}\ \underset{(\text{cm})}{d\mathbf{s}} = \underset{(\text{j.em})}{4\pi i}. \tag{3.10d}$$

We wzorze tym wszystkie wielkości wyrażone są w jednostkach układu elektromagnetycznego CGS, a więc: H — w erstedach, ds w centymetrach, i — w j. em. Wyrażenie

$\oint H\,ds$ nazywa się *siłą magnetomotoryczną*. Prawo wyrażone wzorem (3.10d) nosi nazwę *prawa Ampère'a*: *siła magnetomotoryczna prostego i długiego przewodnika z prądem równa jest natężeniu prądu* (w jednostkach układu elektromagnetycznego CGS) *pomnożonemu przez* 4π.



Rys. 3.27. Objaśnienia do prawa Ampère'a. a) Siła magnetomotoryczna $2\pi rH = 4\pi i$. b) Siła magnetomotoryczna $\Sigma H_s\Delta_s' = 4\pi i$. c) Siła magnetomotoryczna nie zależy od promienia okręgu koła. d) i e) Siła magnetomotoryczna $\oint H_s\,ds = 4\pi i$ nie zależy od kształtu krzywej otaczającej przewodnik. f) Siła magnetomotoryczna $\oint H_s\,ds = 0$, gdy krzywa zamknięta nie otacza przewodnika z prądem

Oczywiście wzór (3.10 d) ważny dla dowolnej krzywej okrążającej prąd przechodzi we wzór (3.10 a), gdy krzywa staje się kołem. Jeśli krzywa dowolna jest zamknięta, lecz nie okrąża prądu (rys. 3.27 f), wówczas

$$\oint \mathbf{H}\,d\mathbf{s} = 0, \tag{3.10e}$$

co oznacza, że siła magnetomotoryczna jest równa zeru, chociaż krzywa przebiega w polu magnetycznym prądu. Kierunek obiegu krzywej jest w tym przypadku obojętny.

§ 3.17. Jednostka natężenia pola magnetycznego H w układzie praktycznym MKSA (zracjonalizowanym). Dla ustalenia jednostki H w układzie jednostek MKSA, oprzemy się na prawie Ampère'a w postaci wzoru np. (3.10 d), który nam daje doskonałą okazję do zracjonalizowania układu praktycznego. Zracjonalizowanie polega na tym, że wyboru jednostki H dokonujemy tak, aby siła magnetomotoryczna prostego i nieograniczenie długiego przewodnika z prądem równała się nie $4\pi i$, lecz po prostu i:

$$\oint \mathbf{H}\;d\mathbf{s} = i. \tag{3.11}$$

$$\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right)\quad (\mathrm{m})\quad (\mathrm{A})$$

Od razu też widać, że nową jednostką natężenia pola magnetycznego H musi być (A/m), bowiem inaczej po obu stronach równości (3.11) byłyby różne jednostki, co by nie miało sensu.

Pozostaje nam zapytać, jaki jest związek między erstedem i A/m, albo ile A/m ma 1 Oe? W tym celu załóżmy, że całkowanie odbywa się wzdłuż koła współśrodkowego z przewodnikiem, a więc że H jest stałe. Wówczas

$$\oint H\;ds = H\oint ds = H\cdot 2\pi r = i,$$

zatem

$$H = \frac{i}{2\pi r}, \tag{3.11a}$$

$$\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right)\quad \frac{(\mathrm{A})}{(\mathrm{m})}$$

gdy stosujemy jednostki zracjonalizowanego układu MKSA. Stosując zaś dawne jednostki układu em CGS mamy dawny wzór (3.10):

$$H = \frac{2i}{r}. \tag{3.10}$$

$$(\mathrm{Oe})\quad \frac{(\mathrm{j.\ em})}{(\mathrm{cm})}$$

Jeśli zastosujemy ten ostatni wzór dla prądu $i = 1$ j. em CGS i dla $r = 1$ cm, otrzymamy

$$H = 2\ \mathrm{Oe}.$$

Podstawiwszy te same wartości i oraz r, wyrażone w jednostkach układu MKSA ($i = 10$ A, $r = 10^{-2}$ m) do wzoru (3.11a) otrzymamy oczywiście tę samą wartość H, lecz wyrażoną w A/m:

$$H = \frac{10\ \mathrm{A}}{2\pi\cdot 10^{-2}\mathrm{m}} = \frac{10^3}{2\pi}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}.$$

A ponieważ obie otrzymane wartości wyrażają to samo natężenie pola, przeto 2 Oe $= \dfrac{10^3}{2\pi}\,\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$, czyli

$$1\ \mathrm{Oe} = \frac{10^3}{4\pi}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} = 79{,}577\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}, \tag{3.11b}$$

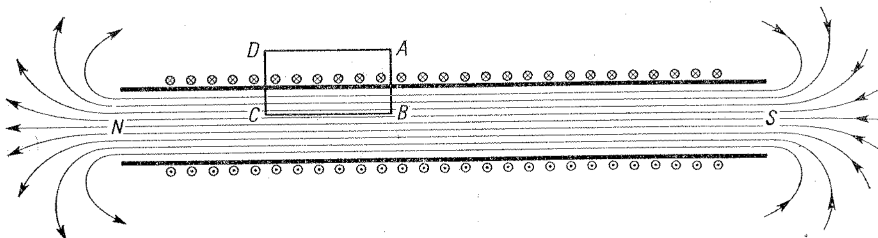
lub odwrotnie

$$1\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} = 4\pi\cdot 10^{-3}\ \mathrm{Oe}. \tag{3.11c}$$

Korzyść z takiego określenia jednostki H stanie się oczywista, gdy poznamy równania Maxwella, będące fundamentem elektrodynamiki (§ 5.5).

§ 3.18. Natężenie pola magnetycznego wewnątrz długiego solenoidu. Z doświadczenia opisanego w § 1.5 (rys. 1.9) wiemy, że wewnątrz solenoidu z prądem panuje pole magnetyczne jednorodne. Jak natężenie tego pola zależy od parametrów geometrycznych solenoidu i od natężenia prądu?

Weźmy solenoid długi w stosunku do jego średnicy. Niech liczba zwojów solenoidu wynosi n na każdą jednostkę jego długości. Prąd płynący przez uzwojenie niechaj ma natężenie i. Linie sił pola magnetycznego wewnątrz solenoidu ukazuje rys. 3.28. Obliczenie H wykonamy stosując prawo Ampère'a do konturu w kształcie prostokąta $ABCD$,



Rys. 3.28. Zastosowanie prawa Ampère'a do obliczania natężenia pola magnetycznego wewnątrz solenoidu długiego i cienkiego

o boku $BC = l$. Ponieważ solenoid jest długi i cienki, przeto jego bieguny N i S są daleko od siebie i pole, jakie wytwarzają na zewnątrz solenoidu, jest znikome. Jeśli je pominiemy, siła magnetomotoryczna $\oint H_s ds$ sprowadza się jedynie do wyrazu Hl, a to dlatego, że wzdłuż boku AD pole jest zerem, zaś wzdłuż boków AB i CD pole jest albo zerem, albo jego składowa styczna jest zerem. W myśl prawa Ampère'a siła magnetomotoryczna wzdłuż konturu $ABCD$ równa jest natężeniu prądu objętego konturem. W tym przypadku prąd płynie kilkoma (n) przewodnikami, co jest równoważne prądowi ni płynącemu jednym przewodem. Zatem prawo Ampère'a, wyrażone wzorem (3.11), sprowadza się do równości

$$Hl = ni,$$

skąd

$$H = \frac{ni}{l}, \tag{3.12}$$

$$\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right) \quad \frac{(\mathrm{A})}{(\mathrm{m})}$$

Pod wzorem wypisane są jednostki. Zwraca uwagę fakt, że pole wewnątrz długiego i cienkiego solenoidu nie zależy od promienia solenoidu. Pole to jest proporcjonalne do n/l czyli do liczby zwojów przypadających na jednostkę długości solenoidu, oraz do natężenia prądu, płynącego przez solenoid.

Gdybyśmy do obliczenia pola H wewnątrz długiego solenoidu zastosowali prawo Ampère'a przedstawione wzorem (3.10c), wówczas we wzorze na H pojawi się współczynnik 4π, wszystkie zaś wielkości wyrażone być muszą w jednostkach em CGS. Będzie więc:

$$H = \frac{4\pi ni}{l}. \tag{3.12a}$$

$$(\mathrm{Oe}) \quad \frac{(\text{j. em nat. prądu})}{(\mathrm{cm})}$$

***§ 3.19. Przewodnik z prądem w polu magnetycznym. Prawo Laplace'a.** W § 3.11 dowiedzieliśmy się, że siłę, jaką prąd i działa na biegun magnetyczny $+m$, określa wzór (3.8a). Napiszmy wzór ten stosując wyłącznie jednostki układu elektromagnetycznego CGS, a więc $i/10$ (i w amperach) zastępujemy wprost symbolem i w jednostkach em CGS:

$$\Delta F = \frac{mi\Delta l}{r^2} \sin\alpha. \tag{3.8b}$$

Zgodnie z III zasadą Newtona, wzór ten wyraża jednocześnie wartość siły ΔF_i, jaką biegun magnetyczny $+m$ wywiera na element z prądem (rys. 3.29a):

$$\Delta F_i = \frac{mi\Delta l}{r^2} \sin\alpha. \tag{3.13}$$

Element ten znajduje się w polu magnetycznym H, jakie wytwarza biegun $+m$. Pole to wyraża znany nam z § 3.3 wzór (3.2a), który napiszemy tak:

$$\mu H = \frac{m}{r^2}.$$

Wobec tego wzór (3.13) przybierze następującą postać:

$$\Delta F_i = \mu H i \Delta l \sin\alpha. \tag{3.14}$$

Zauważmy, że w naszych wzorach coraz częściej występuje iloczyn natężenia pola magnetycznego H i przenikalności magnetycznej μ ośrodka. Dlatego iloczynowi temu nadajemy osobną nazwę *indukcji magnetycznej*; oznaczamy ją symbolem B:

$$B = \mu H. \tag{3.15}$$

W układzie jednostek em CGS B mierzy się tymi samymi jednostkami, co i H, gdyż μ jest wielkością bezwymiarową (patrz § 3.2), niemniej dla jednostki B zarezerwowana jest oddzielna nazwa „1 gaus" (1 Gs), podczas gdy jednostka em H nosi nazwę 1 ersteda (1 Oe). Oczywiście:

$$1 \text{ Gs} \equiv 1 \text{ Oe}.$$

Jeśli pole magnetyczne wytworzone jest w próżni ($\mu = 1$), wówczas $B(\mathrm{Gs}) = H(\mathrm{Oe})$; w przeciwnym razie $B(\mathrm{Gs}) = \mu H(\mathrm{Oe})$. W powietrzu stanowi to nieznaczną różnicę, lecz w żelazie — ogromną (patrz § 3.28).

Stosując pojęcie indukcji magnetycznej B napiszemy wzór (3.14) w prostszej postaci:

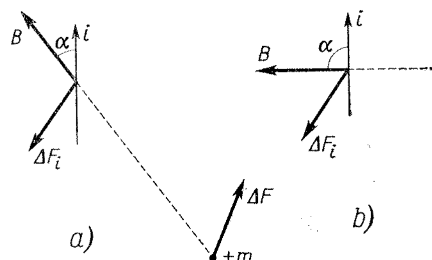
$$\Delta F_i = B i \Delta l \sin\alpha. \tag{3.16}$$

Wzór ten wyraża treść *prawa Laplace'a*: *na element przewodnika Δl, przez który płynie prąd o natężeniu i, a który umieszczony jest w polu magnetycznym pod kątem α do linii sił* (rys. 3.29a), *działa siła ΔF_i wyrażona wzorem* (3.16). Siła ta jest prostopadła zarówno do i, jak i do B, lecz ma zwrot przeciwny aniżeli siła ΔF, co wynika z III zasady Newtona, a co widać z rysunku 3.29a. Z tego ostatniego rysunku oraz ze wzoru (3.16) widać, że jeśli $\Delta \mathbf{F}_i$, $\mathbf{B}$ oraz $\mathbf{i}$ potraktować jako wektory, wówczas siła jest iloczynem wektorowym $\mathbf{i} \times \mathbf{B}$ pomnożonym przez wartość Δl:

$$\Delta \mathbf{F}_i = \mathbf{i} \times \mathbf{B} \Delta l. \tag{3.16a}$$

W przypadku, gdy **B** jest prostopadłe do **i**, tzn. gdy $\alpha = 90°$ (rys. 3.29b), wzór (3.16a) pozostaje w mocy, natomiast upraszcza się wzór (3.16):

$$\Delta F_i = Bi\Delta l. \tag{3.16b}$$

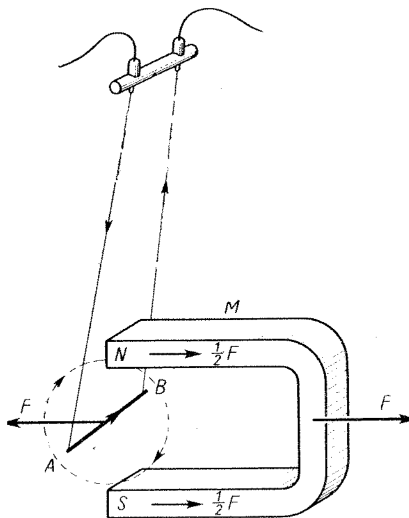


Rys. 3.29. Siła ponderomotoryczna ΔF_i działa na element przewodnika z prądem i umieszczonym w polu magnetycznym B. a) Pole magnetyczne wytwarza tutaj biegun $+m$ jakiegoś magnesu. b) Na tym rysunku nie pokazano, co wytwarza pole magnetyczne. Widać, że kierunek ΔF_i wynika z reguły mnożenia wektorowego, $\mathbf{i} \times \mathbf{B}$. Kąt α między wektorem **i** oraz **B** może mieć dowolną wartość; dla $\alpha = 0$ lub $\alpha = 180°$ wartość siły $\Delta F_i = 0$

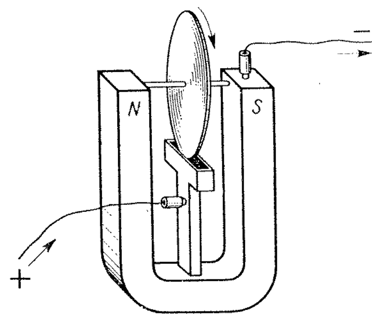
Siły wywierane przez pole magnetyczne na przewodnik z prądem nazywamy *siłami elektrodynamicznymi*; nazywają je również *siłami ponderomotorycznymi*.

*§ 3.20. Kilka przykładów działania sił elektrodynamicznych

a) W polu magnesu M zawieszamy przewodnik AB na dwóch cienkich drutach, które służą jednocześnie jako doprowadzenie prądu (rys. 3.30). Po puszczeniu prądu



Rys. 3.30. Siły elektrodynamiczne F działają zarówno na przewodnik, jak i na magnes. Wychyla się tylko przewodnik, gdyż jest ruchomy

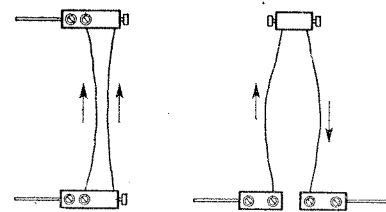


Rys. 3.31. Koło Barlowa: siły elektrodynamiczne obracają krążek metalowy

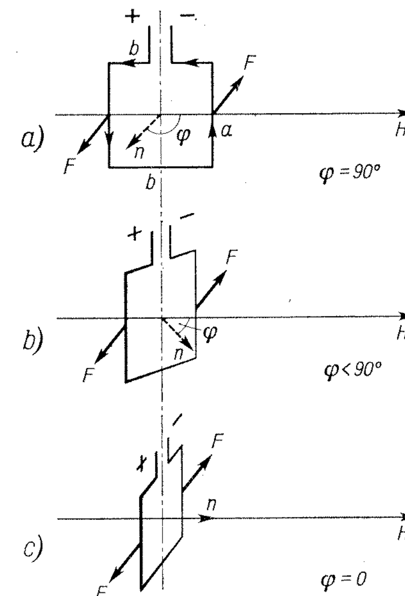
o natężeniu kilku amperów obserwujemy ruch przewodnika AB. Kierunek wychylenia jest prostopadły do AB i do linii sił pola magnetycznego magnesu. Sprawdzamy, że kierunek wychylenia, a więc kierunek działania siły, jest zgodny z regułą śruby: linie magnetyczne prądu mają taki kierunek, że na oba bieguny magnesu działa siła skierowana na rys. 3.30 na prawo, wobec tego na sam przewodnik działa siła skierowana przeciwnie, więc na lewo.

b) Rysunek 3.31 przedstawia tzw. *koło Barlowa*. Krążek metalowy umieszczony jest pomiędzy biegunami magnesu. Dolna jego część zanurza się w naczyńku z rtęcią, która służy do doprowadzenia prądu. Drugi biegun źródła prądu dołączony jest do osi krążka. Siły elektrodynamiczne, działając prostopadle do kierunku prądu i do linii sił pola magnetycznego magnesu, obracają krążek dookoła osi. Doświadczenie to jest pouczające i z tego względu, że pokazuje nam, iż siły elektrodynamiczne nie wychylają jedynie strumienia elektronów z ich pierwotnej drogi pozostawiając koło w spoczynku. Przeciwnie, musimy uważać, że siły te przyłożone są do przewodnika, przez który płynie prąd. (Oczywiście, tego wniosku nie moglibyśmy wyciągnąć, gdyby koło Barlowa nie było pełne i jednolite, lecz miało szprychy lub zęby, zresztą zbyteczne, co się jednak w przyrządach tych często spotyka.)

c) Każdy z dwóch równoległych wiotkich przewodników znajduje się w polu magnetycznym drugiego (rys. 3.32). Wskutek tego na oba przewodniki działają siły elektrodynamiczne. Siły te są prostopadłe do przewodników i do linii sił pola magnetycznego.



Rys. 3.32. Siły elektrodynamiczne objawiają się przeciąganiem się lub odpychaniem się równoległych przewodników



Rys. 3.33. Obwód z prądem w polu magnetycznym doznaje momentu skręcającego, który obróci go z położenia *a*) w położenie *c*)

Powodują zatem albo przyciąganie się przewodników, albo odpychanie się, zależnie od tego, czy kierunki prądów są zgodne czy przeciwne.

§ 3.21. Moment magnetyczny obwodu z prądem. Jak widać z rys. 3.19 i 3.20, obwód z prądem równoważny jest blaszce magnetycznej, której powierzchnie są siedliskiem biegunów N i S. Chociaż nic nie możemy powiedzieć o wielkości masy magnetycznej tych biegunów ani o ich wzajemnej odległości, jednak z łatwością możemy uzyskać informację o wielkości momentu magnetycznego owej blaszki. Rozważmy obwód w kształcie prostokąta o bokach a i b umieszczony w jednorodnym polu magnetycznym o natężeniu H (rys. 3.33) w ten sposób, że bok a jest prostopadły do linii sił pola, zaś bok b — równoległy. W tych warunkach siły elektrodynamiczne działają tylko na oba boki a obwodu. Wartość ich według wzoru (3.16b) wynosi

$$F = Bia \tag{3.17}$$

(w układzie elektromagnetycznym CGS; wzór ten jest słuszny również w układzie MKSA, por. § 3.24).

Pod wpływem tych sił obwód z prądem doznaje momentu skręcającego dookoła osi pionowej. Ponieważ obie te siły działają na końcach ramion o długości $b/2$, przeto ich moment skręcający M^* wyniesie

$$M^* = iabB = iSB,$$

gdzie $S = ab$ jest powierzchnią prostokąta. Powyższa wartość jest największą wartością momentu skręcającego. Jeśli bowiem obwód zajmie nowe położenie, w którym kąt φ między normalną n do powierzchni prostokąta a polem B z prostego stanie się ostry (rys. 3.33b), wówczas ramię siły F będzie miało wartość mniejszą ($b/2 \sin\varphi$) i moment obu sił F wyniesie

$$M^* = iSB\sin\varphi = \mu iSH\sin\varphi, \tag{3.18}$$

co wynika również bezpośrednio ze wzoru (3.16). Wprawdzie w tym położeniu oraz w położeniu $\varphi = 0$ (rys. 3.33c) pojawiają się nowe siły działające na boki b (nie zaznaczone na rysunku), jednak nie wnoszą one nic do momentu skręcającego M^*, gdyż są prostopadłe zarówno do b, jak i do B.

Porównując wzór (3.18) ze wzorem (3.5) w § 3.8 widzimy, że obwód z prądem doznaje takiego samego momentu skręcającego jak dipol magnetyczny o momencie

$$M = \mu iS; \tag{3.19}$$

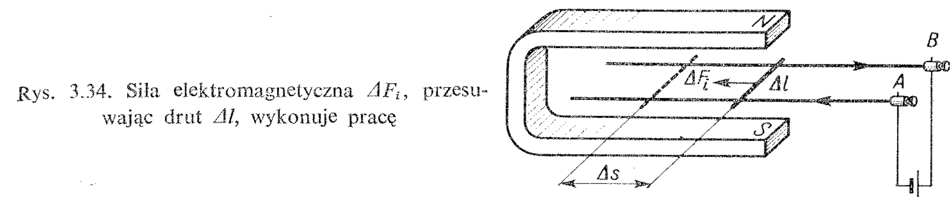
wartość tę nazywamy *momentem magnetycznym* obwodu z prądem. Łatwo można wykazać, że wzór (3.19) pozostaje słuszny dla obwodu o dowolnym kształcie. Jeśli obwód składa się nie z jednego zwoju, lecz n zwojów, wówczas moment skręcający M^* jest n razy większy, a zatem moment magnetyczny takiej zwojnicy wynosi

$$M = \mu inS \tag{3.19a}$$

(w jednostkach elektromagnetycznych CGS). W próżni dla jednego zwoju mamy

$$M = iS. \tag{3.19b}$$

***§ 3.22. Praca sił elektrodynamicznych.** Niech przewodnik Δl spoczywa na dwóch długich drutach A i B doprowadzających do niego prąd z ogniwa, na których może się swobodnie poruszać jak na szynach (rys. 3.34). Jeśli drut Δl i szyny znajdują się w polu



Rys. 3.34. Siła elektromagnetyczna ΔF_i, przesuwając drut Δl, wykonuje pracę

magnetycznym, którego wektor H jest prostopadły do płaszczyzny przewodników, to na drut Δl działa siła elektrodynamiczna ΔF, skierowana wzdłuż szyn i wyrażona wzorem (3.16a). Praca, którą ta siła wykona przesuwając drut Δl na drodze Δs, wynosi

$$L = Bi\Delta l\Delta s = Bi\Delta S,$$

gdzie $\Delta S = \Delta l \cdot \Delta s$ jest powierzchnią zakreśloną przez drut. Ale przez tę powierzchnię przechodzi strumień indukcji magnetycznej $= \mu H\Delta S = B\Delta S$ (patrz § 3.7 oraz wzór (3.15), § 3.19). Strumień ten oznaczymy przez $\Delta\Phi$, co ma oznaczać, że o tyle zmienił się całkowicie strumień indukcji przechodzący przez obwód wskutek ruchu drutu:

$$\Delta\Phi = B\Delta S. \tag{3.20}$$

Zatem

$$L = i\Delta\Phi; \tag{3.21}$$

wszystkie wielkości wyrażone są w jednostkach elektromagnetycznych układu CGS, czyli L w ergach, i w amperach, a $\Delta\Phi$ w makswelach (patrz § 3.7).

Ten sam wzór stosuje się również w przypadku, gdy przewodnik o jakimkolwiek kształcie porusza się dowolnym ruchem w polu magnetycznym. A to dlatego, że dowolne przesunięcie takiego przewodnika podzielić możemy w myśli na niezmiernie wiele drobnych przesunięć poszczególnych maleńkich elementów Δl tego przewodnika. Do każdego z tych przesunięć stosuje się wzór (3.21); stosuje się więc do wszystkich razem, jeśli przez $\Delta\Phi$ rozumieć całkowitą zmianę strumienia magnetycznego, wywołaną dowolnym ruchem przewodnika dowolnego kształtu.

Zauważmy tutaj pewną interesującą prawidłowość. Przez każdy obwód z prądem przechodzi jego własny strumień indukcji pola magnetycznego. Poza tym przechodzi jeszcze strumień indukcji pola magnetycznego obcego (jeśli ono istnieje), który się dodaje lub odejmuje od strumienia własnego. Otóż siły elektrodynamiczne poruszają ruchome części obwodu w takim kierunku, że całkowity strumień magnetyczny przechodzący przez obwód zwiększa się. Doskonale to widać na rys. 3.34, 3.30 lub 1.11. Na rysunku 3.32 mamy do czynienia tylko ze strumieniem własnym obwodu, który się też zwiększa. Prawidłowość ta dotyczy nie tylko ruchu przewodnika, ale i ruchu magnesu (np. rys. 3.20).

Ponieważ wszystkie części układu, jak przewodniki i magnesy, ulegając siłom czynnym w układzie dążą do osiągnięcia możliwego stanu trwałej równowagi, przeto ogólnie powiemy: *układ osiąga równowagę trwałą wtedy, gdy strumień indukcji magnetycznej przechodzący przez obwód z prądem osiąga wartość największą.*

Urządzenie przedstawione na rys. 3.34 jest prostym przykładem *pracującego* odbiornika energii elektrycznej (por. § 1.31): energia ogniwa idzie nie tylko na wydzielenie ciepła w obwodzie, ale również na wykonanie pracy (jeśli pozwolimy drutowi tę pracę wykonać). Z § 1.31 wiemy, że taki pracujący odbiornik jest źródłem siły przeciwelektromotorycznej, a więc sam staje się źródłem prądu. O tym gdzie i jak ten prąd powstaje, będzie mowa w następnym rozdziale.

§ 3.23. Jednostka strumienia indukcji magnetycznej w układzie MKSA. Wzór (3.21) daje nam doskonałą okazję do określenia nieznanej nam jeszcze jednostki strumienia indukcji magnetycznej w układzie praktycznym MKSA. Mamy bowiem

$$\Delta\Phi = \frac{L}{i},$$

zatem nowa jednostka $\Delta\Phi$, która nosi nazwę *webera* (Wb), określa się w sposób następujący:

$$1\ \mathrm{Wb} = \frac{1\ \mathrm{J}}{1\ \mathrm{A}} = \frac{10^7\ \mathrm{erg}}{10^{-1}\ \text{j. em nat. prądu}} = 10^8\ \mathrm{Mx}.$$

W ten sposób do wzoru (3.21) możemy stosować jednostki dowolnego układu; albo elektromagnetycznego CGS:

$$\underset{(\mathrm{erg})}{L} = \underset{\substack{(\text{j. em}\\ \text{nat. prądu})}}{i}\ \underset{(\mathrm{Mx})}{\Delta\Phi},$$

albo praktycznego MKSA:

$$\underset{(\mathrm{J})}{L} = \underset{(\mathrm{A})}{i}\ \underset{(\mathrm{Wb})}{\Delta\Phi}.$$

§ 3.24. Jednostka indukcji magnetycznej B w układzie MKSA

Gdy mówimy o układzie jednostek MKSA, mamy na myśli układ zracjonalizowany, czyli taki układ oparty na jednostkach m, kg, s i A, w którym siła magnetomotoryczna $\oint Hs\,ds$ równa jest prądowi, bez współczynnika 4π, jaki występuje przy użyciu jednostek układu elektromagnetycznego CGS [por. wzory (3.10d) i (3.11)]. Taki układ jednostek, praktyczny i zracjonalizowany, jest podstawą urzędowo przyjętego w świecie układu zwanego „SI" (Systéme Internationale), zawierającego nie tylko jednostki mechaniczne i elektryczne, ale również cieplne i świetlne. W układzie MKSA (zracjonalizowanym), czyli w układzie SI, jednostką strumienia indukcji Φ jest 1 weber:

$$1\ \mathrm{Wb} = \frac{1\ \mathrm{J}}{1\ \mathrm{A}} = \frac{1\ \mathrm{V\cdot A\cdot s}}{1\ \mathrm{A}} = 1\ \mathrm{V\cdot s}.$$

W przypadku pola **B** przechodzącego prostopadle przez powierzchnię S mamy:

$$\Phi = BS.$$

Znając już jednostkę Φ, równą $1\ \mathrm{Wb} = 1\ \mathrm{V\cdot s}$ oraz jednostkę S, tj. $1\ \mathrm{m^2}$, możemy z łatwością określić w układzie SI jednostkę B; jest nią

$$1\ \frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m^2}} = 1\ \frac{\mathrm{V\cdot s}}{\mathrm{m^2}}.$$

Jaki jest jej związek z jednostką B w układzie elektromagnetycznym CGS, czyli z gausem? Oto odpowiedź:

$$1\ \frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m^2}} = \frac{1\ \mathrm{J/A}}{1\ \mathrm{m^2}} \frac{10^7\ \mathrm{erg}/10^{-1}\ \text{j. em nat. prądu}}{10^4\ \mathrm{cm^2}} = \frac{10^8}{10^4}\ \mathrm{Gs} = 10^4\ \mathrm{Gs}.$$

§ 3.25. Wartość przenikalności magnetycznej μ_0 w układzie MKSA. W układzie elektromagnetycznym CGS związek między B i H miał postać

$$B = \mu H, \tag{3.22}$$

gdzie współczynnik μ oznaczał przenikalność magnetyczną ośrodka. Natężenie pola magnetycznego mierzyło się w erstedach, indukcję magnetyczną w gausach, przy czym $1\ \mathrm{Oe} \equiv 1\ \mathrm{Gs}$, ponieważ μ obraliśmy jako liczbę oderwaną. Wartość μ jest bardzo niewiele różna od 1, zaś dla próżni jest dokładnie równa 1.

W układzie MKSA, w którym mamy jednostki H i B różne (odpowiednio A/m i $\mathrm{V\cdot s/m^2}$), przenikalność magnetyczna nie może już być liczbą oderwaną, lecz mianowaną. Napiszemy więc zamiast μ nową wartość przenikalności magnetycznej w postaci $\mu_0\mu$, gdzie μ_0 jest bezwzględną wartością przenikalności magnetycznej próżni w jednostkach MKSA, zaś μ, jak dawniej, liczbą niemianowaną, wyrażającą względną przenikalność magnetyczną ośrodka. Związek (3.22) przybierze więc postać:

$$B = \mu_0 \mu H. \tag{3.23}$$

Dla próżni ($\mu = 1$) będziemy mieli,

$$\mu_0 = \frac{B}{H}.$$

Gdy natężenie pola wynosi 1 Oe, a co na jedno wychodzi — wartość indukcji magnetycznej 1 Gs, to oczywiście $\mu_0 = 1$. Ale w układzie MKSA tak nie będzie, ponieważ [patrz wzór (3.11b)]:

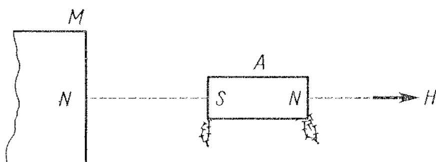
$$\mu_0 = \frac{1\ \mathrm{Gs}}{1\ \mathrm{Oe}} = \frac{10^{-4}\,\frac{\mathrm{V\cdot s}}{\mathrm{m^2}}}{\frac{10^3}{4\pi}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}} = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{V\cdot s}}{\mathrm{A\cdot m}}.$$

Przenikalność magnetyczna próżni μ_0 *równa jest* $4\pi\cdot 10^{-7}\ \mathrm{V\cdot s/A\cdot m}$. Napiszmy, dla jasności, raz jeszcze związek (3.23) z jednostkami układu MKSA pod wielkościami B, μ_0 i H:

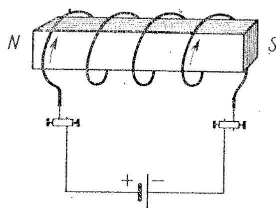
$$\underset{\left(\frac{\mathrm{V\cdot s}}{\mathrm{m^2}}\right)}{B} = \underset{\left(\frac{\mathrm{V\cdot s}}{\mathrm{A\cdot m}}\right)}{\mu_0}\ \mu\ \underset{\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right)}{H}. \tag{3.23a}$$

C. Materia w polu magnetycznym

*§ **3.26. Żelazo w polu magnetycznym.** Kawałek zwykłego miękkiego żelaza umieśćmy w polu magnetycznym bieguna silnego magnesu (rys. 3.35). Przekonamy się, że żelazo nabyło cech magnesu: przyciąga gwoździki, opiłki itp. drobne kawałki żelaza. Mówimy, że żelazo umieszczone w polu magnetycznym namagnesowało się przez indukcję. Z łatwością odnajdziemy bieguny N i S tego indukowanego magnesu. Kierunek od S do N nazwijmy kierunkiem namagnesowania. Stwierdzamy, że *kierunek namagnesowania zgodny jest z kierunkiem zewnętrznego pola H.* Powyższe zjawisko zwane *indukcją magnetyczną* przypomina w zupełności analogiczne zjawisko indukcji elektrostatycznej (§ 2.24). Różnica jednak polega na tym, że nie istnieją przewodniki magnetyzmu, tak jak istnieją przewodniki elektryczności. Toteż zjawisko indukcji magnetycznej podobne jest raczej do polaryzacji dielektryka w polu elektrycznym (por. rys. 2.109).



Rys. 3.35. Kawałek żelaza A magnesuje się przez indukcję w polu magnesu M



Rys. 3.36. Żelazo magnesuje się w polu magnetycznym solenoidu

Po usunięciu z pola magnetycznego żelazo traci niemal całkowicie swoje namagnesowanie i gwoździki odpadają od biegunów; jednak niektóre lżejsze opiłki pozostają. Żelazo zachowuje więc pewną *pozostałość namagnesowania.* Pozostałość ta jest bardzo mała w miękkim żelazie, natomiast stosunkowo bardzo silna w twardej stali.

Poznawszy magnesowanie przez indukcję rozumiemy, dlaczego opiłki w polu magnetycznym układały się wzdłuż linii sił: każda opiłka staje się magnesem indukowanym i ustawia się tak, jak igła magnetyczna — stycznie do linii sił.

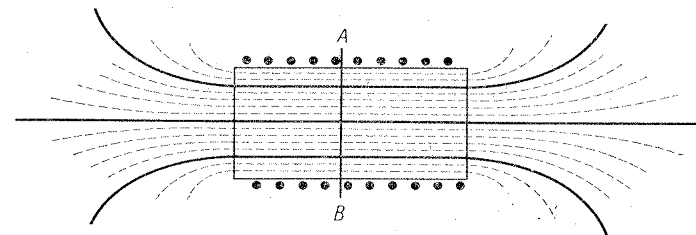
Żelazo magnesuje się przez indukcję nie tylko w polu magnesu, ale w dowolnym polu magnetycznym. Najwygodniej i najsilniej magnesować można żelazo umieszczając je w solenoidzie z prądem. Stanowi ono wtedy rdzeń elektromagnesu (rys. 3.36).

*§ **3.27. Pole, indukcja, namagnesowanie.** Wyobraźmy sobie solenoid bez rdzenia (rys. 3.37), przez który przepuszczamy prąd. Wewnątrz solenoidu wytwarza się pole magnetyczne jednorodne o natężeniu H. Strumień indukcji magnetycznej przez poprzeczny przekrój solenoidu (np. AB) wynosi

$$\Phi_0 = B_0 S, \tag{3.24}$$

gdzie $B_0 = \mu_0 H$ jest indukcją wewnątrz pustego solenoidu ($\mu = 1$), zaś S jest polem przekroju solenoidu. Jeśli np. strumień ten wynosi 3 jednostki jakiegokolwiek układu, zaznaczymy go trzema liniami sił (linie pełne na rysunku). Linie te wychodzą z biegunów

solenoidu i rozchodzą się w przestrzeni dając coraz słabsze pole. Doświadczenie pokazuje, że jeżeli do solenoidu wprowadzimy rdzeń żelazny, to pole na zewnątrz solenoidu stanie



Rys. 3.37. Rdzeń żelazny w solenoidzie (przekrój). Linie sił ciągłe pochodzą od solenoidu, linie sił przerywane — od rdzenia

się setki razy silniejsze. Oznacza to, że z biegunów solenoidu wychodzi teraz strumień indukcji magnetycznej Φ, który jest setki razy większy od dawnego strumienia Φ_0. Istotnie mamy obecnie związki

$$B = \mu_0 \mu H = \mu B_0, \tag{3.25}$$

zatem

$$\Phi = BS = \mu B_0 S = \mu \Phi_0. \tag{3.26}$$

Ponieważ dawny strumień Φ_0 wychodzący z biegunów solenoidu przechodził przez wnętrze solenoidu, czyli przez jego rdzeń powietrzny, przeto wyobraźmy sobie, że i strumień obecny Φ przechodzi teraz przez wnętrze solenoidu w żelazie.

Gdybyśmy więc wyobrazili sobie wzdłuż przekroju (AB) nieskończenie cienką szczelinę zrobioną w żelazie, to przez tę szczelinę przechodziłby ten sam strumień indukcji Φ, a zatem wewnątrz szczeliny panowałoby pole magnetyczne o indukcji $B = \mu_0 \mu H$. Wykonanie pomiaru B w szczelinie, a zarazem w żelazie, jest zupełnie możliwe (por. § 4.5), chociaż w tej chwili wydaje się nam fikcją. Pomiar taki pozwoli, znając H i μ_0, obliczyć przenikalność magnetyczną μ żelaza.

Skoro wektor indukcji $\mathbf{B}$ jest większy μ razy od wektora $\mathbf{B}_0$ pola pierwotnego, które indukcję rdzenia wywołało, oznacza to, że wektor indukcji $\mathbf{B}$ w żelazie jest równy dawnemu, niezmienionemu wektorowi $\mathbf{B}_0$ pola magnetycznego wewnątrz cewki (obecnie wewnątrz żelaza), powiększonemu o pewien dodatkowy wektor $\mathbf{J}$. Ów dodatkowy wektor zawdzięcza swoje istnienie namagnesowaniu się rdzenia:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{J}. \tag{3.27}$$

Wektor $\mathbf{J}$ nosi nazwę wektora *namagnesowania* albo *polaryzacji magnetycznej* ośrodka (rdzenia). Strumień tego wektora JS widzimy na rysunku w postaci linii przerywanych. Wartość jego,

$$J = B - B_0 = \mu_0 (\mu - 1) H, \tag{3.27a}$$

jest miarą namagnesowania rdzenia. Mierzy się ono tymi samymi jednostkami co B i B_0, a więc V·s/A·m, w układzie MKSA zracjonalizowanym.

Czytelnik może się spotkać w literaturze z odmienną postacią związku (3.27), mianowicie:

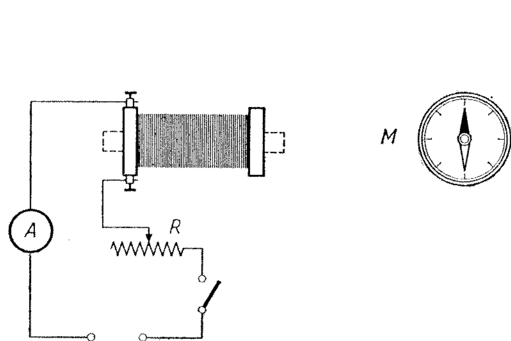
$$B = B_0 + 4\pi J. \tag{3.28}$$

Stosuje się ona jedynie dla niezracjonalizowanego układu jednostek, a więc np. dla układu elektromagnetycznego CGS. Ponieważ w tym układzie $B = \mu H$ i $B_0 = H$; przeto

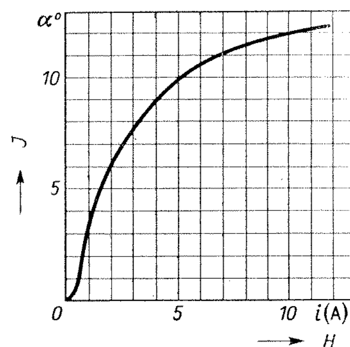
$$J = \frac{\mu - 1}{4\pi} H; \tag{3.28a}$$

J mierzy się, podobnie jak B, w gausach.

*§ **3.28. Przenikalność magnetyczna żelaza. Zjawisko nasycenia magnetycznego.** Rysunek 3.38 przedstawia bardzo proste i interesujące doświadczenie. Zwykła cewka z kilkudziesięcioma zwojami grubego drutu izolowanego włączona jest w obwód prądu z kilku akumulatorów. W odległości kilkudziesięciu cm od cewki, w miejscu M ustawiamy busolę użytą jako magnetometr (zatem wektor H pola wytworzonego przez cewkę ma być prostopadły do igły, por. § 3.6).



Rys. 3.38. Badanie zjawiska nasycenia magnetycznego żelaza i wyznaczenie krzywej histerezy żelaza i stali



Rys. 3.39. Krzywa magnesowania żelaza (wyniki doświadczenia z rys. 3.38)

a) Cewka bez rdzenia. Puszczamy prąd około 10 A i stwierdzamy, że pole, jakie cewka wytwarza w punkcie M, jest tak słabe, że igła kompasu prawie wcale nie wychyli się. Zatem pole pochodzące od prądu jest w M niemal niedostrzegalne.

b) Do cewki wsuwamy kawałek żelaza. Puszczamy prąd $i = 1, 2, ..., 10$ amperów regulując go opornikiem suwakowym R. Dla każdego z tych prądów notujemy wychylenie α igły busoli. Wyniki przedstawia wykres (rys. 3.39).

Objaśnienie wykresu: Ponieważ pole pochodzące od samego prądu jest tak słabe, że nie wychyla igły, przeto wychylenie igły α spowodowane jest wyłącznie przez namagnesowanie żelaza. Wektor magnetyczny, który igłę wychyla (h tgα, por. § 3.6), jest oczywiście znacznie słabszy od namagnesowania $B - B_0$, ponieważ wektor B panuje w szczelinie wewnątrz rdzenia. Wprawdzie nie potrafimy obliczyć wektora $J = B - B_0$ na podstawie znajomości kąta α, niemniej sposób, w jaki się zmienia h tgα w zależności od prądu i daje nam dokładne wyobrażenie o zmienianiu się namagnesowania (zmiany te są nawet

wzajemnie proporcjonalne). Dlatego na osi rzędnych zamiast namagnesowania $B - B_0$ czyli J, odłożyć można h tgα lub tgα, lub wprost α, skoro kąty α są małe (kilka stopni). Na osi odciętych zamiast natężenia H pola magnesującego, tzn. pola wewnątrz pustej cewki, odkładamy proporcjonalne do niego natężenie prądu i.

Interpretacja wyników. Gdyby wykres na rys. 3.39 był linią prostą, powiedzielibyśmy, że $\mu - 1$, a więc i μ jest stałe (gdyż nachylenie linii jest stałe). Ale linia ta jest krzywa, jej nachylenie początkowo rośnie, potem maleje. Widzimy przeto, że μ nie jest stałe: gdy prąd (a więc i H) rośnie, μ zrazu rośnie, a potem maleje. Wreszcie dla dość dużych i (więc i dla dużych H) linia staje się prawie pozioma; zatem $\mu - 1$ dąży do 0, czyli μ dąży do 1.

Przenikalność magnetyczna μ żelaza jest w znacznym stopniu zależna od wielkości pola magnesującego H: *gdy natężenie pola rośnie, przenikalność początkowo wzrasta, a potem maleje, aż do wartości zbliżonej do* 1. Ten fakt, że namagnesowanie żelaza dąży dla dużych H do wartości stałej, nazywa się *zjawiskiem nasycenia magnetycznego.*

Poniższa tablica daje pojęcie o wielkości i zmienności przenikalności magnetycznej żelaza.

Tablica 3.2

Przenikalność magnetyczna kilku rodzajów żelaza

H Oe*	Żelazo miękkie (C — 0,03%) μ	Stal (C — 0,99%) niehartowana μ	Stal (C — 0,99%) hartowana μ
0,5	2000	—	—
1	6300	89	42
5	2600	100	48
10	1460	165	50
50	340	280	86
100	180	158	98
500	42	38	31

Jak widzimy, przenikalność magnetyczna żelaza zależy od dodatku węgla (C) i od hartowania. Poza tym zależy jeszcze od rodzaju domieszek, od termicznej obróbki itp.

*§ **3.29. Histereza magnetyczna żelaza.** Powtórzmy poprzednie doświadczenie (rys. 3.38) używając jako rdzenia kawałka stali (np. dość grube wiertło), która nigdy przed tym nie była magnesowana. Doświadczenie wykonujemy następującymi etapami:

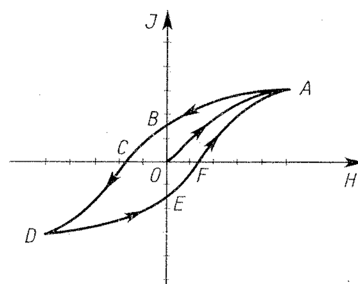
a) Powiększajmy prąd w cewce od 0 do około 10 A (tzn. powiększajmy stopniowo pole magnesujące H) i wykonajmy kolejno szereg pomiarów kąta wychylenia igły, który, jak wiemy, jest w przybliżeniu proporcjonalny do namagnesowania rdzenia. Wyniki przedstawmy przy pomocy krzywej. Doświadczenie daje nam krzywą magnesowania OA (rys. 3.40). Strzałka oznacza kierunek zmian wielkości mierzonych. Jest to tzw. *krzywa magnesowania pierwotnego.*

b) Zmniejszajmy stopniowo natężenie prądu (a więc i H) z powrotem do zera. Otrzymamy teraz inną krzywą AB. Okazuje się, że przy wyłączonym prądzie ($H = 0$) w rdzeniu pozostało namagnesowanie. Wielkość tego namagnesowania, którego miarą jest odcinek OB, nazywamy *pozostałością magnetyczną*.

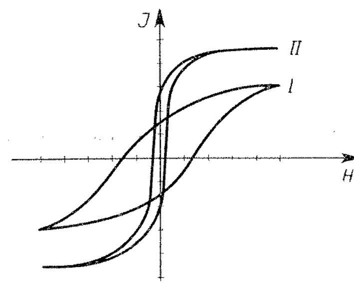
c) Zmieńmy kierunek prądu (więc i kierunek H) i zwiększajmy jego natężenie od 0 do około 10 A. Otrzymamy krzywą magnesowania BCD. Odcinek OC (wyrażony nie w amperach, lecz w erstedach) jest miarą pola, które niszczy pozostałość magnetyczną; to pole nazywa się *koercją*.

d) Zmniejszajmy znów natężenie prądu (więc i H). Krzywa magnesowania będzie DE. Odcinek OE jest znów miarą pozostałości magnetycznej rdzenia, teraz przeciwnie skierowanej.

e) Zmieńmy znów kierunek prądu i znów wyznaczmy krzywą magnesowania. Będzie nią krzywa EFA; przy tym odcinek OF jest znów miarą koercji.



Rys. 3.40. Krzywa magnesowania pierwotnego (OA) i pętla histerezy stali



Rys. 3.41. Pętle histerezy: I — stali, II — żelaza miękkiego

Z tego widzimy, że namagnesowanie rdzenia nie zależy wyłącznie od natężenia pola H, lecz również od tego, w jakim polu rdzeń znajdował się poprzednio: w silniejszym czy słabszym. Zjawisko to nazywa się zjawiskiem *histerezy magnetycznej*; krzywa nosi nazwę *pętli histerezy*.

Jeżeli powyższe doświadczenie przerobimy również z rdzeniem z żelaza miękkiego, to od razu zobaczymy różnicę pomiędzy pętlami histerezy stali i żelaza. Obie te krzywe pokazuje rys. 3.41. Z wykresów odczytujemy charakterystyczne różnice między histerezą stali i żelaza: 1) koercja stali jest bardzo wielka w stosunku do koercji żelaza, 2) natomiast pozostałość magnetyczna w stali jest mniejsza niż w żelazie. Pierwsza właściwość jest bardzo cenna: stal się trudno odmagnesowuje; dlatego ze stali robi się magnesy trwałe. Natomiast żelazo miękkie tak łatwo się odmagnesowuje, że wystarczy ułamek ersteda, aby pozostałość magnetyczna zniknęła.

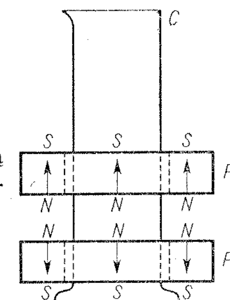
Na tej podstawie zrozumiemy, dlaczego każdy magnes rozmagnesowuje się do pewnego stopnia samorzutnie. Dzieje się to dlatego, że bieguny N i S magnesu wytwarzają pole, które działa nie tylko na cząstki żelaza (np. na opiłki) znajdujące się na zewnątrz magnesu, ale także na cząstki własne magnesu. Otóż to pole wytworzone wewnątrz magnesu przez jego bieguny działa na cząstki żelaza w przeciwnym kierunku aniżeli pole, które ten magnes kiedyś namagnesowało (patrz rys. 3.35); psuje zatem

istniejące uporządkowanie. Dlatego nazywa się polem *rozmagnesowującym**). Zrozumiałą więc staje się rzeczą, dlaczego np. bieguny magnesu podkowiastego powinny być zwarte kawałkiem żelaza, czyli *zworą*: w zworze indukują się bieguny, które neutralizują działanie rozmagnesowujące biegunów magnesu. Z tego samego powodu nie należy magnesów liniowych nakładać na siebie biegunami jednoimiennymi, lecz różnoimiennymi; ponieważ tylko w tym drugim wypadku pola rozmagnesowujące znoszą się wzajemnie.

Magnesy trwałe mają wielkie zastosowanie w technice (magneta, telefony, głośniki itd.). W pracy swojej magnes narażony jest najczęściej na działanie pola odmagnesowującego, tzn. że jego „punkt pracy" (por. § 3.30) znajduje się na odcinku BC krzywej histerezy (rys. 3.40). Dlatego też technicy starają się o to, aby wyprodukować magnesy nie tylko o jak największej pozostałości magnetycznej, ile o jak największej koercji. W tym celu opracowują stopy zawierające żelazo, wolfram, chrom, mangan, glin, krzem itd. Stopy te noszą nazwy: permaloj, alniko, alsifer itd. Osiągnięto zdumiewające wyniki: nowoczesne magnesy trwałe nie tylko dają pola tak silne, że zastępują elektromagnesy, ale ich koercja dochodzi do rzędu tysiąca erstedów.

Materiały magnetyczne odznaczające się dużą koercją noszą ogólną nazwę materiałów *magnetycznie twardych*; wyrabia się z nich magnesy trwałe. Natomiast materiały o małej koercji, lecz wielkiej przenikalności magnetycznej nazywają się materiałami *magnetycznie miękkimi*; z materiałów tych wyrabia się rdzenie do elektromagnesów i transformatorów.

W ostatnich latach opracowano zupełnie nowy typ materiałów magnetycznych twardych i miękkich. Są to materiały niemetaliczne i nieprzewodzące prądu elektrycznego; właściwość ta ma ogromne znaczenie techniczne (por. §§ 4.4, 4.17d i 4.33c). Materiałami tymi są żelaziny magnezu, miedzi, baru, żelaza itp. Noszą one ogólną nazwę *ferrytów*, np. ferryt magnezowy: $MgO \cdot Fe_2O_3$, ferryt miedziowy: $CuO \cdot Fe_2O_3$, ferryt barowy: $BaO \cdot F_2O_3$, ferryt żelazowy $FeO \cdot Fe_2O_3$. Ten ostatni, o wzorze sumarycznym Fe_3O_4, występuje w przyrodzie w postaci minerału, zwanego *magnetytem*. Odegrał on historyczną rolę w rozwoju nauki o magnetyzmie, był on bowiem pierwszym ciałem mającym spontaniczne właściwości magnetyczne. Za pomocą tego minerału można było magnesować stal i wytwarzać sztuczne trwałe magnesy.

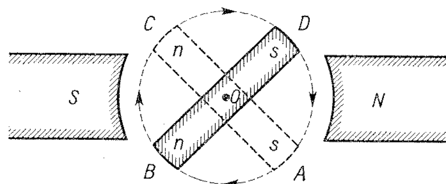


Rys. 3.42. Dwa magnesy ferrytowe w postaci pierścieni P_1 i P_2 odpychają się tak silnie, że P_2 unosi się nad P_1. Cylinder szklany C zapobiega zsunięciu się pierścienia P_2 znad P_1

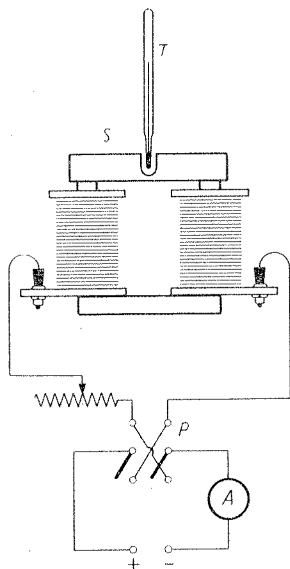
Na rysunku 3.42 widzimy dwa pierścienie ferrytowe namagnesowane w kierunku osi geometrycznej. Przyciągają się one lub odpychają z niezwykłą siłą. Na rysunku ustawione są jeden nad drugim, biegunami jednoimiennymi ku sobie, więc się odpychają. W pewnej wzajemnej ich odległości siła odpychania równoważy siłę ciężkości magnesu drugiego wyżej położonego, wskutek tego unosi się on nad magnesem pierwszym. (Cylinder szklany, na który swobodnie nałożone są oba pierścienie, zapobiega zsunięciu się pierścienia drugiego na bok.)

*) Działanie rozmagnesowujące otwartych biegunów sprawia, że w wyżej opisanym doświadczeniu z rdzeniem żelaznym nie otrzymamy tak wielkiej pozostałości magnetycznej, jak pokazuje krzywa II na rys. 3.41.

*§ **3.30. Rozpraszanie energii jako skutek histerezy.** Niech sztaba żelaza wiruje dokoła osi O między biegunami magnesu, czy elektromagnesu NS (rys. 3.43). Weźmy pod uwagę jeden z jej biegunów, który przed chwilą znajdował się w miejscu A, a teraz jest w B i zbliża się w dalszym ciągu do S. Pole magnetyczne wykonuje w tej chwili pewną pracę, gdyż biegun S przyciąga indukowany biegun n. Sztabka, która przed chwilą była przeciwnie namagnesowana (w A), wchodzi w coraz silniejsze pole magnesujące H i uzyskuje coraz silniejsze namagnesowanie J. Widzimy, że tzw. „punkt pracy", tj. stan sztaby scharakteryzowany przez podanie wartości H oraz J, porusza się po krzywej $DEFA$ na rys. 3.40. Gdy biegun n w dalszym ciągu porusza się ku C, pole magnesujące słabnie, ale namagnesowanie jest teraz z powodu histerezy stosunkowo silniejsze, gdyż punkt pracy porusza się po linii AB. W tym czasie pracę wykonują siły zewnętrzne (np. naszej ręki), gdyż muszą pokonać przyciąganie między S i n. Ale ta praca jest większa niż poprzednia praca sił pola, ponieważ biegun n oddalający się od S jest silniejszy niż ten sam biegun, gdy zbliżał się do S. Różnica tych dwóch prac stanowi energię straconą, rozproszoną. Jest ona tym większa, im większa jest różnica namagnesowania sztabki zbliżającej się do biegunów magnesu i tejże sztabki, oddalającej się od nich. Innymi słowy energia stracona jest tym większa, im pętla histerezy jest grubsza (tzn. im ma większe pole). *Pole pętli histerezy stanowi miarę energii straconej w żelazie podczas przemagnesowywania go.*



Rys. 3.43. Podczas obrotu sztabka się przemagnesowuje, wskutek czego traci się energię mechaniczną; na jej miejsce wydziela się ciepło



Rys. 3.44. Przemagnesowanie sztaby żelaznej S powoduje jej ogrzewanie się. T — termometr zanurzony w otworze z rtęcią

Dokładnie rzecz biorąc energia stracona w jednostce objętości rdzenia w czasie obiegu jednego cyklu histerezy równa jest $\oint J dH$, a więc polu zakreślonemu przez pętlę histerezy w układzie współrzędnych (H, J). Łatwo sprawdzić, że jednostki, w jakich się mierzy (w układzie SI) są $\frac{\mathrm{V \cdot s}}{\mathrm{m^2}} \cdot \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m^3}}$, a więc w dżulach na metr sześcienny.

Na co zamienia się energia stracona wskutek histerezy? Oczywiście wydziela się w sztabie w postaci ciepła, a zatem rozprasza się. Proces przemagnesowywania się żelaza wyobrażony schematycznie na rys. 3.43 zachodzi w rozmaitych maszynach elektrycznych: w prądnicach, silnikach itp. Toteż rdzenie żelazne tych maszyn budują ze specjalnej stali odznaczającej się wysoką wartością μ, lecz bardzo wąską pętlą histerezy. Chodzi o to, aby straty energii wskutek histerezy zmniejszyć do minimum. Z jednej strony bowiem szkoda energii na to, aby się rozpraszała w rdzeniu w postaci ciepła, z drugiej zaś strony ogrzewanie się rdzenia jest szkodliwe dla maszyny.

Że przy „obieganiu" pętli histerezy wytwarza się ciepło, ilustruje doświadczenie wyobrażone na rys. 3.44. Sztabka stalowa S przemagnesowuje się tu nie przez ruch własny w polu magnetycznym, lecz przez ustawiczne zmienianie kierunku pola magnetycznego wytwarzanego przez elektromagnes. Osiągamy to zmieniając kilka razy na sekundę kierunek prądu zasilającego elektromagnes za pomocą przełącznika P. Można również zasilać elektromagnes prądem przemiennym. Stosując prąd kilku amperów już po upływie jednej minuty zauważymy wzrost temperatury sztabki S o około 0,5°—1°. W § 4.4 dowiemy się, że istnieje jeszcze druga, równie ważna przyczyna tego ogrzewania się. Proces opisany tu występuje m.in. w transformatorach (por. § 4.39), przyrządach niezwykłej doniosłości. Nic tedy dziwnego, że elektrycy starają się zmniejszyć nie tylko histerezę, ale i ową drugą przyczynę ogrzewania się żelaznych rdzeni (por. § 4.4.).

*§ **3.31. Istota ferromagnetyzmu.** Wszystkie właściwości żelaza opisane w § 3.26 — —3.30 noszą ogólną nazwę *ferromagnetyzmu.* Charakterystycznymi dla ciała ferromagnetycznego są dwie główne jego cechy: wielka w stosunku do jedności przenikalność magnetyczna μ i zależność przenikalności magnetycznej od natężenia pola magnesującego. W ciałach ferromagnetycznych występuje ponadto histereza. Oprócz żelaza ciałami ferromagnetycznymi, choć w znacznie słabszym stopniu, są nikiel i kobalt.

Sprawdźcie sami, że silny magnes przyciąga monetę niklową, lecz znacznie silniej przyciąga krążek żelazny.

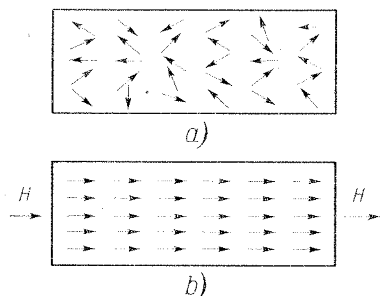
Poza żelazem, niklem i kobaltem znane są jeszcze rozmaite minerały ferromagnetyczne, a nawet stopy ferromagnetyczne nie zawierające wcale metali ferromagnetycznych (np. stop Heuslera: 24% Mn, 16% Al, 60% Cu).

Po zapoznaniu się z właściwościami żelaza możemy zapytać: jaka jest istota ferromagnetyzmu, skąd pochodzi w żelazie tak wyjątkowo silne namagnesowanie?

Wprowadzenie rdzenia żelaznego do solenoidu powoduje taki efekt, jak gdyby w pustym solenoidzie prąd elektryczny powiększył bardzo znacznie swoje natężenie. Ale przecież w rzeczywistości nie ma to miejsca. Poza tym po przerwaniu prądu w solenoidzie rdzeń żelazny zachowuje jeszcze nadal część swojego namagnesowania. Rzecz dzieje się więc tak, jak gdyby przez pusty solenoid płynął jeszcze dość silny prąd elektryczny. Na tej podstawie przypuszczamy, że wewnątrz żelaza krążą jakieś prądy elektryczne, które wywołują jego namagnesowanie. Istotnie, w każdym atomie krążą elektrony, które stanowią swego rodzaju prąd elektryczny wytwarzający pole magnetyczne. Oprócz

tego, jak uczą fakty z dziedziny spektroskopii, każdy elektron wiruje dookoła własnej osi jak bąk; mówimy, że elektrony mają „spin" (moment pędu). Również z tego powodu wytwarzają własne pole magnetyczne. W atomach wielu ciał pola te nie znoszą się i atomy zachowują się wówczas jak maleńkie magnesy; nazywać je będziemy *magnesami elementarnymi*. Bliższe badania wskazują, że w ciałach ferromagnetycznych główną, a może wyłączną rolę odgrywają właśnie pola magnetyczne związane z wirowaniem elektronów dookoła własnej osi, czyli ze spinem elektronów.

W ciele ferromagnetycznym, które nie jest umieszczone w polu magnetycznym, osie elementarnych magnesów nie są uporządkowane, kierunki ich są dowolne, chaotyczne. Taki zespół magnesów elementarnych nie może więc wywołać na zewnątrz własnego pola magnetycznego (rys. 3.45). Dopiero po wprowadzeniu ciała w pole magnetyczne



Rys. 3.45. a) Żelazo bez pola magnetycznego. b) Żelazo w silnym polu magnetycznym H (nasycenie)

zewnętrzne H, elementarne magnesy ustawiają się swoimi osiami równolegle do wektora H (rys. 3.45), wywołują więc powstanie biegunów magnetycznych na końcach rdzenia. Temu ustawianiu się magnesów elementarnych stoi wprawdzie na przeszkodzie ruch drgający (cieplny) atomów, który dąży do wywołania dawnego nieporządku. Niemniej przy silnych polach H osiągamy niemal całkowite uporządkowanie, tak że dalsze wzmacnianie pola magnesującego H nie może już spowodować wzrostu namagnesowania (zjawisko nasycenia!).

Jednak pole zewnętrzne nie jest jedynym czynnikiem sprawiającym tak dokładne uporządkowanie osi magnesów elementarnych. Usuńmy bowiem pole zewnętrzne, a w ciele ferromagnetycznym pozostanie jeszcze dość silne namagnesowanie. Świadczy ono o tym, że obecnie magnesy elementarne same podtrzymują własne uporządkowanie w ten sposób, że każdy magnes elementarny pozostaje pod działaniem silnych pól magnesów sąsiednich i one to zmuszają magnes dany do zachowania dawnego kierunku. Wypowiedzieliśmy tu hipotezę o istnieniu pól wewnętrznych, zwanych również „polami molekularnymi". Hipoteza ta jest, jak widać, konieczna do wytłumaczenia pozostałości magnetycznej, a co za tym idzie, koercji i w ogóle histerezy.

Jest to jednak wytłumaczenie dość powierzchowne. W rzeczywistości wytłumaczenie ferromagnetyzmu nastręczało poważne trudności, tak że fizycy zmuszeni byli do zwątpienia, czy pola molekularne są wyłącznie natury magnetycznej. Heisenberg upatruje ich źródło w fakcie wymiany elektronów między sąsiednimi atomami, co powoduje powstanie tzw. „sił wymiany".

W świetle teorii o magnesach elementarnych stają się mniej lub więcej zrozumiałe następujące fakty doświadczalne, które wymienimy i pozostawimy czytelnikowi do wytłumaczenia i do doświadczalnego sprawdzenia:

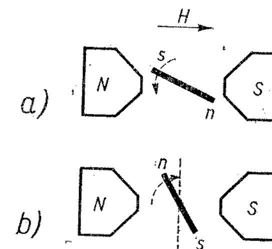
a) Długi i cienki magnes (namagnesowany drut stalowy) tniemy na części: każda część ma znów dwa bieguny N i S.

b) Niewielki magnes ogrzewamy do żółtego żaru: namagnesowanie zniknęło i nie powraca nawet po ostudzeniu magnesu.

c) Jeśli namagnesowaną igłę stalową silnie wstrząsnąć, np. uderzyć o blat stołu, stopień namagnesowania maleje.

*§ 3.32. **Ciała paramagnetyczne i diamagnetyczne.** Poza ciałami wymienionymi w poprzednich paragrafach tego rozdziału wszystkie inne nie wykazują właściwości ferromagnetycznych. Niemniej pole magnetyczne wywiera na nie pewne, choć bardzo słabe, działania. Oto te działania:

a) W polu silnego elektromagnesu zawieśmy na cienkiej nici kawałek drucika z platyny lub aluminium (rys. 3.46a). Drucik ustawia się równolegle do linii pola magnetycznego. Dowodzi to, że drucik namagnesował się i że kierunek jego namagnesowania *sn* jest zgodny z kierunkiem wektora pola H. Lecz namagnesowanie J drucika musi być bardzo słabe, skoro siła skręcająca jest tak słaba. Wnosimy więc stąd, że wartość μ jest wprawdzie większa od jedności ($\mu = 1$ dla próżni), lecz jednak J jest niezwykle małe. Tego rodzaju ciała nazywamy *paramagnetycznymi*.



Rys. 3.46. a) Ciało paramagnetyczne ustawia się równolegle do wektora pola zewnętrznego H (kierunek namagnesowania *sn* jest zgodny z H). b) Ciało diamagnetyczne dąży do ustawienia się prostopadłego do linii sił (kierunek namagnesowania *sn* jest przeciwny do kierunku H)

Badania wykazują, że przenikalność magnetyczna ciał paramagnetycznych jest wielkością niezależną od H, przeciwnie niż w ferromagnetykach. W ciałach paramagnetycznych nie można tak łatwo osiągnąć nasycenia jak np. w żelazie; poza tym histereza nie występuje. Istotą paramagnetyzmu, podobnie jak ferromagnetyzmu, musi być również istnienie magnesów elementarnych, które ustawiają się w polu zewnętrznym. Mała jednak wartość μ oraz brak nasycenia i histerezy wskazują, że w ciałach paramagnetycznych nie istnieją tak silne oddziaływania wzajemne między spinami jak w ferromagnetykach.

b) Między biegunami elektromagnesu zawiesimy pręcik z bizmutu (rys. 3.46b). Stwierdzimy, że pręcik wychyla się w ten sposób, że dąży do ustawienia się poprzecznie do kierunku pola magnetycznego H. Dowodzi to, że pręcik bizmutowy namagnesował się, zresztą bardzo słabo, i że kierunek namagnesowania jest przeciwny aniżeli kierunek wektora H. Wobec tego wektor namagnesowania J ma znak przeciwny niż wektor H. Zatem przenikalność magnetyczna μ jest mniejsza od jedności. Wartość $(\mu-1)$ jest więc

ujemna i co do bezwzględnej wartości bardzo mała. Istnieje wiele ciał, które zachowują się w polu magnetycznym podobnie jak bizmut; nazywamy je ciałami *diamagnetycznymi*.

Istota diamagnetyzmu. Z zachowania się ciał diamagnetycznych w polu magnetycznym należy wnosić, że w substancji diamagnetycznej nie ma magnesów elementarnych. Naturalny będzie więc wniosek, że prądy elektryczne wywołane w atomie przez liczne elektrony krążące i wirujące wytwarzają rozmaicie skierowane pola magnetyczne tak, że pola te wzajemnie znoszą się. Substancja diamagnetyczna wprowadzona w pole magnetyczne nie będzie się tedy magnesowała w kierunku pola, gdyż jej atomy nie są trwałymi magnesami elementarnymi. Ale zauważmy, że wprowadzając w pole ciała diamagnetyczne narażamy obracające się elektrony na działanie siły elektromagnetycznej skierowanej prostopadle do kierunku ruchu elektronu. Pod wpływem tej siły niektóre orbity elektronów zmniejszają swój promień, a niektóre zwiększają. Skutek jest taki, jak gdyby do prądu kołowego płynącego w atomie dodał się prąd indukowany w atomie przez powstające pole magnetyczne (por. § 3.35 i 4.4). Ten dodatkowy prąd w myśl reguły Lenza (§ 4.2) musi mieć taki kierunek, by jego pole magnetyczne sprzeciwiało się narastaniu pola zewnętrznego. A zatem w ciele diamagnetycznym powstaje namagnesowanie skierowane przeciwnie do pola magnesującego. Namagnesowanie to trwa tak długo, jak długo ciało pozostaje w polu magnetycznym, gdyż prąd indukowany w atomie nie zanika, energia jego bowiem nie zamienia się na ciepło. Dopiero w chwili usunięcia ciała diamagnetycznego z pola magnetycznego w atomach wzbudzają się prądy indukowane o kierunku przeciwnym do poprzedniego i niszczą prądy indukowane poprzednio; w ten sposób znika namagnesowanie ciała diamagnetycznego.

Z powyższego widać, że wszystkie ciała są w zasadzie diamagnetyczne. Tylko niektóre z nich, których drobiny mają tę właściwość, że pola magnetyczne poszczególnych elektronów nie znoszą się, są paramagnetyczne. Te zaś ciała paramagnetyczne, które na skutek specjalnej budowy krystalicznej odznaczają się niezwykle silnymi polami molekularnymi, są substancjami ferromagnetycznymi.

Poniższa tablica daje pojęcie o wartości przenikalności magnetycznej różnych ciał para- i diamagnetycznych. Ze względu na to, że μ jest bardzo bliskie jedności, podane są wartości $\mu-1$.

Tablica 3.3

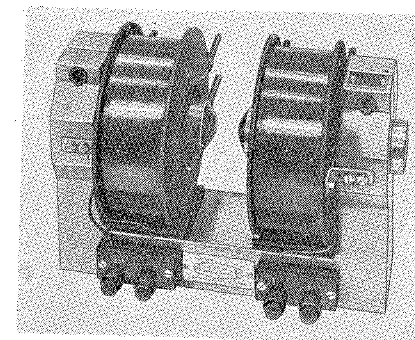
Wartości współczynnika $\mu-1$ dla ciał para- i diamagnetycznych (próżnia: $\mu-1=0$)

Ciała paramagnetyczne	$(\mu-1)\cdot 10^{-6}$	Ciała diamagnetyczne	$(\mu-1)\cdot 10^{-6}$
Platyna	+12	Bizmut	—16
Glin	+ 8	Woda	— 9
Tlen	+ 1,6	Rtęć	— 2
Powietrze	+ 0,4	Miedź	— 0,1

D. Zastosowania

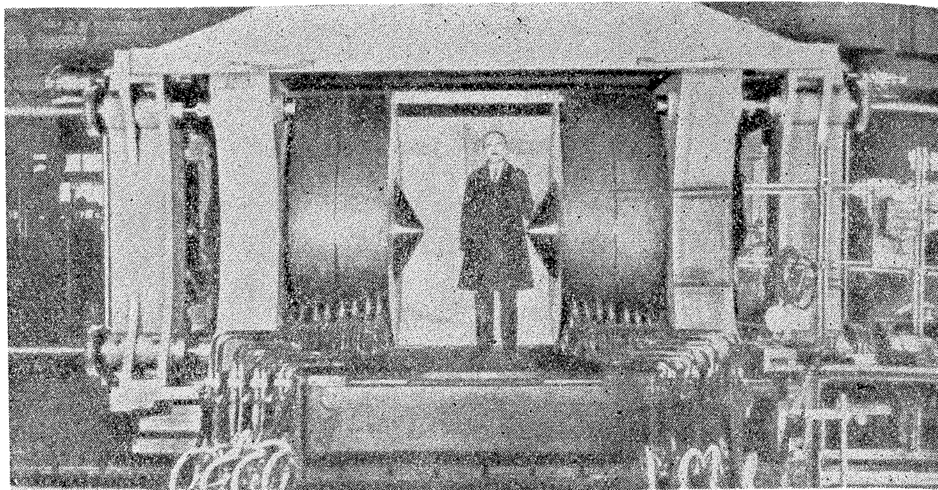
*§ 3.33. **Elektromagnesy z rdzeniem.** Wielkie rozpowszechnienie elektromagnesy zawdzięczają właściwości, że namagnesowanie rdzenia żelaznego wzbudza się z chwilą puszczenia do zwojów prądu, a znika niemal zupełnie z chwilą przerwania prądu. Dlatego właśnie rdzeń powinien odznaczać się małą koercją, aby pole rozmagnesowujące wytworzone przez bieguny rdzenia zniszczyło jego pozostałość magnetyczną. Dzięki swojej właściwości elektromagnesy pełnią ważne funkcje w najrozmaitszych urządzeniach elektrycznych. Oto parę przykładów urządzeń, w których elektromagnesy odgrywają główną rolę: drgające przerywacze prądu (brzęczyki, dzwonki); aparaty telegraficzne, sygnalizujące, alarmujące; wyłączniki automatyczne: nadmiarowe (wyłączające prąd, gdy jego natężenie wzrośnie powyżej pewnej wartości), zanikowe (wyłączające prąd, gdy jego natężenie spadnie poniżej pewnej wartości) itp.; przekaźniki służące do zamykania obwodów silnoprądowych za pomocą prądu słabego; rozmaite automaty, regulatory, elektromagnesy specjalne (np. dźwigi do podnoszenia żelaza) itd.

Do otrzymania bardzo silnych pól magnetycznych, potrzebnych do badań naukowych stosuje się wielkie elektromagnesy specjalnej konstrukcji. Jeden z takich elektromagnesów przedstawia rysunek 3.47. Na dwóch rdzeniach żelaznych umieszczonych poziomo na żelaznej zworze w kształcie litery U nasadzone są cewki. Każda cewka składa się z tysiąca zwojów drutu miedzianego. Cewki zamknięte są w mosiężnych bębnach, którego podwójne ściany chłodzone są wodą. Prąd nasycenia, tj. prąd, przy którym rdzenie są magnetycznie nasycone, wynosi około 10 A przy napięciu 220 V. Na końce żelaznych rdzeni nakłada się „nasadki biegunowe" rozmaitych kształtów i rozmiarów. Między nasadkami biegunowymi wytwarza się silne pole magnetyczne, które stosuje się do badań naukowych. Elektromagnesy tego typu przy nasadkach biegunowych w formie ściętych stożków zbliżonych do siebie na odległość kilku mm wytwarzają pola magnetyczne dochodzące do 40 000 Oe.



Rys. 3.47. Elektromagnes laboratoryjny

Za pomocą elektromagnesów z rdzeniem żelaznym nie można już otrzymać o wiele silniejszych pól. Jednakże fizycy dążyli do otrzymania najsilniejszych pól, wypełniających możliwie największą objętość, budując w tym celu coraz większe elektromagnesy. Największym elektromagnesem do badań naukowych jest elektromagnes typu Cottona znajdujący się w Bellevue pod Paryżem (rys. 3.48). O jego wielkości niech świadczy fakt, że tylko jedna jego cewka z rdzeniem i blokiem żelaznym, do którego jest przymocowana, waży około 25 000 kg. Uzwojenie cewek stanowi rura miedziana o długości 5,5 km. Wodę do chłodzenia pompują specjalne pompy. Rdzenie z blokami przesuwane są przy pomocy przekładni ślimakowych poruszanych silnikami. Prąd nasycenia wynosi 400 A. Nasadki biegunowe (zakończenia rdzeni) nie są z żelaza, lecz z „ferro-kobaltu"; jest to



Rys. 3.48. Największy elektromagnes Cottona w Bellevue

stop Fe+Co odznaczający się większą indukcją B niż żelazo. Przy pomocy tego elektromagnesu otrzymać można pole około 60 000 Oe, wypełniające stosunkowo znaczną objętość kilku cm³.

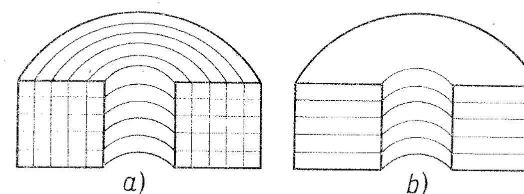
§ 3.34. Elektromagnesy bez rdzenia. Gdy rdzeń elektromagnesu jest bliski nasycenia, dalsze powiększanie natężenia prądu w cewkach niewiele przyczyni się do powiększenia natężenia pola magnetycznego między biegunami; zwiększy się tylko natężenie niezbyt silnego pola wewnątrz cewek pochodzącego od prądu, a namagnesowanie rdzenia pozostanie bez zmiany; taki jest skutek nasycenia żelaza, o którym była mowa w § 3.28. Zagadnienie otrzymania jeszcze silniejszych pól rozwiązano w odmienny sposób. Mianowicie przez specjalnie zbudowaną cewkę bez rdzenia, o bardzo mocnej konstrukcji i wodnym chłodzeniu, przepuszcza się prądy o natężeniu dziesiątków tysięcy amperów. Wewnątrz takiej cewki otrzymuje się pola magnetyczne rzędu 10^5 Oe. Rdzeń żelazny jest tu zbyteczny, gdyż w tak silnych polach przenikalność magnetyczna żelaza spada niemal do jedności, czyli do wartości dla próżni (patrz tabl. 3.2, § 3.28).

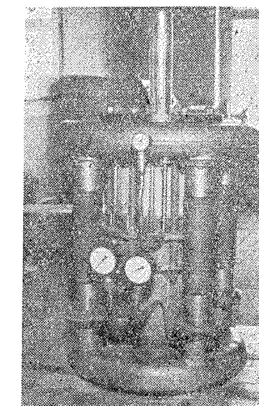
Otrzymywanie w ten sposób stałych pól magnetycznych jest niezwykle kosztowne, gdyż wymaga specjalnej elektrowni prądu stałego, a także potężnych pomp wodnych do odprowadzania ciepła z przewodów cewki. Jedno z takich urządzeń widzimy na rys. 3.49.

Jeszcze silniejsze pola magnetyczne uzyskuje się w cewkach bezrdzeniowych, przez które przepuszcza się bardzo krótko trwający prąd elektryczny o natężeniu rzędu setek tysięcy amperów. Uzyskuje się w ten sposób *impulsowe* pola magnetyczne o natężeniu rzędu wielkości 10^5, a nawet 10^6 erstedów.

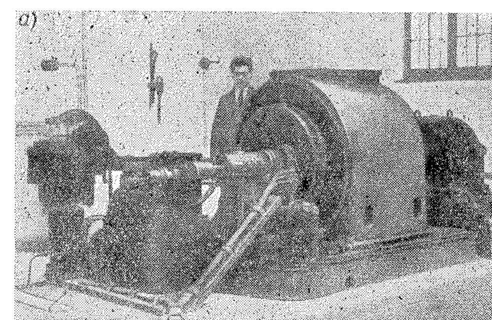
Pierwszy zastosował taką metodę Piotr Kapica, który w latach dwudziestych zbudował w Cambridge urządzenie złożone z wielkiej prądnicy prądu przemiennego i z niewielkiej cewki (rys. 3.50). Prądnica, której wirnik miał bardzo duży moment bezwładności, rozpędzana była bez obciążenia silnikiem elektrycznym, po czym zwierana

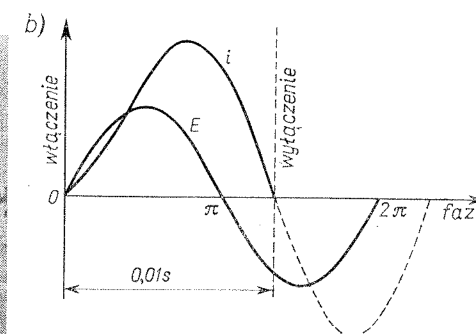
była na pół okresu cewką, w chwili, gdy jej napięcie przechodziło przez zero. Silne obciążenie prądnicy powodowało gwałtowne zahamowanie jej wirnika, czemu towarzyszy wielki wstrząs i huk. Wstrząs ten przenosił się poprzez fundamenty na całą halę i dochodził do cewki i przyrządów pomiarowych, oddalonych od prądnicy o kilkanaście metrów.





Rys. 3.49. a) Uzwojenie cewki typu solenoidu; przewód w postaci rury miedzianej o przekroju prostokątnym, izolowany taśmą i lakierem; wewnątrz przepływa woda chłodząca. b) Uzwojenie cewki typu Bittera; przewód ma postać płaskich pierścieni blaszanych, ułożonych płaszczyznami prostopadle do osi cewki; pierścienie przecięte są wzdłuż promienia i połączone w spirale. c) Elektromagnes bezrdzeniowy Bittera, ośrodka wrocławskiego. Uzwojenie typu b) chłodzone wodą pod ciśnieniem. Natężenie prądu 2900 A, moc 1,5 MW, średnica wewnętrzna cewki 10 cm, długość cewki 20 cm, natężenie pola magnetycznego 43 kOe. Do środka cewki wstawiono naczynie Dewara



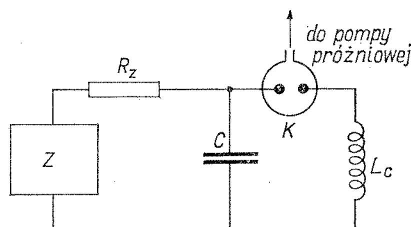


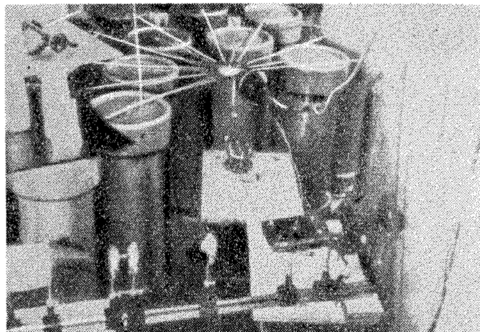
Rys. 3.50. Pierwsze urządzenie P. Kapicy (na zdjęciu) z roku 1927 do otrzymywania bardzo silnych impulsowych pól magnetycznych w cewce bez rdzenia. Natężenie prądu w cewce 72 000A, czas trwania impusu 0,01 s, objętość kanału wewnątrz cewki 2 cm³ (por. z cewką Bittera), maksymalne natężenie pola magnetycznego 320 kOe. b) Przebieg siły elektromotorycznej i prądu w czasie jednego okresu. Włączenie i wyłączenie cewki następuje automatycznie, gdy natężenie prądu przechodzi przez wartość zero

Właśnie dlatego oddalenie to było tak duże, aby w czasie, gdy fala wstrząsu dojdzie do przyrządów pomiarowych, zdążyły one zapisać wyniki pomiarów.

W metodzie Kapicy energia gromadziła się w postaci energii kinetycznej wirnika o wielkim momencie bezwładności. Tak skumulowana energia wyładowywała się w czasie zwarcia w postaci energii pola magnetycznego wewnątrz cewki.

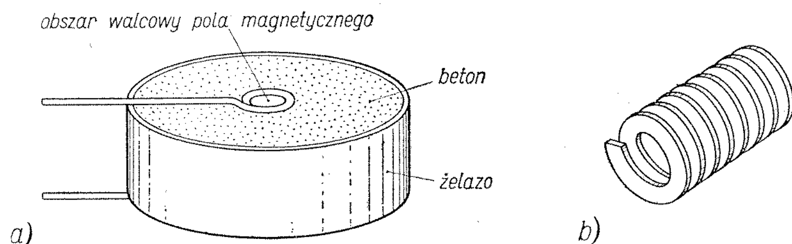
W dzisiejszych metodach energię gromadzi się w postaci energii elektrostatycznej, zebranej w wielkiej baterii kondensatorów, naładowanych do wysokiego napięcia. Rozładowując baterie kondensatorów przez zwoje cewki bezrdzeniowej, energię elektrostatyczną wyzwala się wewnątrz cewki w postaci energii pola magnetycznego (rys. 3.51).





Rys. 3.51. Zasada wytwarzania silnych impulsowych pól magnetycznych, stosowana w Zakładzie Dielektryków Instytutu Fizyki PAN w Poznaniu. Czas trwania impulsu: ok. 500 μs, natężenie pola w objętości 2 cm³: do 400 kOe

Uzwojenie cewki stanowi taśma miedziana zwinięta płasko w jednej warstwie walcowej (rys. 3.52). Siły elektrodynamiczne działają na zwoje w kierunku od osi cewki na zewnątrz, starając się powiększyć ich średnicę. Z drugiej strony siły elektrodynamiczne, działające pomiędzy sąsiednimi zwojami, zgniatają cewkę wzdłuż jej osi. Są to siły olbrzymie; jak

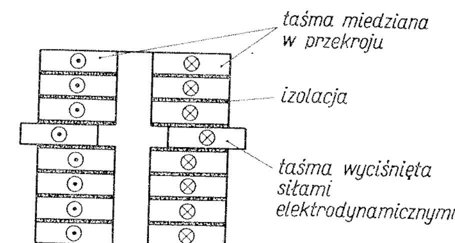


Rys. 3.52. Wygląd cewki stosowanej w metodzie z rys. 3.51. Pancerz betonowy chroni ją od rozerwania działaniem sił elektrodynamicznych, skierowanych na zewnątrz pobocznicy walca

widać na rys. 3.52a, cewka zabetonowana jest wewnątrz grubego walca ochronnego. Bez tego pancerza może nastąpić uszkodzenie lub eksplozja cewki. Rys. 3.53 pokazuje, jak wielkie ciśnienie działa wzdłuż osi i na zewnątrz walca, jeśli potrafi wycisnąć część uzwojenia z jego normalnego położenia.

Stosując do badań pola *impulsowe*, a więc krótkotrwałe, należy przebieg badanego zjawiska zapisywać na oscyloskopie elektronowym. Jak to się robi? — dowiemy się w drugiej części tej książki.

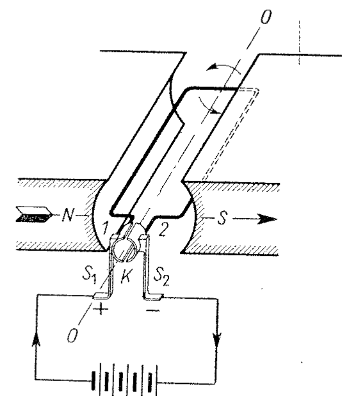
Najnowocześniejszy sposób otrzymywania *stałych* pól magnetycznych w cewkach bezrdzeniowych polega na zastosowaniu do uzwojeń tzw. nadprzewodników, tj. metali



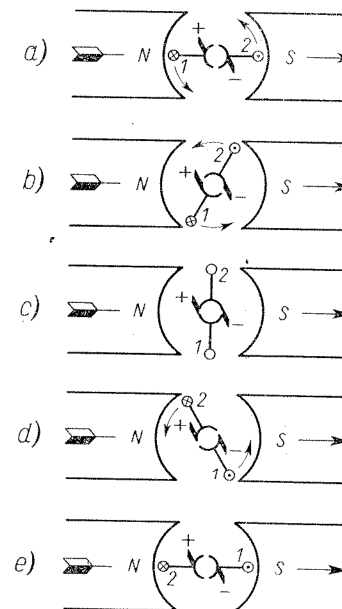
Rys. 3.53. Przekrój cewki po eksplozji. Przewody w postaci taśmy płasko zwiniętej widoczne w przekroju, jeden z nich wyciśnięty działaniem wysokiego ciśnienia wielu tysięcy kG/cm²

lub stopów, które ochłodzone do temperatury bliskiej zera absolutnego, tracą całkowicie opór. O nadprzewodnikach będzie jednak mowa również w 2 części tej książki.

*§ **3.35. Silniki elektryczne.** a) Zasada działania. Siła działająca na przewodnik z prądem umieszczony w polu magnetycznym (por. rys. 3.34) może być praktycznie wy-

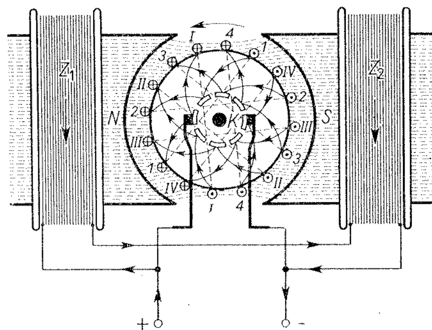


Rys. 3.54. Zasada działania silnika elektrycznego. K — dwie blaszki odizolowane od siebie, umocowane na walcu (komutator), S_1 i S_2 — elektrody, zazwyczaj węglowe, umocowane na sprężynach (szczotki)

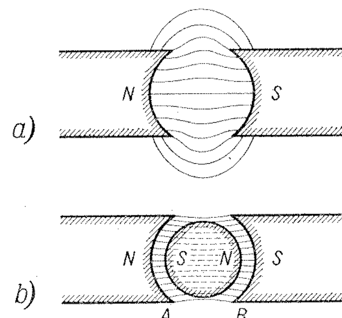


Rys. 3.55. Obrazy „kinematograficzne" obracającej się ramki. ⊙ — oznacza drut w przekroju, przez który płynie prąd ku czytelnikowi; ⊗ — oznacza, że prąd płynie od czytelnika. W pozycji c) prąd nie płynie

zyskana w celu wykonywania pracy. Względy techniczne wymagają jednak, aby ruch postępowy przewodnika, który widzimy na rys. 3.34, został zmieniony na ruch obrotowy. Wówczas przewodnik ten umieszczony na jakimś wale będzie mógł wprawić go w obrót. Jak zrealizować ruch obrotowy przewodnika, pokazuje rys. 3.54. Mamy tutaj dwa przewodniki analogiczne do przewodnika ruchomego z rys. 3.34; oznaczone zostały cyframi *1* i *2*. Tworzą one ramkę mogącą poruszać się dookoła osi *OO*. W układzie wyobrażonym na rys. 3.54 prąd płynie w kierunku od *1* do *2*; na przewodnik *1* działa siła elektromagnetyczna skierowana ku dołowi, a na przewodnik *2* działa siła skierowana ku górze (rys. 3.55). Ramka obróci się więc (rys. 3.55) i zajmie położenie poprzeczne w stosunku do linii sił (rys. 3.55). Jednak dzięki bezwładności położenie to minie. W tej właśnie chwili poważną rolę gra pomysłowe urządzenie, zwane *komutatorem* lub *kolektorem* dobrze widoczne na obu rysunkach: 3.54 (gdzie oznaczone jest literą *K*) i 3.55. Jest to pierścień złożony z dwóch metalowych półkolistych części, odizolowanych od siebie. Obraca się on razem z ramką. Ślizgają się po nim dwie elektrody doprowadzające prąd do ramki, zwane *szczotkami*: $S_1(+)$ i $S_2(-)$. Komutator sprawia, że prąd, który płynął od *1* do *2*, zmienia w chwili (c) kierunek na przeciwny i płynie teraz od *2* do *1* (d, e). Dzięki temu siły elektromagnetyczne działają obecnie na przewodnik *1* do góry, a na przewodnik *2* na dół. A więc ramka obraca się stale i niezmiennie w kierunku niezgodnym z kierunkiem wskazówek na tarczy zegara. Zauważmy, że ruch ramki odbywa się w takim właśnie kierunku, że *całkowity* strumień wektora magnetycznego przechodzącego przez ramkę dąży do osiągnięcia maksimum.



Rys. 3.56. Silnik elektryczny w rysunku schematycznym



Rys. 3.57. Walec żelazny zwiększa natężenie pola magnetycznego w szczelinach *A* i *B*

b) Budowa silnika. Poznaliśmy prototyp silnika elektrycznego. Silnik taki działałby nader słabo i nierówno, ponieważ ramka przechodząc przez położenie poprzeczne do linii sił (tzw. neutralne) porusza się tylko dzięki bezwładności. Moment obrotowy w tym położeniu znika, aby za chwilę po obróceniu się ramki o 90° stopni dojść do maksimum i tak na przemian. Taki „pulsujący" moment obrotowy stanowiłby poważną wadę silnika elektrycznego. W rzeczywistym silniku stosuje się więc szereg ramek, aby, gdy jedna z nich mija położenie neutralne, inne pracowały. Schematycznie budowę silnika przedstawia rys. 3.56. Ramki: *11, 22, 33, 44, I I, II II, III III* i *IV IV* są nawinięte na

walcu żelaznym umieszczonym na osi; jest to tzw. *twornik* silnika. Dzięki namagnesowaniu walca w szczelinach *A* i *B* (rys. 3.57), w których poruszają się przewodniki wraz z walcem, panuje daleko silniejsze pole, aniżeli bez walca. W rzeczywistości ramki *11, 22* itd. nie są to pojedyncze przewodniki, lecz są to zwojnice nawinięte w rowkach twornika, a każda zawiera kilkaset zwojów cienkiego izolowanego drutu. Końce drutów doprowadzone są do komutatora *K*, jak poucza rysunek. Na rysunku komutator złożony jest z ośmiu odizolowanych wycinków; w rzeczywistości bywa ich więcej. Prąd elektryczny dopływa przez lewą szczotkę do jednego z wycinków komutatora i tu rozdziela się na dwie części; jedna płynie zwojnicami *11, 22, 33* i *44*, a druga zwojnicami *I I, II II, III III* i *IV IV*. Wszystkie zwojnice poruszają się oczywiście w kierunku, w którym całkowity strumień magnetyczny przechodzący przez nie doznaje zwiększenia. Daje to w rezultacie obrotowy ruch twornika (na rysunku w lewo). Zauważyć należy, że tylko siły działające na druty leżące wzdłuż tworzącej walca wywołują moment obrotowy. Natomiast siły, które działają na druty leżące w płaszczyźnie obu podstaw twornika, do momentu obrotowego nic nie wnoszą (por. §§ 3.19 i 3.20). Dlatego druty idące wzdłuż tworzącej walca nazywamy *przewodnikami czynnymi*.

Dla zwiększenia mocy silnika zamiast magnesów stosuje się elektromagnesy. W tym celu część prądu odgałęzia się do zwojnic Z_1Z_2 nawiniętych na biegun elektromagnesu. Ta część silnika nosi nazwę *magneśnicy* lub *stojana*. W odróżnieniu od stojana twornik wraz z kolektorem nazywa się *wirnikiem*.

c) Moc silnika. Niech twornik ma n przewodników czynnych i obraca się N razy na sekundę. Φ niechaj oznacza strumień indukcji przechodzący przez przekrój osiowy twornika, czyli strumień wektora magnetycznego wychodzący z bieguna magneśnicy, a i — natężenie prądu wchodzącego do twornika. Podczas ćwierci obrotu, np. z pozycji *a* do *c* (rys. 3.55), strumień indukcji przechodzący przez każdy zwój zmienia się od 0 do Φ, a więc o Φ. Ponieważ natężenie prądu w tym zwoju wynosi tylko $\frac{1}{2}i$, przeto praca sił pola wykonana przez cały ten zwój jest równa według wzoru (3.21b) $\frac{1}{2}i\Phi$. Praca wykonana przez wszystkie przewodniki czynne wyniesie więc $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}ni\Phi$, gdyż zwojów oczywiście jest $\frac{1}{2}n$. W czasie całego obrotu praca jest czterokrotnie większa: $ni\Phi$, a w czasie jednej sekundy wyniesie $Nni\Phi$. Taka jest właśnie moc M' silnika:

$$\underset{(\mathrm{W})}{M'} = \underset{(\mathrm{s^{-1}})}{N}\ \underset{(\mathrm{A})}{n\ i}\ \underset{(\mathrm{Wb})}{\Phi} \tag{3.28}$$

d) Siła przeciwelektromotoryczna silnika. Już w § 1.31 mówiliśmy, że gdy silnik jest w ruchu, energia elektryczna Ui dostarczona silnikowi idzie nie tylko na wytworzenie mocy M', ale i na wydzielenie ciepła Joule'a Ri^2 (prąd pobierany przez magneśnicę pomijamy, gdyż jest zwykle słaby w stosunku do prądu pobieranego przez twornik). Wobec tego mamy [patrz wzór (1.25)]:

$$Ui = M' + Ri^2$$

albo

$$U - \frac{M'}{i} = Ri.$$

Widzimy, że $\frac{M'}{i}$ gra rolę napięcia przeciwstawiającego się napięciu U. Jest to znana nam już *siła przeciwelektromotoryczna* E' silnika w ruchu:

$$E' = \frac{M'}{i}.$$

Stąd i ze wzoru (3.28) otrzymujemy wyrażenie na siłę przeciwelektromotoryczną

$$\underset{(\mathrm{V})}{E'} = N \underset{(\mathrm{s}^{-1})}{n} \underset{(\mathrm{Wb})}{\Phi}. \tag{3.29}$$

Przykład liczbowy. Silnik, o którym mówiliśmy w § 1.31, charakteryzują następujące dane: ilość drutów czynnych twornika $n = 5000$; powierzchnia każdej ze zwojnic $S = 42{,}5\ \mathrm{cm}^2$; natężenie pola magnetycznego w szczelinie między twornikiem i biegunami $H = 2000$ Oe, ilość obrotów wirnika $N = 40\ \mathrm{s}^{-1}$; natężenie prądu pobieranego przez twornik $i = 1$ A. Obliczenie mocy:

$$M' = NniSH = 40\mathrm{s}^{-1}\cdot 5\cdot 10^3\cdot 1\ \mathrm{A}(42{,}5\cdot 2\cdot 10^3)\,\mathrm{Mx} = 2\cdot 10^5\ \mathrm{s}^{-1}\cdot\mathrm{A}\cdot 85\cdot 10^{-5}\ \mathrm{Wb} = 170\ \mathrm{W}.$$

Podobnie oblicza się siłę przeciwelektromotoryczną:

$$E' = NnSH = 2\cdot 10^5\ \mathrm{s}^{-1}\cdot 85\cdot 10^3\ \mathrm{Mx} = 2\cdot 10^5\ \mathrm{s}^{-1}\cdot 85\cdot 10^{-5}\ \mathrm{Wb} = 170\ \mathrm{V}.$$

Już w § 1.31, gdy zapoznaliśmy się z siłą przeciwelektromotoryczną, stanęliśmy wobec zjawiska dość tajemniczego. Jak wtedy, tak i obecnie, o sile przeciwelektromotorycznej wiemy tylko tyle, że istnieć musi, bo tego wymaga zasada zachowania energii [wzór (1.25)]. Dzięki tej zasadzie umiemy ją nawet obliczyć. Lecz nic więcej o niej nie wiemy. Pytamy więc, jakie czynniki ją wywołują, gdzie powstaje, jakie prawa elementarne nią rządzą (w prostszych warunkach niż w silniku)? Na pytania te odpowie nam doświadczenie. Zagadnieniu temu i jego konsekwencjom poświęcamy następny rozdział.

Zagadnienia do rozdziału 3

Do części A

*3.1. Bieguny północne trzech magnesów 1, 2 i 3 zbliżamy do siebie kolejno parami na odległość 8,0 cm i stwierdzamy, że odpychają się następującymi siłami: para 1 i 2 — siłą $F_{12} = 120$ dyn, para 2 i 3 — siłą $F_{23} = 130$ dyn, para 1 i 3 — siłą $F_{13} = 170$ dyn. Obliczyć masy magnetyczne m_1, m_2 i m_3 biegunów.

Odpowiedź. $m_1 = \frac{r}{F_{23}}\sqrt{F_{12}F_{23}F_{13}} = 100{,}2$ j. masy magnetycznej CGS,

$m_2 = \frac{r}{F_{13}}\sqrt{F_{12}F_{23}F_{13}} = 76{,}6$ j. masy magnetycznej CGS,

$m_3 = \frac{r}{F_{12}}\sqrt{F_{12}F_{23}F_{13}} = 108{,}6$ j. masy magnetycznej CGS.

*3.2. Jak stwierdzić, że dwa bieguny dwóch różnych magnesów są jednakowo „silne" (tzn. mają jednakowe masy magnetyczne)?

(Pomoc: zastosować trzeci magnes pomocniczy i wagę.)

*3.3. Przy pomocy wagi stwierdzono (rys. 3.2), że dwa jednakowo „silne" bieguny dwóch magnesów przyciągają się siłą $F = 1$ G, gdy ich odległość wynosi 6,0 cm. Ile wynosi masa magnetyczna m każdego z tych biegunów?

Odpowiedź. $m = r\sqrt{F} = 188$ j. masy magnetycznej CGS.

*3.4. Bieguny magnetyczne z poprzedniego zadania zbliżono teraz na odległość 3 cm. Siła przyciągania zamiast wzrosnąć do 4 G, jak każe prawo Coulomba, wzrosła wyraźnie więcej. Gdzie leży źródło tego pozornego „odstępstwa" od prawa Coulomba? Jak tego uniknąć?

(Uwzględnić indukcję magnetostatyczną; należy stosować duże odległości biegunów od siebie).

*3.5. Masy magnetyczne biegunów magnesu liniowego o długości $l = 10$ cm wynoszą: $+100$ j. masy magnetycznej i -100 j. masy magnetycznej CGS. Obliczyć natężenie pola magnetycznego H_1 i H_2 w następujących dwóch punktach na zewnątrz magnesu: 1) w punkcie leżącym na przedłużeniu osi magnesu, w odległości $r = 10$ cm od jednego z jego biegunów, 2) w punkcie leżącym w płaszczyźnie „równikowej", w odległości $r = 10$ cm od każdego z biegunów.

Odpowiedź. $H_1 = m\left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+l)^2}\right] = 0{,}75$ Oe; $H_2 = \frac{ml}{r^3} = 1$ Oe.

*3.6. Jakie natężenie ma pole magnetyczne w punkcie leżącym na przedłużeniu osi magnesu liniowego, w odległości $r = 10$ cm od jednego z biegunów, jeżeli: a) magnes jest niezmiernie długi (w stosunku do r), b) magnes ma długość $l = 20$ cm, c) magnes ma długość $l = 2$ cm. Masy magnetyczne wynoszą $m = \pm 100$ j. masy magnetycznej CGS.

Odpowiedź. $H = m\left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+l)^2}\right]$; $H_a = 1$ Oe; $H_b = 0{,}89$ Oe; $H_c = 0{,}3$ Oe.

*3.7. Znając składową poziomą h i inklinację I (patrz § 3.4), obliczyć natężenie pola magnetycznego ziemskiego H w Warszawie (dla roku 1958).

Odpowiedź. $H = \frac{h}{\cos I} = \frac{0{,}1825}{0{,}3762}$ Oe $= 0{,}485$ Oe.

*3.8. Obliczyć strumień indukcji magnetycznej Φ przechodzący przez powierzchnię ramki o wymiarach $a = 20$ cm i $b = 16$ cm, leżącej na stole (np. w Krakowie). Jak należy ustawić tę ramkę, aby strumień był 1) największy, 2) równał się zeru?

Odpowiedź. $\Phi = ab\mu h\,\mathrm{tg}\,I = 139{,}5\ \mathrm{Oe}\cdot\mathrm{cm}^2 = 139{,}5\ \mathrm{Mx} = 1{,}395\cdot 10^{-6}$ Wb; 1) prostopadle do H, 2) stycznie do H.

*3.9. Wyobraźmy sobie, że jeden z biegunów długiego magnesu liniowego o masie magnetycznej m umieszczamy w środku kuli, której promień r jest mały w stosunku do długości magnesu. Obliczyć strumień indukcji magnetycznej przechodzący przez tę powierzchnię (kawałka powierzchni, przez który przechodzi magnes, nie bierzemy pod uwagę).

Odpowiedź. Strumień indukcji przez powierzchnię kulistą w powietrzu, niezależnie od obranego przez nas układu jednostek, wyraża się wzorem

$$\Phi = B_0 S = B_0\cdot 4\pi r^2.$$

1) W układzie jednostek em CGS:

Siła Coulomba $F = \frac{1}{\mu}\frac{mm'}{r^2}$, gdzie μ jest przenikalnością magnetyczną ośrodka wypełniającego kulę, w tym przypadku powietrza.

Jeśli biegun umieszczony w środku kuli ma masę magnetyczną m, wówczas na powierzchni kuli panuje pole o natężeniu

$$H = \frac{F}{m'} = \frac{1}{\mu}\frac{m}{r^2}.$$

Ponieważ $B_0 = \mu H$, mamy więc:

$$\Phi = \mu H\cdot 4\pi r^2 = \frac{m}{r^2}4\pi r^2,$$

czyli

$$\Phi = 4\pi m\,. \tag{3.30}$$

Mówimy, że z bieguna magnetycznego o masie magnetycznej m wychodzi strumień indukcji magnetycznej $4\pi m$ (w jednostkach em CGS).

2) W układzie jednostek MKSA (czyli SI):

Siłę Coulomba wyrażamy analogicznie do wzoru (2.21), wyrażającego siłę, jaką działają na siebie dwa ładunki elektryczne:

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0\mu}\,\frac{mm'}{r^2},$$

(nie ustaliliśmy bowiem jeszcze jednostek masy magnetycznej w układzie MKSA, możemy zatem współczynnik obrać dowolnie). Stąd natężenie pola magnetycznego na powierzchni kuli:

$$H = \frac{F}{m'} = \frac{1}{4\pi\mu_0\mu}\,\frac{m}{r^2}\,.$$

Strumień indukcji magnetycznej przechodzący przez tę powierzchnię wyrazi się wzorem:

$$\Phi = BS = \mu_0\,\mu H\cdot 4\pi r^2 = \mu_0\mu\,\frac{1}{4\pi\,\mu_0\mu}\,\frac{m}{r^2}\cdot 4\pi r^2,$$

czyli

$$\Phi = m\,. \tag{3.31}$$

Mówimy, że z bieguna magnetycznego o masie magnetycznej m wychodzi strumień indukcji magnetycznej równy m (w jednostkach układu MKSA). Widzimy, że masa magnetyczna wyrażona w jednostkach układu MKSA równa jest strumieniowi indukcji magnetycznej. Zatem jednostką obu wielkości Φ i m jest znany nam już 1 weber (1 Wb). Twierdzenie wyrażone wzorami (3.30) i (3.31) można uogólnić na dowolne powierzchnie zamykające biegun magnetyczny. Jeśli powierzchnia zamyka cały magnes w jej wnętrzu umieszczony, a zatem oba bieguny $+m$ i $-m$, wówczas strumień indukcji przez nią przechodzący jest sumą dwóch strumieni pochodzących od biegunów $+m$ i $-m$; zatem

$$\Phi = 0\,. \tag{3.32}$$

Jeśli powierzchnia zamyka tylko biegun $+m$ magnesu, jak w naszym zagadnieniu, a więc przecina magnes, to na przeciętym końcu tworzy się drugi biegun $-m$ i całkowity strumień indukcji przez *całą* powierzchnię (nie wyłączając kawałka powierzchni, który przechodzi przez magnes) równy jest zeru. Widać stąd, że *strumień indukcji, który przechodzi przez wnętrze magnesu od S do N, wynosi* $4\pi m$ *w układzie CGS lub* m *w układzie MKSA.*

Do części B

***3.10.** Zwojnica kolista, o promieniu $r = 5$, zawiera $n = 500$ zwojów. Natężenie prądu $i = 0{,}1$ A. Obliczyć natężenie pola magnetycznego w środku zwojnicy.

Odpowiedź. $H = \dfrac{2\pi}{10}\,\dfrac{in}{r} = 6{,}28$ Oe.

***3.11.** Obliczyć natężenie pola magnetycznego w odległości $r = 1$ cm od bardzo długiego drutu, przez który płynie prąd $i = 10$ A.

Odpowiedź. W jednostkach em CGS, według wzoru (3.10), mamy $H = \dfrac{2\,i}{r} = 2$ Oe.

***3.12.** Dwa napowietrzne przewody sieci elektrycznej biegną równolegle; ich wzajemna odległość wynosi $d = 25$ cm. Znaleźć natężenie pola magnetycznego w środku między tymi drutami, jeśli prąd płynący przez nie ma natężenie $i = 125$ A $= 12{,}5$ j. em nat. prądu.

Odpowiedź. $H = \dfrac{8i}{d} = 4$ Oe.

***3.13.** Zwojnica kolista, o promieniu $r = 10$ cm i ilości zwojów $n = 20$, ustawiona jest w płaszczyźnie południka magnetycznego, a w środku zwojnicy umieszczono zwykły kompas (przyrząd powyższy — to „busola stycznych", patrz § 3.10). Przez zwojnicę puszczono prąd $i = 50$ mA, wskutek czego igła kompasu wychyliła się o $\alpha = 17{,}5°$. Co można wyznaczyć przy pomocy tego pomiaru?

Odpowiedź. Składową poziomą h; według § 3.10 $h = \dfrac{\pi i n}{5r\,\mathrm{tg}\,\alpha} = 0{,}20$ Oe; wartość i należy podstawić w amperach.

***3.14.** W doświadczeniu wyobrażonym na rys. 3.34 pręcik Δl nie porusza się po szynach idealnie, bez tarcia; przeciwnie, aby go poruszyć (pokonać tarcie statyczne), potrzeba przynajmniej siły 2 G. Jak silny prąd należy przez niego przepuścić, aby pręcik poruszył się? Natężenie pola magnetycznego w miejscu, gdzie się znajduje pręcik, wynosi $H = 100$ Oe; $\Delta l = 5$ cm; $\Delta F_t = 2$ G.

Odpowiedź. Wzór (3.16b) wyrażony w jednostkach em CGS dla próżni ($\mu = 1$) daje $i = \dfrac{\Delta F_t}{H\Delta l} = 39{,}2$A!

***3.15.** W powyższym doświadczeniu pręcik przesunął się o $s = 2$ cm i nie wyszedł jeszcze z obszaru jednorodnego pola. Jaką pracę wykonały siły pola, w założeniu, że tarcie cały czas wynosiło 2 G?

Odpowiedź. W jednostkach em CGS: $L = iH\Delta ls = 3920$ erg $= 4$ G·cm; jest to oczywiste, gdyż $L = F_s = 2\mathrm{G}\cdot 2$ cm $= 4\mathrm{G}\cdot$cm.

***3.16.** Powyższe doświadczenie trwało zaledwie 1 sekundę. Prąd czerpany był z przyłączonego przez opór akumulatora, o sile elektromotorycznej $E = 2$ V. Jaką pracę L_0 wykonał akumulator? Z jaką wydajnością $\eta = \dfrac{L}{L_0}$ pracował powyższy układ? Co się stało z pracą L_0 i z pracą L?

Odpowiedź. $L_0 = Eit = 784\cdot 10^6$ erg; $\eta = 5\cdot 10^{-6} = 0{,}005\%$!

***3.17.** Dwa proste przewodniki, bardzo długie i równoległe do siebie, znajdują się w odległości wzajemnej d. Przez jeden z nich płynie prąd o natężeniu i_1, a przez drugi — i_2 (w amperach). Wiemy z doświadczenia (patrz rys. 3.32), że przewodniki będą się przyciągały, jeśli prądy i_1 i i_2 mają ten sam kierunek lub będą się odpychały, jeśli prądy mają kierunki przeciwne. Obliczyć ogólnie siłę F, która działa na każdy cm przewodnika.

Odpowiedź. Ze wzoru (3.16b) dla $\mu = 1$ oraz wzoru (3.10) w jednostkach em CGS mamy $F = Hi_1 = \dfrac{2i_1\,i_2}{d}$.

Do części D

***3.18.** Silnik o mocy $M' = 200$ W pobiera pod pełnym obciążeniem prąd o natężeniu $i = 1{,}2$ A i wykonuje $N = 1800$ obrotów na minutę. Liczba drutów czynnych twornika wynosi $n = 4000$. Obliczyć strumień indukcji Φ przechodzący przez twornik.

Odpowiedź. $\Phi = \dfrac{M'}{Nni} = 1{,}39\cdot 10^{-3}$ Wb $= 1{,}39\cdot 10^5$ Mx.

***3.19.** Jakie natężenie ma pole magnetyczne w szczelinach między nabiegunnikami a twornikiem powyższego silnika, jeśli pole przekroju S strumienia magnetycznego wynosi około 60 cm².

Odpowiedź. $H = \dfrac{\Phi}{S} =$ około 2300 Oe.

3.20. Jaką siłę przeciwelektromotoryczną E' wytwarza ten silnik?

Odpowiedź. $E' = \dfrac{M'}{i} = 166{,}7$ V.

***3.21.** Twornik silnika elektrycznego ma długość $l = 25$ cm i promień $r = 12$ cm. Liczba przewodników czynnych wynosi $n = 240$. Pole magnetyczne w szczelinie ma natężenie $H = 6000$ Oe. Prąd w tworniku $i = 8$ A. Jaka siła F ciągnie pas przerzucony przez koło mające taki sam promień

co twornik, osadzone na osi twornika? Wykonać obliczenie przy założeniu, że pole między biegunami jest jednorodne.

Odpowiedź. $F = \frac{1}{10} Hiln = 9{,}17 \cdot 10^6$ dyn $= 9{,}35$ kG.

3.22. Obliczyć siłę przeciwelektromotoryczną E' i moc M' powyższego silnika, skoro wykonuje on 3000 obrotów na minutę.

Odpowiedź. $E' = 10^{-8} \cdot 2rlHNn = 432$ V; $M' = 10^{-8} \cdot 2\,rlHNni = 3{,}456$ kW = około 4,7 KM.

3.23. Silnik ten zasilany był z sieci o napięciu $U = 440$ V. Obliczyć opór R twornika.

Odpowiedź. $R = \frac{U-E'}{i} = 1\ \Omega$.

3.24. Czy byłoby bezpieczne silnik ten, gdy jest nieruchomy i obciążony, przyłączyć wprost do sieci? Jak zaradzić złym skutkom?

Odpowiedź. Niebezpieczne. Dołączyć szeregowo opornik, który stopniowo podczas rozruchu wyłączamy (por. § 4.19).

***3.25.** Przewodniki A i B idące od silnika elektrycznego (rys. 3.56) włączamy do przewodów sieci w ten sposób, że raz A dołączony jest do plusa, B do minusa, a drugi raz odwrotnie. Dlaczego przez przełączenie nie zmienił się kierunek obrotu wirnika? Co trzeba zrobić, aby kierunek obrotów zmienić?

3.26. Silnik o oporze $R = 25\ \Omega$ dołączony do sieci o napięciu $U = 220$ V pobiera prąd $i_0 = 0{,}8$ A, przy czym obraca się zupełnie swobodnie, bez obciążenia. Obliczyć moc M_0, która zamienia się w zwojach silnika na ciepło. Ile wynosi reszta mocy M_0' i co się z nią dzieje? Ile wynosi siła przeciwelektromotoryczna E_0' silnika?

Odpowiedź. $M_0 = Ri_0^2 = 16$ W; $M_0' = Ui_0 - Ri_0^2 = 160$ W; moc M_0' idzie na wykonanie pracy mechanicznej, a w tym wypadku na pokonanie tarcia, w rezultacie czego zamienia się w łożyskach na ciepło (inne straty por. § 4.17); $E_0' = U - Ri_0 = 200$ V.

3.27. Pod wpływem obciążenia prąd w powyższym silniku wzrasta do $i = 2$ A (przy tym samym napięciu). Ile wynosi obecnie moc M zamieniona w zwojach na ciepło? Ile wynosi reszta mocy M' i co się z nią dzieje? Jaka jest obecnie siła przeciwelektromotoryczna E' silnika? W jakim stosunku zmniejszyła się obecna liczba obrotów N do poprzedniej N_0?

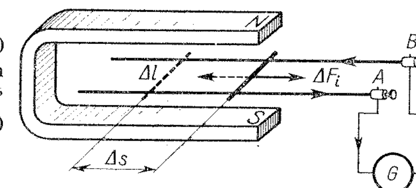
Odpowiedź. $M = Ri^2 = 100$ W; $M' = Ui - Ri^2 = 340$ W; moc M' idzie na wykonanie użytecznej pracy i częściowo na pokonanie tarcia w łożyskach; $E' = U - Ri = 170$ V; $\frac{N}{N_0} = \frac{E'}{E_0'} = 0{,}85$.

Rozdział 4

INDUKCJA ELEKTROMAGNETYCZNA, JEJ ZASTOSOWANIA I KONSEKWENCJE

A. O zjawisku indukcji elektromagnetycznej

***§ 4.1. Powstanie prądu indukcyjnego.** W doświadczeniu wyobrażonym na rys. 3.34 byliśmy świadkami następującego zjawiska: prąd elektryczny płynący przez przewodnik znajdujący się w polu magnetycznym wywołał ruch tego przewodnika. Zapytajmy, czy nie istnieje zjawisko odwrotne, mianowicie: czy ruch przewodnika w polu magnetycznym nie wywoła w nim prądu elektrycznego? Na to pytanie odpowiedzieć może tylko doświadczenie. Musi być ono odwróceniem doświadczenia z rys. 3.34 (lub 3.30), w którym zamiast źródła prądu włączymy do obwodu czuły galwanometr (rys. 4.1). I rzeczywiście,



Rys. 4.1. Ruch przewodnika (strzałka przerywana) w polu magnetycznym wywołuje powstanie w nim prądu elektrycznego. G — galwanometr o czułości 10^{-6} (tzn. wskazujący jeszcze prądy o natężeniu ok. 1 μA) i o stosunkowo niewielkim oporze własnym

doświadczenie nam odpowiada: każdy ruch przewodnika Δl wzdłuż drutów A i B wywołuje powstanie w obwodzie prądu, którego kierunek zależny jest od kierunku ruchu przewodnika. Prąd powstały w ten sposób nazywa się *prądem indukcyjnym*; zjawisko nosi nazwę zjawiska *indukcji elektromagnetycznej.*

Dzieje rozwoju nauki o elektryczności mówią, że nie od razu fizycy w ten sposób zrozumieli odwrócenie zjawisk elektromagnetycznych. Od roku 1820, tj. od odkrycia Oersteda i praw Ampère'a, fizycy wiedzieli, że prąd elektryczny wywołuje pole magnetyczne. Sądzono przeto błędnie, że i pole magnetyczne może wywołać prąd elektryczny. „Zamienić magnetyzm na elektryczność" — pisał w swoim dzienniku laboratoryjnym w r. 1822 genialny fizyk, Michał Faraday. Dziewięć lat poszukiwał nowego zjawiska nie zrażając się niepowodzeniami, aż w r. 1831 dokonał odkrycia indukcji elektromagnetycznej. W ciągu 10 dni Faraday zbadał gruntownie zjawisko i ustalił rządzące nim prawa (por. § 4.2. i dalsze).

***§ 4.2. Siła elektromotoryczna indukcji.** Przypuśćmy, że w doświadczeniu wyobrażonym na rys. 4.1 przewodnik Δl porusza się bez tarcia. Zatem przesunięcie przewodnika wzdłuż „szyn" A i B nie wymaga teoretycznie nakładu pracy. Ale skoro obwód $A\Delta lBG$ został zamknięty galwanometrem G, powstaje w nim prąd indukcyjny ilekroć przesu-

co twornik, osadzone na osi twornika? Wykonać obliczenie przy założeniu, że pole między biegunami jest jednorodne.

Odpowiedź. $F = \frac{1}{10} Hiln = 9{,}17 \cdot 10^6$ dyn $= 9{,}35$ kG.

3.22. Obliczyć siłę przeciwelektromotoryczną E' i moc M' powyższego silnika, skoro wykonuje on 3000 obrotów na minutę.

Odpowiedź. $E' = 10^{-8} \cdot 2rlHNn = 432$ V; $M' = 10^{-8} \cdot 2\,rlHNni = 3{,}456$ kW = około 4,7 KM.

3.23. Silnik ten zasilany był z sieci o napięciu $U = 440$ V. Obliczyć opór R twornika.

Odpowiedź. $R = \frac{U-E'}{i} = 1\ \Omega$.

3.24. Czy byłoby bezpieczne silnik ten, gdy jest nieruchomy i obciążony, przyłączyć wprost do sieci? Jak zaradzić złym skutkom?

Odpowiedź. Niebezpieczne. Dołączyć szeregowo opornik, który stopniowo podczas rozruchu wyłączamy (por. § 4.19).

***3.25.** Przewodniki A i B idące od silnika elektrycznego (rys. 3.56) włączamy do przewodów sieci w ten sposób, że raz A dołączony jest do plusa, B do minusa, a drugi raz odwrotnie. Dlaczego przez przełączenie nie zmienił się kierunek obrotu wirnika? Co trzeba zrobić, aby kierunek obrotów zmienić?

3.26. Silnik o oporze $R = 25\ \Omega$ dołączony do sieci o napięciu $U = 220$ V pobiera prąd $i_0 = 0{,}8$ A, przy czym obraca się zupełnie swobodnie, bez obciążenia. Obliczyć moc M_0, która zamienia się w zwojach silnika na ciepło. Ile wynosi reszta mocy M_0' i co się z nią dzieje? Ile wynosi siła przeciwelektromotoryczna E_0' silnika?

Odpowiedź. $M_0 = Ri_0^2 = 16$ W; $M_0' = Ui_0 - Ri_0^2 = 160$ W; moc M_0' idzie na wykonanie pracy mechanicznej, a w tym wypadku na pokonanie tarcia, w rezultacie czego zamienia się w łożyskach na ciepło (inne straty por. § 4.17); $E_0' = U - Ri_0 = 200$ V.

3.27. Pod wpływem obciążenia prąd w powyższym silniku wzrasta do $i = 2$ A (przy tym samym napięciu). Ile wynosi obecnie moc M zamieniona w zwojach na ciepło? Ile wynosi reszta mocy M' i co się z nią dzieje? Jaka jest obecnie siła przeciwelektromotoryczna E' silnika? W jakim stosunku zmniejszyła się obecna liczba obrotów N do poprzedniej N_0?

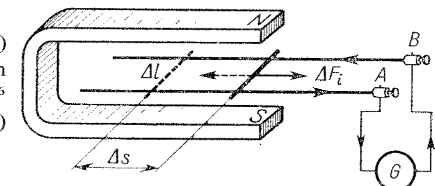
Odpowiedź. $M = Ri^2 = 100$ W; $M' = Ui - Ri^2 = 340$ W; moc M' idzie na wykonanie użytecznej pracy i częściowo na pokonanie tarcia w łożyskach; $E' = U - Ri = 170$ V; $\frac{N}{N_0} = \frac{E'}{E_0'} = 0{,}85$.

Rozdział 4

INDUKCJA ELEKTROMAGNETYCZNA, JEJ ZASTOSOWANIA I KONSEKWENCJE

A. O zjawisku indukcji elektromagnetycznej

***§ 4.1. Powstanie prądu indukcyjnego.** W doświadczeniu wyobrażonym na rys. 3.34 byliśmy świadkami następującego zjawiska: prąd elektryczny płynący przez przewodnik znajdujący się w polu magnetycznym wywołał ruch tego przewodnika. Zapytajmy, czy nie istnieje zjawisko odwrotne, mianowicie: czy ruch przewodnika w polu magnetycznym nie wywoła w nim prądu elektrycznego? Na to pytanie odpowiedzieć może tylko doświadczenie. Musi być ono odwróceniem doświadczenia z rys. 3.34 (lub 3.30), w którym zamiast źródła prądu włączymy do obwodu czuły galwanometr (rys. 4.1). I rzeczywiście,



Rys. 4.1. Ruch przewodnika (strzałka przerywana) w polu magnetycznym wywołuje powstanie w nim prądu elektrycznego. G — galwanometr o czułości 10^{-6} (tzn. wskazujący jeszcze prądy o natężeniu ok. 1 μA) i o stosunkowo niewielkim oporze własnym

doświadczenie nam odpowiada: każdy ruch przewodnika Δl wzdłuż drutów A i B wywołuje powstanie w obwodzie prądu, którego kierunek zależny jest od kierunku ruchu przewodnika. Prąd powstały w ten sposób nazywa się *prądem indukcyjnym*; zjawisko nosi nazwę zjawiska *indukcji elektromagnetycznej*.

Dzieje rozwoju nauki o elektryczności mówią, że nie od razu fizycy w ten sposób zrozumieli odwrócenie zjawisk elektromagnetycznych. Od roku 1820, tj. od odkrycia Oersteda i praw Ampère'a, fizycy wiedzieli, że prąd elektryczny wywołuje pole magnetyczne. Sądzono przeto błędnie, że i pole magnetyczne może wywołać prąd elektryczny. „Zamienić magnetyzm na elektryczność" — pisał w swoim dzienniku laboratoryjnym w r. 1822 genialny fizyk, Michał Faraday. Dziewięć lat poszukiwał nowego zjawiska nie zrażając się niepowodzeniami, aż w r. 1831 dokonał odkrycia indukcji elektromagnetycznej. W ciągu 10 dni Faraday zbadał gruntownie zjawisko i ustalił rządzące nim prawa (por. § 4.2. i dalsze).

***§ 4.2. Siła elektromotoryczna indukcji.** Przypuśćmy, że w doświadczeniu wyobrażonym na rys. 4.1 przewodnik Δl porusza się bez tarcia. Zatem przesunięcie przewodnika wzdłuż „szyn" A i B nie wymaga teoretycznie, nakładu pracy. Ale skoro obwód $A\Delta lBG$ został zamknięty galwanometrem G, powstaje w nim prąd indukcyjny ilekroć przesu-

niemy przewodnik Δl wzdłuż szyn. Kosztem czego powstaje energia tego prądu? Na to daje nam odpowiedź zasada zachowania energii: energia prądu indukcyjnego powstaje albo kosztem zmniejszenia się energii układu, albo kosztem wykonanej z zewnątrz pracy. Faktem jest jednak, że przesunięcie przewodnika nie zmieniło wcale energii układu; pozostaje zatem alternatywa druga: prąd indukcyjny powstaje kosztem wykonanej z zewnątrz pracy. Skoro przesuwając przewodnik Δl wykonaliśmy pracę, musieliśmy ją wykonać przeciwko jakiejś sile działającej na przewodnik. Nietrudno odnaleźć źródło tej siły: jest to siła elektrodynamiczna ΔF_i, działająca na przewodnik, przez który płynie prąd indukcyjny. Możemy wyciągnąć stąd wniosek taki, że *prąd indukcyjny wzbudza się w takim kierunku, że powstałe siły elektrodynamiczne sprzeciwiają się ruchowi, który go wywołał.* Tego wymaga zasada zachowania energii. Powyższa reguła nosi nazwę *reguły kierunkowej Lenza.*

Z §§ 3.22 i 3.23 wiemy, że praca sił elektrodynamicznych przesuwających przewodnik Δl wzdłuż drogi s wyraża się wzorem (3.21):

$$L = i\Delta\Phi,$$

w którym wszystkie wielkości mogą być wyrażone albo w układzie em CGS, albo w układzie MKSA. Ale wywołując prąd indukcyjny, wykonujemy pracę przeciwko siłom elektrodynamicznym; umawiamy się pracy tej nadawać znak przeciwny: $-i\Delta\Phi$. Zamienia się ona na energię prądu indukcyjnego, która rozprasza się w całym obwodzie i wynosi: $Ei\Delta t$ (por. § 1.30), gdzie E jest siłą elektromotoryczną indukcji, czynną w obwodzie. Zatem

$$Ei\Delta t = -i\Delta\Phi;$$

stąd

$$E = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \tag{4.1}$$

$$\text{(j.em nap. CGS)}\frac{\text{(Mx)}}{\text{(s)}}$$

$$\text{(V)}\frac{\text{(Wb)}}{\text{(s)}}$$

I w tym wzorze wszystkie wielkości mogą być wyrażone albo w jednostkach em CGS, albo w jednostkach praktycznych MKSA. Zostało to zaznaczone pod wzorem.

Siła elektromotoryczna indukcji równa się liczbowo szybkości $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, *z jaką zmienia się strumień indukcji magnetycznej, przechodzący przez dany obwód.*

Gdybyśmy chcieli E wyrazić w woltach, zaś $\Delta\Phi$ w jednostkach em CGS, czyli w makswelach (Mx), wówczas po prawej stronie pojawi się współczynnik 10^{-8}, ponieważ $1\text{ V} = 10^8$ j. em napięcia:

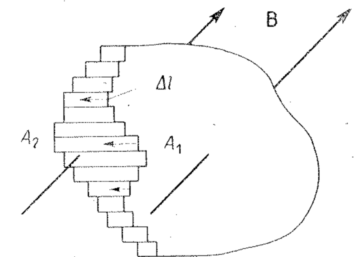
$$E = -10^{-8}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \tag{4.1a}$$

$$\text{(V)} \qquad \left(\frac{\text{Mx}}{\text{s}}\right)$$

Znak minus w powyższych wzorach oznacza, że kierunek siły elektromotorycznej, a więc i prądu indukcyjnego, jest taki, że praca sił elektrodynamicznych jest ujemna, tzn., że

została wykonana przez siłę zewnętrzną przeciwko siłom elektrodynamicznym hamującym ruch. Oczywiście jest wszystko jedno, czy to będzie ruch przewodnika w polu magnetycznym, czy ruch pola magnetycznego (magnesu, solenoidu itp.) w stosunku do nieruchomego przewodnika.

Prawo indukcji elektromagnetycznej wyprowadziliśmy z zasady zachowania energii dla pewnego szczególnego wypadku, mianowicie gdy przewodnik Δl (rys. 4.1) będący częścią obwodu porusza się w poprzek linii sił. Nietrudno jednak wykazać, że prawo to stosuje się również do dowolnego ruchu



Rys. 4.2. Przemieszczenie przewodnika od A_1 do A_2, traktowane jako przemieszczenie bardzo wielu elementów Δl tego przewodnika

jakiegokolwiek przewodnika. Weźmy na razie wypadek nie najogólniejszy. Niech np. wiotki przewodnik (rys. 4.2), będący częścią jakiegoś obwodu, przesunie się z położenia A_1 do położenia A_2 nie wychodząc z płaszczyzny rysunku, prostopadłej do wektora magnetycznego B. Wówczas można sobie zawsze wyobrazić przesunięcie przewodnika $A_1 \to A_2$ jako składające się z wielkiej liczby przesunięć elementów Δl przewodnika, do których stosuje się prawo indukcji (4.1). *Prawo indukcji stosuje się więc do wszystkich przesunięć razem wziętych, z tym, że E oznacza całkowitą siłę elektromotoryczną wywołaną we wszystkich elementach Δl obwodu, a $\Delta\Phi$ oznacza całkowitą zmianę strumienia indukcji magnetycznej spowodowaną przesunięciem wszystkich elementów obwodu.* Niech teraz w ogólnym wypadku początkowe i końcowe położenia przewodnika nie leżą w płaszczyźnie rysunku i niech A_1 i A_2 oznaczają rzuty przewodnika w obu położeniach na płaszczyznę rysunku. Zauważymy, że przesunięcie elementów Δl wzdłuż kierunku rzutowania (więc wzdłuż wektora B) nie daje żadnej zmiany strumienia magnetycznego, nie wnosi zatem nic do siły elektromotorycznej indukcji; czynne jest jedynie przesunięcie od A_1 do A_2. A więc i do tego wypadku stosuje się wyżej wypowiedziane prawo indukcji.

Powszechnie znane są doświadczenia polegające na wywoływaniu prądu indukcyjnego w cewce, do której zbliżamy magnes, solenoid z prądem czy elektromagnes; opisywać więc ich tu bliżej nie będziemy, jedynie objaśniamy przy pomocy rysunków 4.3a—d.

Jeżeli prąd indukcyjny wywołujemy nie w pojedynczym zwoju drutu, lecz w solenoidzie, który wprowadzamy do pola magnetycznego H, to w *każdym* zwoju tego solenoidu powstaje siła elektromotoryczna indukcji $E' = -\frac{\Delta\Phi'}{\Delta t}$, gdzie $\Delta\Phi' = B_n S$ (B_n — składowa normalna wektora B, tzn. prostopadła do płaszczyzny zwoju, S — jego powierzchnia). Ponieważ wszystkie zwoje solenoidu połączone są ze sobą (oczywiście) szeregowo, przeto w całym solenoidzie czynna będzie siła elektromotoryczna $E = nE'$ (n — ilość zwojów), czyli

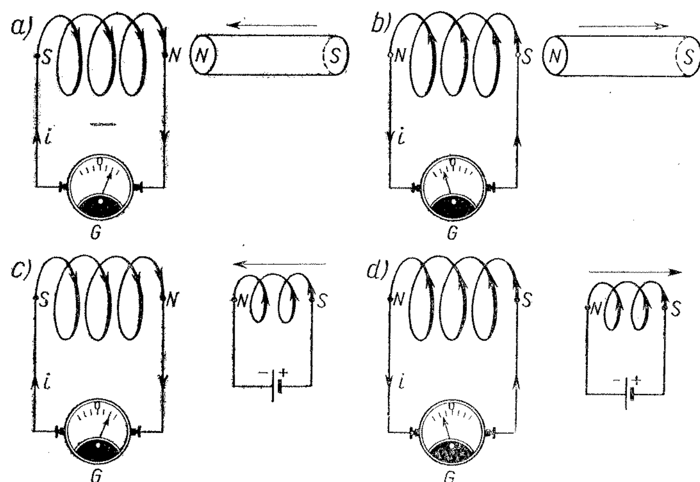
$$E = -\frac{B_n Sn}{\Delta t}.$$

Oznaczywszy $B_n Sn$ przez $\Delta\Phi$ otrzymujemy dawną postać prawa indukcji

$$E = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Pamiętać jednak musimy, że zmiana strumienia $\Delta\Phi$ obliczona być musi dla wszystkich n zwojów, mianowicie

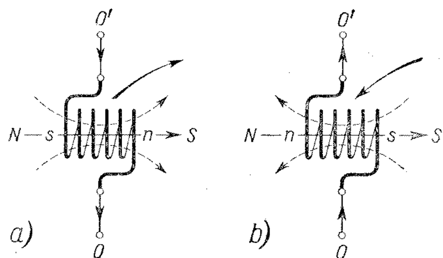
$$\Delta\Phi = B_n S n. \tag{4.2}$$



Rys. 4.3. Cztery przypadki wywołania prądu indukcyjnego w cewce: a) zbliżamy lub wsuwamy do niej magnes sztabkowy, b) wysuwamy lub oddalamy magnes, c) zbliżamy lub wsuwamy małą cewkę, przez którą płynie prąd z akumulatora, d) wysuwamy lub oddalamy cewkę; zjawisko przebiega znacznie silniej, jeżeli w małej cewce umieścić rdzeń żelazny (por. § 4.7)

Ilustracją tego niech będzie następujący przykład. Cewka (rys. 4.4a) umieszczona jest osią swoją wzdłuż wektora H. Strumień magnetyczny Φ przechodzący przez nią jest

$$\Phi = BSn$$



Rys. 4.4. a) Prąd indukcyjny w cewce, która: albo została usunięta z pola, albo zostaje obrócona z położenia wskazanego na rysunku, albo znajduje się w polu magnetycznym słabnącym. b) Prąd indukcyjny w cewce, która: albo zostaje wprowadzona do pola, albo zostaje obrócona do położenia wskazanego na rysunku, albo znajduje się w polu magnetycznym, którego natężenie rośnie

(oznaczenia — jak wyżej). Gdy ją usuniemy poza obszar pola lub gdy ją obrócimy o kąt prosty około osi OO', to w obu tych wypadkach strumień magnetyczny znika. W pierwszym bowiem przypadku $H = B = 0$, a w drugim $H_n = B_n = 0$ (H będzie styczne do płaszczyzny zwojów). W obu tych wypadkach zmiana strumienia magnetycznego jest ta sama i wynosi

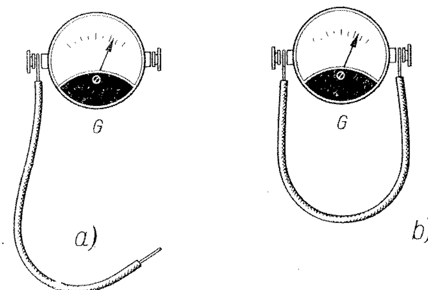
$$\Delta\Phi = BSn.$$

Widzimy, że takie obrócenie solenoidu, które strumień indukcji magnetycznej zmniejsza do zera (wypadek *a*), równoważne jest usunięciu tego solenoidu z obszaru pola. Podobnie wykonanie obrotu powrotnego (wypadek *b*, rys. 4.4b) równoważne będzie sprowadzeniu solenoidu z powrotem do pola. W obu wypadkach *a* i *b* kierunek prądu indukcyjnego wskaże reguła Lenza: prąd indukcyjny w cewce musi wytworzyć takie bieguny, aby ruch wywołujący ten prąd doznał przeciwdziałania (patrz rys. 4.4).

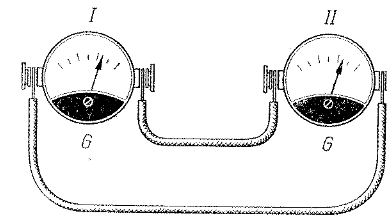
Zarówno wypadek *a* (zaniknięcie strumienia), jak i wypadek *b* (wywołanie strumienia) zrealizować można jeszcze innym sposobem bez poruszania jakichkolwiek części układu. Po prostu można pole H unicestwić (równoważne wypadkowi *a*)) lub wzbudzić (równoważne wypadkowi *b*)), np. za pomocą elektromagnesu, między biegunami którego znajduje się solenoid. Stosowanie reguły Lenza, która przecież mówi o przeciwdziałaniu ruchowi, byłoby tu niewskazane. Ale na podstawie powyższych równoważności nietrudno dostrzec następującą prawidłowość (patrz rys. 4.4a i b), którą sformułujemy tak: *prąd indukcyjny ma kierunek taki, że jego własny strumień indukcji magnetycznej przeciwdziała zmianie strumienia, która prąd indukcyjny wywołała.* Jest to reguła kierunkowa Lenza w najogólniejszej postaci.

***4.3. Kilka przykładów hamowania elektromagnetycznego.** Z reguły kierunkowej Lenza lub raczej z zasady zachowania energii wynika, że ruch wywołujący prąd indukcyjny musi być hamowany siłami elektrodynamicznymi. Oto parę przykładów.

1. Galwanometr z ruchomą cewką poruszamy nagłym ruchem. Pod wpływem tego poruszenia wskazówka przyrządu zaczyna się wahać i po pewnym czasie wskutek tarcia uspokaja się. Jeżeli zaciski galwanometru spiąć drutem (rys. 4.5), wskazówka uspokaja



Rys. 4.5. a) Wskazówka galwanometru waha się dość swobodnie. b) Ruch wskazówki jest silnie tłumiony



Rys. 4.6. Ruch wskazówki jednego galwanometru wywołuje ruch wskazówki drugiego galwanometru

się momentalnie. Powód tego zjawiska jest jasny. Siła elektromotoryczna indukcji — w pierwszym wypadku — nie daje prądu, ponieważ obwód jest otwarty; siły elektrodynamiczne nie występują. Natomiast w drugim wypadku — siła elektromotoryczna indukcji wywołuje prąd elektryczny, ponieważ obwód jest zamknięty; występują siły elektrodynamiczne, hamujące ruch. Owo hamowanie wahań wskazówki stanowi oczywistą zaletę przyrządu pomiarowego.

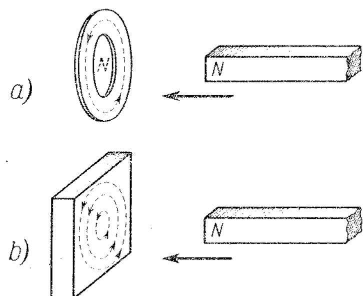
2. Że w tym drugim wypadku hamowanie jest wywołane istnieniem prądu indukcyjnego, przekonamy się łatwo włączając do obwodu naszego galwanometru drugi gal-

wanometr lub miliamperomierz (rys. 4.6). Każdemu ruchowi wskazówki galwanometru *I* towarzyszy ruch wskazówki galwanometru *II* i odwrotnie; dowodzi to istnienia prądu indukcyjnego. Widzimy, że występowanie hamowania elektromagnetycznego jest dostatecznym dowodem istnienia prądu.

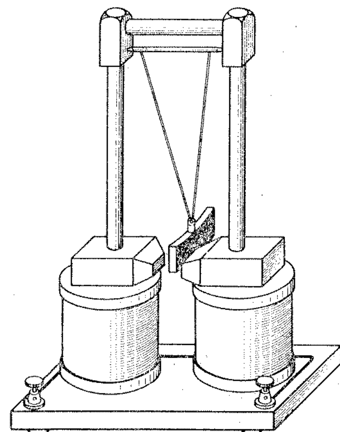
3. W poprzednim doświadczeniu galwanometr *I* nie wypełniał swojej normalnej funkcji reagowania ruchem cewki na prąd, lecz pełnił funkcję odwrotną: reagował prądem na ruch cewki; odgrywał rolę miniaturowej prądnicy. Jest chyba rzeczą zupełnie zrozumiałą, że i silnik elektryczny można zmusić do spełnienia takiej odwrotnej funkcji. Połączmy wał silnika pasem lub rzemieniem z kołem ręcznej wirówki i za jej pomocą szybko obracajmy wirnik. Z chwilą gdy zaciski silnika zepniemy drutem, uczujemy silny opór — to siły elektrodynamiczne hamują ruch wirnika. Hamowanie to jest tym gwałtowniejsze, im mniejszym oporem zamkniemy obwód oraz im szybciej obracał się silnik, ponieważ zarówno przy mniejszym oporze, jak i przy szybszych obrotach wytwarza się silniejszy prąd indukcyjny. Ten system hamowania stosowany bywa obok innych systemów w tramwajach i lokomotywach elektrycznych.

*§ **4.4. Prądy wirowe Foucaulta.** Jeżeli do pierścienia metalowego zbliżyć biegun magnesu, to w pierścieniu powstanie prąd indukcyjny (rys. 4.7a). Przypuśćmy, że pierścień ten wypełniony został wewnątrz metalem, tak że zamienił się właściwie na krążek. Nie ma żadnego powodu przypuszczać, aby i teraz nie wytwarzały się w nim prądy indukcyjne jak poprzednio. Istnienie tych prądów objawi się działaniem sił elektrodynamicznych hamujących ruch, który je wywołuje. Że prądy te powstają nie tylko w krążkach, ale i w dowolnych bryłach metalowych (rys. 4.7b), pouczają poniższe doświadczenia.

1. Blok miedziany waha się między biegunami elektromagnesu (rys. 4.8). Dopóki pole nie jest wzbudzone, blok waha się swobodnie. Z chwilą puszczenia prądu przez zwoje elektromagnesu ruch wahadłowy metalu zostaje natychmiast stłumiony i wahadło zatrzymuje się. Interesujące jest, że jeśli blok zostanie nadpiłowany w kilku miejscach tak, aby utworzyły się liczne szczeliny, to hamowanie jego będzie bez porównania słabsze.



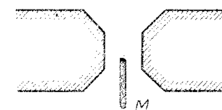
Rys. 4.7. Prądy Foucaulta powstają zgodnie z prawem indukcji elektromagnetycznej i z regułą Lenza



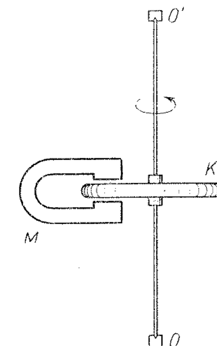
Rys. 4.8. Prądy Foucaulta hamują ruch wahadłowy bloku miedzianego

Pochodzi to stąd, że szczeliny przeszkadzają wytwarzaniu się prądów indukcyjnych w całej masie metalu; wytwarzają się one tylko w tych częściach bloku, które są zwarte.

2. Srebrną monetę umieszczamy między biegunami silnego elektromagnesu wzbudzonego. Stwierdzamy przede wszystkim, że bieguny nie przyciągają monety. Z chwilą jednak, gdy usiłujemy usunąć monetę z pola, odczuwamy opór. Jeśli monetę trzymaną między biegunami puścimy swobodnie, będzie ona spadała powoli, jak gdyby znajdowała się w lepkiej cieczy (rys. 4.9). Dopiero gdy opuści obszar niejednorodnego pola magnetycznego, spadnie normalnie.



Rys. 4.9. Srebrna moneta *M* lub krążek aluminiowy umieszczony między biegunami elektromagnesu spada bardzo powoli (prądy Foucaulta)



Rys. 4.10. Prądy Foucaulta hamują ruch obrotowy krążka aluminiowego

3. Krążek metalowy *K* (najlepiej aluminiowy) zawieszamy na cienkim drucie, jak wskazuje rys. 4.10. Krążek ten może wykonywać wahania obrotowe dookoła osi *OO'*. Wahania te zostaną stłumione, gdy część krążka umieścimy w silnym polu magnesu lub elektromagnesu *M* (rys. 4.10). Ten sposób hamowania ruchu obrotowego stosują często konstruktorzy w aparatach elektrycznych pomiarowych.

Doświadczenia powyższe dostatecznie przekonują o istnieniu prądów indukowanych w masach metalu. Prądy te nazywano *prądami wirowymi*, ponieważ elektrony poruszają się w masie metalu po torach wirowych zamkniętych; na cześć jednego z ich odkrywców nazywają je również *prądami Foucaulta.*

Zrozumiałą jest rzeczą, że wytwarzanie się prądów Foucaulta jako wymagające znacznego nakładu pracy jest w wielu urządzeniach elektrycznych objawem nader szkodliwym, zwłaszcza że praca prądów Foucaulta idzie wyłącznie na wytwarzanie ciepła, a więc na szkodliwe ogrzewanie różnych części urządzenia. Doskonałe np. warunki do wytwarzania prądów Foucaulta istniałyby w wirniku silnika elektrycznego, który wiruje w bardzo silnym polu magneśnicy. Aby zapobiec powstawaniu prądów Foucaulta i, co za tym idzie, stratom energii i nadmiernemu rozgrzewaniu się silnika, wirnik buduje się nie z jednolitego żelaza, lecz z cienkich blach żelaznych poprzekładanych warstwą izolacyjną, co utrudnia w bardzo znacznym stopniu powstawanie prądów wirowych.

§ **4.5. Ładunek elektryczny indukowany elektromagnetycznie.** Z prawa indukcji (4.1) wynika, że siła elektromotoryczna indukcji nie zależy zupełnie od tego, w jakim materiale

indukujemy prąd elektryczny: wszystko jedno, czy to będzie drut miedziany, konstantanowy, czy rurka z wodą. Od oporu R użytego przewodnika zależeć będzie jedynie natężenie prądu indukowanego i, ponieważ

$$i = \frac{E}{R}.$$

W czasie Δt, w ciągu którego zmienia się strumień magnetyczny o $\Delta\Phi$, przepłynie przez przewodnik ładunek elektryczny $\Delta e = i\Delta t$. Zatem

$$\Delta e = \frac{E}{R}\Delta t.$$

Podstawiając w tym równaniu wartość E ze wzoru (4.1) otrzymujemy

$$\Delta e = -\frac{1}{R}\Delta\Phi. \qquad (4.3)$$

(C) (Ω^{-1}) (Wb)

Wzór ten mówi, że *ładunek elektryczny wytworzony w zjawisku indukcji elektromagnetycznej jest wprost proporcjonalny do całkowitej zmiany strumienia indukcji magnetycznej $\Delta\Phi$, natomiast nie zależy od czasu, w ciągu którego zmieniał się strumień.*

Ta interesująca właściwość indukcji znajduje zastosowanie do mierzenia natężenia pola magnetycznego H. Małą cewkę („sondę") umieszczamy w badanym polu; usunięcie tej cewki poza obszar pola wywoła przepłynięcie ładunku elektrycznego Δe, który nie zależy zupełnie od tego, czy cewkę usuwamy szybko, czy powoli. Mierzymy ładunek Δe (patrz niżej), a znając opór obwodu R obliczamy $\Delta\Phi$ z równania (4.3). Dalej, znając pole przekroju cewki S i ilość zwojów n obliczamy B, a stąd poszukiwane H. Jest to metoda o bardzo doniosłym znaczeniu, gdyż pozwala np. zmierzyć natężenie pola magnetycznego w szczelinie wewnątrz żelaza, o czym mówiliśmy w § 3.27.

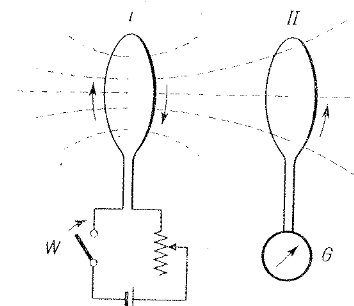
Do pomiaru ładunku elektrycznego Δe można by zastosować metodę całkowania graficznego, którą poznaliśmy w § 1.46. Jest to jednak metoda bardzo kłopotliwa. Wspomnimy tylko, że istnieją metody bez porównania prostsze i dokładniejsze, np. metoda galwanometru balistycznego. Polega ona na tym, że mierzony ładunek elektryczny przepuszcza się przez galwanometr różniący się od zwykłego galwanometru zwierciadłowego tym, że jego ruchoma cewka obciążona jest dość dużą masą, co powiększa bardzo moment bezwładności cewki i wahania jej czyni bardzo powolnymi. Pod wpływem impulsu prądu (it) cewka wychyla się, po czym wraca do dawnego położenia. Niezwykle interesującą właściwością tego galwanometru jest to, że największe wychylenie cewki jest proporcjonalne do ładunku, jaki przez nią przepłynął, i że z tego wychylenia łatwo można ładunek obliczyć.

*§ **4.6. Indukcja wzajemna.** Niech w pobliżu obwodu I (rys. 4.11) zasilanego prądem z baterii znajduje się obwód II zawierający galwanometr. Zakładamy, że w otoczeniu obu obwodów nie ma ciał ferromagnetycznych. Obwód I (pierwotny) wytwarza strumień indukcji magnetycznej; część tego strumienia, Φ_2, przechodzi przez obwód II (wtórny). Ponieważ natężenie pola magnetycznego wytworzonego przez obwód pierwotny jest wprost proporcjonalne do natężenia prądu i_1, płynącego w tym obwodzie (wynika

to z prawa Biota i Savarta), przeto strumień Φ_2 przechodzący przez obwód wtórny jest również proporcjonalny do i_1. Wyrazimy to pisząc

$$\Phi_2 = Mi_1, \qquad (4.4)$$

gdzie M jest współczynnikiem proporcjonalności. M jest tym większe, im większa część strumienia indukcji obwodu pierwotnego przechodzi przez obwód wtórny; zależy więc



Rys. 4.11. Indukcja wzajemna. Kierunki strzałek odnoszą się do chwili włączenia prądu w obwodzie pierwotnym (I)

od odległości i położenia obwodów. Wszelka zmiana natężenia prądu i_1, np. o Δi_1, pociąga za sobą zmianę strumienia Φ_2 o $\Delta\Phi_2 = M\Delta i_1$. Ta znów zmiana wywołuje, w myśl prawa indukcji, prąd indukcyjny w obwodzie wtórnym. Jego siła elektromotoryczna będzie

$$E_2 = -\frac{\Delta\Phi_2}{\Delta t},$$

czyli

$$E_2 = -M\frac{\Delta i_1}{\Delta t}. \qquad (4.5)$$

Siła elektromotoryczna indukowana w obwodzie wtórnym jest wprost proporcjonalna do szybkości zmiany natężenia prądu w obwodzie pierwotnym. Współczynnik proporcjonalności M nosi nazwę *współczynnika indukcji wzajemnej*; nazywają go również *indukcyjnością wzajemną*. Miarą jego jest, jak widać z równania (4.5), wielkość siły elektromotorycznej indukowanej w obwodzie wtórnym, gdy prąd w obwodzie pierwotnym zmienia swoje natężenie o jednostkę w ciągu jednostki czasu.

Wzór (4.5) pozwoli nam ustalić również jednostkę współczynnika indukcji wzajemnej M. Mianowicie, współczynnik indukcji wzajemnej będzie równał się 1 jednostce elektromagnetycznej, jeżeli zmiana natężenia prądu o jednostkę elektromagnetyczną (10 A) w ciągu 1 sekundy spowoduje powstanie w obwodzie wtórnym siły elektromotorycznej równej 1 jednostce elektromagnetycznej (10^{-8} wolta). Jednostka ta nosi nazwę jednostki elektromagnetycznej indukcji wzajemnej albo 1 centymetra, ze względów podobnych jak w wypadku jednostki elektrostatycznej pojemności [por. przykład 1 § 2.39 oraz wzór (4.10) § 4.9]. Jak na wielkości stosowane w praktyce, 1 cm jest jednostką bardzo małą. Toteż częściej stosuje się jednostkę układu praktycznego, 1 henr (1 H), okreś-

loną w następujący sposób: *Współczynnik indukcji wzajemnej wynosi 1 henr wtedy, jeśli zmiana natężenia prądu w obwodzie pierwotnym o 1 amper w ciągu 1 sekundy wywoła w obwodzie wtórnym siłę elektromotoryczną 1 wolta*:

$$1 \text{ henr} = \frac{1 \text{ wolt}}{1 \text{ amper}/1 \text{ sekunda}},$$

czyli

$$1 \text{ H} = \frac{1 \text{ V}}{1 \text{ A/s}} = \frac{1 \text{ V}\cdot\text{s}}{1 \text{ A}} = \frac{1 \text{ Wb}}{1 \text{ A}}.$$

Z porównania obu definicji: 1 henra i 1 cm wynika od razu, że

$$1 \text{ H} = \frac{10^8 \text{ j. em napięcia}}{{}^1/_{10}\,\dfrac{\text{j. em natężenia prądu}}{\text{s}}} = 10^9 \text{ cm}.$$

Przypuśćmy, że obwody I i II są to dwie zwojnice zawierające odpowiednio n_1 i n_2 zwojów. Mogą to być cewki oddzielne albo też nawinięte na wspólnej szpuli. Współczynnik indukcji wzajemnej M takiego układu jest tym większy, im większy jest strumień indukcji Φ_2 przechodzący przez cewkę wtórną przy danym prądzie i_1 w cewce pierwotnej. Φ_2 jest proporcjonalne do natężenia pola magnetycznego wytwarzanego przez cewkę pierwotną, to zaś jest znów proporcjonalne do liczby zwojów n_1 tej cewki (wynika to z prawa Biota i Savarta); zatem $\Phi_2 \sim n_1$. Z drugiej strony strumień Φ_2 oblicza się według wzoru (4.2), który mówi, że Φ_2 jest także proporcjonalny do liczby zwojów n_2 cewki wtórnej, przez którą przechodzi; zatem $\Phi_2 \sim n_1 n_2$. Wobec tego

$$M \sim n_1 n_2.$$

Współczynnik indukcji wzajemnej dwóch cewek jest wprost proporcjonalny do liczby zwojów tych cewek. Poza tym zależy od położenia i odległości tych cewek, a więc od czysto geometrycznych cech układu. Obliczenie współczynnika M dla układu dwóch zwojnic przy pomocy danych geometrycznych jest rzeczą bardzo trudną, często niemożliwą. Wyznaczenie współczynnika indukcji wzajemnej opierać się wtedy musi na doświadczeniu. Por. zagadnienie 4.11.

***§ 4.7. Wpływ rdzenia żelaznego na zjawisko indukcji.** Niech obwód pierwotny I wytwarza strumień indukcji magnetycznej w powietrzu (rys. 4.12a). Jeśli obwód wtórny II umieścimy w tak „niekorzystnym" położeniu, jak to występuje na rys. 4.12a, to przejdzie przezeń tylko bardzo nieznaczna część strumienia indukcji magnetycznej wytworzonego przez obwód I. Ta część strumienia wyrazi się wzorem:

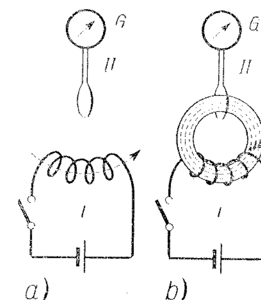
$$\Phi_2 = B_2 S = \mu_0 H_2 S,$$

gdzie μ_0 oznacza przenikalność magnetyczną powietrza, H_2 — natężenie pola magnetycznego w miejscu, gdzie znajduje się obwód wtórny, S — pole obwodu wtórnego. Galwanometr G musi być bardzo czuły, aby wskazał istnienie prądu indukcyjnego w obwodzie wtórnym. Inaczej rzecz się będzie miała, jeśli przez wnętrza obu obwodów przechodzić będzie zamknięty pierścień żelazny (rys. 4.12b). Wówczas prąd indukcyjny w obwodzie wtórnym będzie tysiące razy silniejszy; oczywiście powstawać on będzie tylko w chwilach włączania i wyłączania prądu w cewce pierwotnej. Doświadczenie to potwierdza, że w tym wypadku prąd w obwodzie wtórnym indukowany jest przez silny *strumień indukcji magnetycznej w żelazie.*

Strumień indukcji w rdzeniu żelaznym wynosi

$$\Phi_2 = BS = \mu_0 \mu H_1 S,$$

gdzie μ oznacza przenikalność magnetyczną żelaza dla danego pola H_1 (por. tabl. 3.2), H_1 jest natężeniem pola wewnątrz cewki pierwotnej w przypadku, gdyby w niej nie było rdzenia, zaś S — polem przekroju poprzecznego rdzenia.

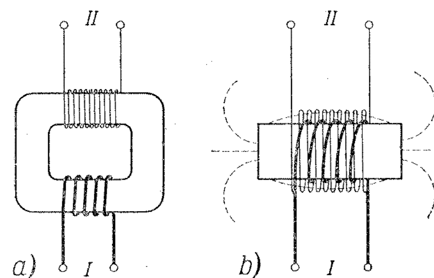


Rys. 4.12. Rdzeń żelazny ma podwójny wpływ na zjawisko indukcji: zwiększa strumień magnetyczny wytwarzany przez obwód pierwotny (I) i sprawia, że przechodzi on całkowicie przez obwód wtórny (II)

Widzimy, że w zjawisku indukcji wzajemnej rdzeń żelazny jest podwójnie korzystny. Po pierwsze, jego przenikalność magnetyczna $\mu \gg 1$ (znów por. tabl. 3.2), po drugie, pole H_1 wytworzone wewnątrz cewki pierwotnej jest znacznie silniejsze, aniżeli pole H_2 panujące z dala od niej. Bowiem przez zamknięty rdzeń żelazny strumień indukcji magnetycznej przechodzi prawie bez strat (bez rozproszeń na zewnątrz), podczas gdy wytworzony w cewce bez rdzenia rozprasza się na całą przestrzeń.

Fakt powyższy pozwala nam wprowadzić ogromne ułatwienie do metody mierzenia indukcji magnetycznej B wewnątrz żelaza. Zamiast umieszczać cewkę („sondę" por. §§ 3.27 i 4.5) w szczelinie „nieskończenie" wąskiej, zrobionej w żelazie, możemy zwojami jej opasać rdzeń żelazny bez żadnej szczeliny i wykonać pomiar, jak to opisaliśmy w § 4.5, co pozwoli obliczyć Φ_2 i B.

W procesie wyobrażonym na rys. 4.12b powstaje w obwodzie wtórnym mimo żelaznego rdzenia stosunkowo słaba siła elektromotoryczna jak na praktyczne stosunki. Powiększymy ją znacznie stosując obwód wtórny złożony nie z jednego, lecz z wielu zwojów.



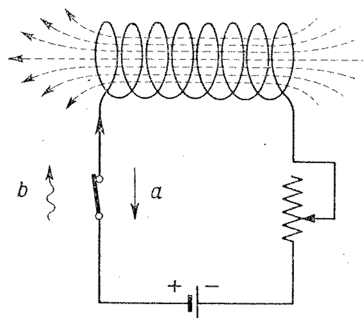
Rys. 4.13. Transformator z rdzeniem a) zamkniętym i b) otwartym

W ten sposób powstanie przyrząd zwany *transformatorem* (rys. 4.13a). Każdemu włączeniu czy wyłączeniu prądu w obwodzie pierwotnym towarzyszyć będzie powstanie krótkotrwałego prądu indukowanego w obwodzie wtórnym. Prąd ten nie tylko wychyli ampero-

mierz, ale może wywołać rozbłyski żarówki (doświadczenie!). Transformatory tego typu z rdzeniem zamkniętym mają ogromne zastosowanie w technice przetwarzania (transformowania) prądów przemiennych, tj. takich prądów, które sto razy na sekundę zmieniają swój kierunek, przechodząc przez zero; będzie o tym mowa w części C tego rozdziału. Rysunek 4.13b przedstawia inny typ transformatora z tzw. rdzeniem otwartym.

W stosunku do poprzedniego ma on jedną zaletę i jedną wadę. Mianowicie, pole wytworzone przez oba końce rdzenia działa na niego rozmagnesowująco; w tym przypadku jest to zaleta, gdyż po przerwaniu prądu pierwotnego szybciej znika strumień magnetyczny. Wadą jego jest natomiast to, że część strumienia magnetycznego wychodzącego z biegunów przechodzi przez zwoje wtórne (w powietrzu) w przeciwnym kierunku aniżeli strumień indukcji w rdzeniu. Tym sposobem zmniejsza się nieco współczynnik indukcji wzajemnej.

*§ **4.8. Indukcja własna.** Połączmy solenoid przez opornicę ze źródłem prądu, jak wskazuje rys. 4.14. Przez solenoid przechodzi oczywiście strumień indukcji magnetycznej Φ wytwarzany przez prąd i, płynący w tym solenoidzie.



Rys. 4.14. Kierunek siły elektromagnetycznej i prądu indukcji własnej w przypadku a) wzmacniania prądu pierwotnego, b) osłabiania prądu pierwotnego

a) Powiększajmy natężenie prądu przesuwając suwak opornicy. Wzrasta wówczas strumień magnetyczny w solenoidzie. Według prawa indukcji musi powstać w solenoidzie siła elektromotoryczna, a więc i prąd: kierunek jego będzie taki, aby zmniejszyć strumień magnetyczny w solenoidzie. Wobec tego prąd indukcyjny powstanie w kierunku przeciwnym niż prąd i, płynący ze źródła prądu. Widzimy, że siła elektromotoryczna indukcji przeciwstawiła się wzrastaniu prądu i z baterii.

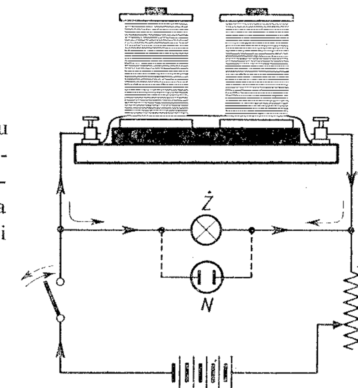
b) Przesuwając suwak opornicy w przeciwną stronę zmniejszamy natężenie prądu. Zmniejsza się wówczas strumień magnetyczny w solenoidzie. Wywołuje to powstanie siły elektromotorycznej w solenoidzie, a co za tym idzie, i prądu; kierunek jego będzie taki, aby przeciwstawić się *zmianie* strumienia magnetycznego, czyli aby strumień ten zwiększyć. Wobec tego kierunek prądu indukcyjnego będzie zgodny z kierunkiem prądu i, płynącego z baterii. Widzimy, że siła elektromotoryczna indukcji przeciwstawia się zmniejszaniu natężenia prądu i z baterii.

W obu powyższych procesach a) i b) wystąpiła siła elektromotoryczna indukcji, wywołana w solenoidzie zmianą jego własnego strumienia magnetycznego. Zjawisko to, będące szczególnym wypadkiem zjawiska indukcji, nosi nazwę *indukcji własnej*.

W powyższych procesach indukcja własna wystąpi w silniejszym stopniu, jeśli zamiast wzmacniania i osłabiania prądu będziemy go włączali i przerywali. Oto doświad-

czenie, w którym siła elektromotoryczna indukcji własnej objawia się w sposób bardzo przekonywający.

Jako solenoidu użyjmy elektromagnesu (rys. 4.15) zasilanego poprzez opornicę z baterii akumulatorów o napięciu około 8 woltów. Elektromagnes w tym doświadczeniu ma znaczną przewagę w stosunku do solenoidu, gdyż w solenoidzie bez rdzenia zmiany natężenia prądu wywołują stosunkowo słabe zmiany strumienia indukcji magnetycznej,



Rys. 4.15. Prąd indukcji własnej powstający przy włączaniu (↑) i wyłączaniu (↑) prądu w obwodzie powoduje rozbłyskiwanie żarówki lub lampki neonowej. Strzałki na przewodnikach oznaczają kierunek prądu z baterii. Opornik odgrywa w tym doświadczeniu dużą rolę; sprawia, że prąd indukcji własnej przepływa głównie przez lampkę

podczas gdy te same zmiany natężenia prądu w elektromagnesie wywołują w jego rdzeniu olbrzymie zmiany strumienia indukcji. Równolegle do zwojów elektromagnesu włączona jest żarówka Ż (na napięcie około 4 V). Opornikiem regulujemy prąd w elektromagnesie, a zatem i napięcie na jego zaciskach tak, aby żarówka prawie nie świeciła. Przy wyłączaniu i włączaniu prądu, a nawet przy zmienianiu natężenia prądu opornikiem, spostrzegamy nagłe, silne rozbłyski żarówki, które świadczą o powstawaniu prądu indukcji własnej.

Jeszcze efektowniej wypadnie to doświadczenie, jeśli zamiast żarówki zastosujemy lampkę neonową N. Przekonajmy się przede wszystkim, że lampka neonowa nie zaświeca się z baterii kilkuwoltowej; świeci dopiero przy napięciu około 100 woltów. Nic dziwnego zatem, że gdy przez elektromagnes płynie prąd z kilkuwoltowej baterii, lampka nie świeci. Ale przy włączaniu i wyłączaniu prądu lampka zaświeca się. Dowodzi to, jak wielka jest siła elektromotoryczna indukcji własnej. Zauważmy jeszcze, że podczas włączania prądu neon w lampce świeci przy innej elektrodzie aniżeli podczas wyłączania prądu. Jest to dowodem, że siła elektromotoryczna indukcji własnej w obu tych wypadkach ma przeciwne kierunki, jak to już wcześniej przewidzieliśmy.

*§ **4.9. Współczynnik indukcji własnej.** Niech przez solenoid bez rdzenia płynie prąd i. Strumień magnetyczny Φ przechodzący przez ten solenoid jest wprost proporcjonalny do natężenia prądu i, co wynika z prawa Biota i Savarta. Możemy więc napisać

$$\Phi = Li, \tag{4.6}$$

gdzie L jest współczynnikiem proporcjonalności zależnym tylko od cech geometrycznych danego solenoidu: liczby, wielkości i wzajemnego położenia zwojów, ich kształtu itp.

Jeśli natężenie prądu zmienimy o Δi, wywoła to zmianę strumienia indukcji o $\Delta\Phi = L\Delta i$. Ta ostatnia zmiana w myśl prawa indukcji wywoła w solenoidzie siłę elektromotoryczną $E = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, czyli

$$E = -L\frac{\Delta i}{\Delta t}. \tag{4.7}$$

Wzór ten *pokazuje, że siła elektromotoryczna indukcji własnej powstająca w zwojach drutu jest wprost proporcjonalna do szybkości, z jaką zmienia się natężenie prądu w tych zwojach.* Współczynnik proporcjonalności L nosi nazwę *współczynnika indukcji własnej* albo *indukcyjności własnej.* Jest on tym większy, im obwód zawiera więcej zwojów (ponieważ $L = \frac{\Phi}{i}$, a Φ rośnie wraz z liczbą zwojów) oraz im bardziej zwoje te są stłoczone — wtedy bowiem strumień wytworzony przez jeden zwój przechodzi niemal w całości przez inne zwoje. Oczywiście dla pojedynczego zwoju współczynnik indukcji własnej jest bardzo mały, ale nawet dla małego kawałka drutu nie będzie zerem; albowiem nawet w najmniejszym odcinku przewodnika, gdy znajdzie się on w zmieniającym się polu magnetycznym, indukuje się siła elektromotoryczna.

Z porównania wzorów (4.4) i (4.6) oraz (4.5) i (4.7) widać, że współczynnik indukcji własnej L mierzy się tymi samymi jednostkami co i współczynnik indukcji wzajemnej M. A zatem jednostkami L są: 1 cm w układzie elektromagnetycznym i 1 henr w układzie praktycznym. Przypominamy tu definicję tych jednostek w zastosowaniu do indukcji własnej: *współczynnik indukcji własnej jakiegoś obwodu wynosi* 1 cm (1 henr), *jeśli zmiana natężenia prądu o* 1 *jednostkę elektromagnetyczną natężenia prądu* (1 amper) *w ciągu* 1 sekundy *wywoła w tym obwodzie siłę elektromotoryczną równą* 1 *jednostce elektromagnetycznej napięcia* (1 woltowi).

Ponieważ ze wzoru (4.7) wartość bezwzględna L wyraża się wzorem

$$|L| = \frac{E}{\Delta i/\Delta t},$$

przeto wyżej zdefiniowane jednostki współczynnika L można wyrazić symbolicznie tak

$$1\ \text{cm} = \frac{\text{j.em napięcia}}{\text{j.em natężenia prądu/s}},$$

$$1\ \text{henr} = \frac{1\ \text{V}}{1\ \text{A/s}}.$$

Już w § 4.6 pokazaliśmy, że 1 henr $= 10^9$ cm.

W s p ó ł c z y n n i k i n d u k c j i w ł a s n e j s o l e n o i d u. Dla przykładu obliczmy L dla solenoidu bez rdzenia o długości l i liczbie zwojów n. Wzór (3.12) w § 3.18 wyznacza natężenie pola magnetycznego H wewnątrz solenoidu:

$$H = \frac{ni}{l}$$

(wszystkie wielkości w jednostkach MKSA). Jeśli promień zwojów solenoidu jest r, to pole powierzchni wszystkich zwojów wynosi

$$S = \pi r^2 n,$$

zatem strumień indukcji magnetycznej przechodzący przez wszystkie zwoje jest

$$\Phi = \mu_0 HS = \mu_0\frac{\pi n^2 r^2 i}{l}.$$

A ponieważ według definicji

$$L = \frac{\Phi}{i},$$

przeto

$$L = \mu_0 \frac{\pi n^2 r^2}{l}. \tag{4.8}$$

$$(\text{H}) \quad \left(\frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{A}\cdot\text{m}}\right) \quad \frac{(\text{m}^2)}{(\text{m})}$$

Pod wzorem wypisane są jednostki w układzie zracjonalizowanym MKSA, czyli w układzie SI. Przypomnijmy raz jeszcze, że w tym układzie przenikalność magnetyczna próżni μ_0 wynosi (według § 3.25):

$$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{A}\cdot\text{m}}.$$

Liczbę tę należy podstawić do wzoru (4.8), aby otrzymać wynik w henrach, bowiem 1 H $=$ V·s/A, a zatem

$$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\frac{\text{H}}{\text{m}}. \tag{4.9}$$

Od razu widzimy, że jednostki wypisane pod prawą stroną wzoru (4.8) dadzą się formalnie skrócić przez m², w rezultacie otrzymujemy V·s/A, czyli henry, zgodnie z lewą stroną.

Gdybyśmy chcieli wzór (4.8) wyrazić w jednostkach układu CGS, tzn. podstawiwszy r i l w centymetrach otrzymać L w centymetrach (patrz § 4.6), musielibyśmy zastosować zupełnie inną wartość μ_0 wynikłą z zastosowania jednostek układu em CGS, mianowicie

$$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\frac{\text{H}}{\text{m}} = 4\pi\cdot 10^{-7}\frac{10^9\ \text{cm}}{100\ \text{cm}} = 4\pi,$$

a więc wartość bezwymiarową. Wówczas wzór wyrażający L w jednostkach em CGS będzie miał postać

$$L = \frac{4\pi^2 n^2 r^2}{l}. \tag{4.10}$$

$$(\text{cm}) \quad \frac{(\text{cm}^2)}{(\text{cm})}$$

Widzimy, że w układzie jednostek em CGS indukcyjność L solenoidu wyraża się za pomocą wielkości czysto geometrycznych (r, l) i wypada ostatecznie w centymetrach.

Przykład liczbowy: solenoid ma długość $l = 10$ cm, promień $r = 1$ cm, liczba zwojów $n = 100$; z powyższego wzoru otrzymujemy: $L = 39{,}5 \cdot 10^3$ cm $= 3{,}95 \cdot 10^{-5}$ henrów.

Inaczej rzecz się będzie miała, jeśli do solenoidu wprowadzimy rdzeń żelazny. Wówczas siłę elektromotoryczną indukować będzie strumień indukcji magnetycznej $\Phi = BS$, μ razy większy od strumienia indukcji magnetycznej $\mu_0 HS$. Stąd wynika, że na L otrzymamy teraz wartość μ razy większą:

$$L = \frac{\mu_0 \mu \pi n^2 r^2}{l}, \tag{4.11a}$$

(jednostki układu MKSA zracjonalizowanego)

albo

$$L = \frac{4\pi^2 \mu n^2 r^2}{l}. \tag{4.11b}$$

(jednostki układu em CGS)

A więc wprowadzenie rdzenia żelaznego do solenoidu lub do jakiej bądź cewki zwiększa współczynnik indukcji własnej setki i tysiące razy.

Podkreślić musimy, że o ile dla cewki bez rdzenia współczynnik indukcji własnej jest wielkością stałą, niezależną od natężenia prądu, to dla cewki z rdzeniem żelaznym współczynnik L przestaje być stały: zależy od natężenia prądu i. A to dlatego, że przenikalność magnetyczna μ żelaza zależy w silnym stopniu od natężenia pola magnetycznego H, magnesującego w cewce żelazo (por. tabl. 3.2 § 3.28), a H jest proporcjonalne do i.

***§ 4.10. Energia pola magnetycznego.** Z § 2.46, 2.47 dowiedzieliśmy się, że energia pola elektrycznego naładowanego kondensatora wyraża się wzorem

$$E'_e = \tfrac{1}{2} CU^2 \tag{4.12}$$

i że jest rozmieszczona w przestrzeni zajmowanej przez pole elektryczne z gęstością

$$\varrho_e = \frac{E'_e}{V} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} E^2, \tag{4.13}$$

gdzie przenikalność dielektryczna próżni (patrz § 2.34):

$$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \frac{\text{F}}{\text{m}}$$

($c = 3 \cdot 10^8$ jest prędkością światła w m/s), jeśli stosujemy jednostki zracjonalizowanego układu MKSA, czyli SI, wyrażając E w V/m oraz ϱ_e — w dżulach na m³. Jeśli natomiast chcemy zastosować układ jednostek es CGS, wówczas na ε_0 należy przyjąć inną wartość, wynikłą z zastosowania jednostek tego układu, mianowicie:

$$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \frac{\text{F}}{\text{m}} = \frac{10^7}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^{16}} \frac{9 \cdot 10^{11}\ \text{cm}}{100\ \text{cm}} = \frac{1}{4\pi}.$$

W tym przypadku mamy

$$\varrho_e = \frac{\varepsilon}{8\pi} E^2, \tag{4.14}$$

gdzie E wyraża się w jednostkach elektrostatycznych natężenia pola oraz ϱ_e — w ergach na cm³.

Obecnie zajmiemy się analogicznym zagadnieniem dla pola magnetycznego i obliczymy energię E pola magnetycznego wypełniającego solenoid, przez który płynie prąd elektryczny.

Energia pola magnetycznego wewnątrz solenoidu objawia się w zjawisku indukcji własnej. Mianowicie, jeśli przerwać prąd w solenoidzie, jego pole magnetyczne zniknie, zniknie więc energia tego pola, a na jej miejsce powstanie praca siły elektromotorycznej indukowanej w solenoidzie. Wielkość tej pracy jest miarą wartości energii pola magnetycznego. Na tej podstawie nietrudno energię tę obliczyć. Oto prosty rachunek.

Przypuśćmy, że czas wyłączenia prądu, tzn. czas, w ciągu którego natężenie prądu spada od wartości i do 0, wynosi t (może to być czas długi, a może wynosić ułamek sekundy). W ciągu tego czasu w solenoidzie indukuje się siła elektromotoryczna indukcji własnej, której wartość w każdej chwili tego procesu wynosi

$$E = -L \frac{\Delta i}{\Delta t},$$

gdzie Δt oznacza drobną część całego czasu t. W czasie Δt praca $\Delta L'$ siły elektromotorycznej indukowanej w solenoidzie wynosi

$$\Delta L' = Ei\Delta t = -L \frac{\Delta i}{\Delta t} i \Delta t = -Li\Delta i,$$

gdyż Ei jest mocą prądu elektrycznego, jaka wydziela się w całym obwodzie (patrz § 1.30). Praca całkowita L' wykonana przez siłę elektromotoryczną indukowaną w czasie trwania całego procesu znikania pola magnetycznego równać się będzie sumie prac $\Delta L'$ wykonanych, gdy prąd w solenoidzie spada od wartości i do 0. Symbolicznie możemy to zapisać tak:

$$L' = \sum_i^0 \Delta L'.$$

Gdy liczba okresów Δt, na które dzielimy czas t, dąży do nieskończoności, tzn. gdy $\Delta t \to 0$, wówczas dążą do zera zarówno Δi, jak i $\Delta L'$. W tym wypadku suma powyższa dąży do wartości, którą nazywa się całką określoną:

$$L' = \int_i^0 dL'.$$

Korzystając ze wzoru na $\Delta L'$

$$L' = -L \int_i^0 i\,di.$$

Według najprostszych reguł rachunku całkowego $\int_i^0 i\,di = -\frac{i^2}{2}$, zatem praca pola magnetycznego $L' = \frac{1}{2}Li^2$. Tyle samo wynosi energia E'_m pola magnetycznego wytworzonego przez solenoid, w którym płynie prąd i:

$$E'_m = \frac{1}{2} Li^2 . \qquad (4.15)$$

Do tego samego wzoru można dojść bez stosowania rachunku całkowego, jeśli przyjąć, że prąd spada proporcjonalnie w czasie od i do 0; wtedy średnia wartość natężenia prądu wynosi $\frac{1}{2}i$. Siła elektromotoryczna indukowana w solenoidzie $E = -L\frac{\Delta i}{\Delta t} = -L\frac{0-i}{t} = L\frac{i}{t}$, gdyż przyrost Δi otrzymuje się przez odjęcie od wartości końcowej prądu (0) wartości początkowej (i); w tym wypadku przyrost natężenia prądu $\Delta i < 0$, co odpowiada słabnięciu prądu. Praca siły elektromotorycznej $L\frac{i}{t}$ i prądu $\frac{1}{2}i$ wynosi $L\frac{i}{t}\cdot\frac{1}{2}i\cdot t = \frac{1}{2}Li^2$. A zatem na energię pola magnetycznego solenoidu otrzymujemy ten sam wzór co poprzednio.

Aby obliczyć energię pola magnetycznego E'_m przy pomocy wielkości charakteryzujących samo pole, a więc np. przy pomocy wektora H, nie zaś przy pomocy wielkości charakteryzujących solenoid, który to pole wytwarza (L, i), postąpimy w sposób następujący. Niech pole magnetyczne wytwarzane jest w długim i cienkim solenoidzie. Według wzoru (3.12) § 3.18 natężenie pola magnetycznego we wnętrzu solenoidu jest wszędzie jednakowe i wynosi

$$H = \frac{ni}{l},$$

(jednostki układu MKSA zracjonalizowanego)

stąd

$$i = \frac{Hl}{n}.$$

Z drugiej strony współczynnik indukcji własnej tego solenoidu wyraża wzór (4.11a):

$$L = \frac{\mu_0\mu\pi n^2 r^2}{l}.$$

Przyjmując, że przenikalność magnetyczna ośrodka wypełniającego solenoid jest stała, możemy obydwa ostatnie wzory podstawić do wzoru (4.15), wyrażającego energię E'_m:

$$E'_m = \frac{1}{2}\,\frac{\mu_0\mu\pi n^2 r^2}{l}\left(\frac{Hl}{n}\right)^2 = \frac{\mu_0\mu H^2}{2}\pi r^2 l.$$

Ale $\pi r^2 l$ równe jest objętości solenoidu V. Jeśli wyobrazimy sobie, że solenoid ten (długi i cienki) został zwinięty w koło tak, iż oba jego bieguny stykają się, wówczas nie wytwarzają na zewnątrz solenoidu pola magnetycznego rozproszonego; całe pole wytworzone

przez solenoid zajmuje objętość solenoidu, wyrażenie $\pi r^2 l$ jest wtedy objętością V zajmowaną przez pole magnetyczne. Na energię pola magnetycznego otrzymujemy wyrażenie

$$E'_m = \frac{\mu_0\mu}{2}H^2 V.$$

Zatem energia pola magnetycznego rozmieszczona jest w przestrzeni z gęstością

$$\varrho_m = \frac{E'}{V} = \frac{\mu_0\mu}{2}H^2 . \qquad (4.16)$$

(jednostki układu MKSA zracjonalizowanego)

Wyrażenie to analogiczne jest do wzoru (4.13) wyrażającego gęstość energii elektrycznej.

Aby otrzymać wyrażenie ϱ_m w jednostkach układu em CGS, należy uwzględnić nie tylko, że μ_0 ma inną wartość, ale również, że H w układzie em CGS wyraża się odmiennym wzorem, aniżeli w układzie zracjonalizowanym MKSA. Zamiast więc wzoru (3.12) zastosujemy wzór (3.12a):

$$H = \frac{4\pi ni}{l},$$

(jednostki układu em CGS)

stąd

$$i = \frac{Hl}{4\pi n}.$$

Współczynnik indukcji własnej tego solenoidu wyraża wzór (4.11b):

$$L = \frac{4\pi^2 \mu n^2 r^2}{l}.$$

Powyższe wzory na i oraz L możemy podstawić do wzoru (4.15) wyrażającego E'_m. Otrzymamy

$$E'_m = \frac{1}{2}\,\frac{4\pi^2\mu n^2 r^2}{l}\,\frac{H^2 l^2}{16\pi^2 n^2} = \frac{\mu H^2}{8\pi}(\pi r^2 l),$$

czyli

$$E'_m = \frac{\mu}{8\pi}H^2 V.$$

Stąd wyrażenie na gęstość energii magnetycznej będzie miało postać:

$$\varrho_m = \frac{E'_m}{V} = \frac{\mu}{8\pi}H^2 . \qquad (4.17)$$

(jednostki układu em CGS)

Jest to wzór analogiczny do wzoru (4.14), wyrażającego gęstość energii elektrycznej ϱ_e w jednostkach es CGS.

§ 4.11. Zestawienie jednostek układu elektromagnetycznego CGS i praktycznego zracjonalizowanego MKSA, czyli SI. Jednostki obu tych układów zawiera tablica 4.1 na str. 246 i 247. Wszystkie wielkości fizyczne wymienione w tej tablicy można mierzyć jednostkami obu tych układów. Ale nie wszystkie jednostki układu praktycznego przy-

Tablica 4.1

Zestawienie jednostek zasadniczych układu praktycznego MKSA i elektromagnetycznego CGS

Wielkość fizyczna	Układ zracjonalizowany MKSA (SI)		Układ elektromagnetyczny CGS		1 jednostka MKSA (SI) ma jednostek em CGS
	wzór	określenie jednostki	wzór	określenie jednostki	
1	2	3	4	5	6
Siła	$F = ma$	$1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg} \cdot 1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$	$F = ma$	$1\ \mathrm{dyn} = 1\ \mathrm{g} \cdot 1\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}$	10^5
Praca, energia	$L = F \cdot s$	$1\mathrm{J} = 1\ \mathrm{N} \cdot 1\ \mathrm{m}$	$L = Fs$	$1\ \mathrm{erg} = 1\ \mathrm{dyn} \cdot 1\ \mathrm{cm}$	10^7
Moc	$M = L/t$	$1\mathrm{W} = 1\mathrm{J}/1\mathrm{s}$	$M = L/t$	1 erg/s	10^7
Natężenie prądu elektrycznego i	—	1A = 1/10 j. em nat. pr.	$F = ki^2$ (§ 4.12)	1 j. em nat. pr. = $\sqrt{\mathrm{dyn}}$	10^{-1}
Ładunek elektryczny e	$e = it$	$1\mathrm{C} = 1\mathrm{A} \cdot 1\mathrm{s}$	$e = it$	1j. em ładunku = 1j. em nat. pr.·1s	10^{-1}
Napięcie, potencjał U	$U = \frac{M}{i}$	$1\mathrm{V} = \frac{1\mathrm{W}}{1\mathrm{A}}$	$U = \frac{M}{i}$	1 j. em nap. = $\frac{\text{1 erg/s}}{\text{1 j. em nat. pr.}}$	10^8
Pojemność elektryczna C	$C = \frac{e}{U}$	$1\mathrm{F} = \frac{1\mathrm{C}}{1\mathrm{V}}$	$C = \frac{e}{U}$	1 j. em poj. = $\frac{\text{1 j. em ład.}}{\text{1j. em nap.}}$	10^{-9}
Opór elektryczny R	$R = \frac{U}{i}$	$1\Omega = \frac{1\mathrm{V}}{1\mathrm{A}}$	$R = \frac{U}{i}$	1 j. em oporu = $\frac{\text{1 j. em nap.}}{\text{1 j. em nat. pr.}}$	10^9
Indukcyjność L, M (własna lub wzajemna)	$E = -L\frac{di}{dt}$ $L = -\frac{E}{di/dt}$	$1\mathrm{H} = \frac{1\mathrm{V} \cdot 1\mathrm{s}}{1\mathrm{A}}$	$E = -L\frac{di}{dt}$ $L = -\frac{E}{di/dt}$	1 j. em indukcji = $\frac{\text{1 j. em nap.} \cdot \text{1 s}}{\text{1 j. em nat. pr.}}$ = 1 cm	10^9
Strumień indukcji magnetycznej Φ	Praca $L = i\Delta\Phi$ $\Delta\Phi = \frac{L}{i}$	$1\mathrm{Wb} = 1\mathrm{V} \cdot \mathrm{s} = \frac{1\mathrm{J}}{1\mathrm{A}}$	Praca $L = i\Delta\Phi$ $\Delta\Phi = \frac{L}{i}$	1 Mx = $\frac{\text{1 erg}}{\text{1 j. em nat. pr.}}$	10^8
Indukcja magnetyczna B	$\Phi = BS$ $B = \frac{\Phi}{S}$	$1\ \frac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{s}}{\mathrm{m}^2} = 1\ \frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m}^2}$	$\Phi = BS$ $B = \Phi/S$	1 Gs = $\frac{\text{1 Mx}}{\text{1 cm}^2}$	10^4
Natężenie pola magnetycznego H	Prawo Ampère'a $\oint H_s d_s = i$ Pole wokół nieogr. długiego przew. z prądem: $H = \frac{i}{2\pi r}$	$\frac{1\mathrm{A}}{1\mathrm{m}}$ Dla $i = 1\mathrm{A}$, $r = 1\mathrm{m}$: $H = \frac{1}{2\pi}\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$	Prawo Biota i Savarta: $\Delta H = \frac{i\Delta l}{r^2} \cdot \sin\alpha$ Pole wokół nieogr. długiego przew. z prądem: $H = \frac{2i}{r}$	1 Oe = $\frac{\text{1 j. em nat. pr.}}{\text{1 cm}}$ Dla i = 1j. em nat. pr., r = 1 cm H = 2 Oe	$4\pi \cdot 10^{-3}$
Przenikalność magnetyczna próżni μ_0	$B = \mu_0 H$ $\mu_0 = \frac{B}{H}$	1 j. przenikalności magnetycznej próżni = $\frac{1\ \mathrm{V} \cdot \mathrm{s}}{\mathrm{m}^2} : 1\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} = 1\ \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$	$B = \mu_0 H$ $\mu_0 = \frac{B}{H}$	$\mu_0 = \frac{1\ \mathrm{Gs}}{1\ \mathrm{Oe}} = 1$	$\frac{10^7}{4\pi}$ (dlatego w ukł. MKSA zracjonalizowanym $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$, patrz § 3.25)
Masa magnetyczna m	$F = \frac{1}{4\pi\mu_0}\ \frac{m^2}{r^2}$, $m = 4\pi r\sqrt{10^{-7} F}$	Gdy $r = 1\mathrm{m}$ i $F = 1\mathrm{N}$, 1 j. masy magn. = $= 4\pi \cdot 1\ \mathrm{m}\sqrt{10^{-7}\ \mathrm{N}}$ — w praktyce nie używana, bez nazwy.	$F = \frac{1}{\mu_0}\ \frac{m^2}{r^2}$ $m = r\sqrt{\mu_0 F}$	1 j. em masy magn. = 1 cm $\sqrt{\mathrm{dyn}}$	$\frac{1}{4\pi} \cdot 10^8$ (patrz § 4.13).

jęły się już teraz w praktyce. Np. do mierzenia natężenia pola magnetycznego ciągle jeszcze używa się erstedów, natomiast rzadko kiedy spotyka się ampery na metr.

Już od wielu lat istnieje silna tendencja do konsekwentnego i wyłącznego stosowania jednostek zracjonalizowanego układu MKSA dla wszystkich jednostek wielkości fizycznych. Dopiero jednak w roku 1966 układ tych jednostek przyjęty został w Polsce jako obowiązujący układ międzynarodowy (*Système Internationale*, stąd skrót SI). Układ SI obejmuje jeszcze jednostki temperatury (stopnie w skali Kelvina, °K) i jednostki światłości źródła światła (kandela, cd).

Układ SI ma być w przyszłości jedynym układem jednostek używanym w nauce, technice i w życiu praktycznym. Niemniej jeszcze przez długie lata używane będą jednostki innych układów, a także jednostki tradycyjne. Dlatego w ciągu tego długiego okresu przejściowego, wprowadzając nowy i w przyszłości wyłączny układ SI, nie można zapominać o porównywaniu nowych jednostek z jednostkami dawnymi. W przeciwnym razie brak byłoby łączności między publikacjami i książkami dawnymi a nowymi. Zwłaszcza, że zracjonalizowanie układu MKSA spowodowało, że wzory wyrażające natężenie pola magnetycznego H w zależności od prądu i zmieniły swoją postać [por. wzór (3.10d) ze wzorem (3.11), a także wzór (3.10) ze wzorem (3.11a)].

Na czym polega zracjonalizowanie układu jednostek MKSA? Na to pytanie daliśmy odpowiedź w treści rozdziału 3. Ponieważ jednak jest to sprawa i ważna, i trudna zarazem, nie od rzeczy będzie przedstawić ją ogólniej, do czego powrócimy w § 4.13. Przedtem jednak przypomnimy, czym są układy klasyczne.

§ 4.12. Układy klasyczne, czyli niezracjonalizowane. Do układów klasycznych zalicza się dwa ważne i historycznie pierwsze układy CGS: elektrostatyczny (es CGS) i elektromagnetyczny (em CGS) oraz układ mieszany CGS Gaussa, a wreszcie układ praktyczny MKSA.

Jednostki podstawowe pierwszych trzech układów opierają się na prawach Coulomba: układu elektrostatycznego — na prawie Coulomba dla ładunków elektrycznych w próżni,

$$F = \frac{e_1 e_2}{r^2},$$

układu elektromagnetycznego — na prawie Coulomba dla mas magnetycznych w próżni,

$$F = \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

wreszcie układu Gaussa — na obu tych prawach w równym stopniu.

Napiszmy oba prawa Coulomba dla próżni, lecz w postaci ogólniejszej:

$$F = \frac{1}{\varepsilon_0'} \frac{e_1 e_2}{r^2}, \tag{4.18}$$

$$F = \frac{1}{\mu_0'} \frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{4.19}$$

gdzie ε_0' jest przenikalnością dielektryczną próżni (w układzie klasycznym, a więc niezracjonalizowanym), zaś μ_0' jest przenikalnością magnetyczną próżni (również w układzie klasycznym). Przedstawiamy tu kolejno założenia układów klasycznych.

a) Układ jednostek es CGS otrzymujemy podstawiając $\varepsilon_0' = 1$. Wówczas dla $e_1 = e_2 = e$ otrzymujemy $e = r\sqrt{F}$ i jednostką e w tym układzie będzie:

$$1 \text{ j.es CGS ład.} = 1 \text{ cm}\sqrt{\text{dyn}}.$$

Stąd wywodzą się jednostki dalszych wielkości, jak jednostka natężenia prądu i, tj. 1 cm $\sqrt{\text{dyn}}$/s itd. Ale jednostkowy prąd elektryczny wywołuje w określonym miejscu jednostkowe pole magnetyczne, zaś to samo pole magnetyczne może być wywołane obecnością określonej masy magnetycznej m, która stanie się w ten sposób jednostkową masą magnetyczną w układzie es CGS. Zatem w układzie es CGS nie wolno przyjmować dowolnie wartości μ_0', gdyż stała ta ma już określoną wartość, wynoszącą $\mu_0' = 1/c^2$.

b) Układ jednostek em CGS otrzymujemy podstawiając $\mu_0' = 1$; wówczas dla $m_1 = m_2 = m$ otrzymujemy $m = r\sqrt{F}$ i jednostką m w tym układzie będzie:

$$\text{j.em CGS masy magnetycznej} = 1 \text{ cm}\sqrt{\text{dyn}}.$$

Od niej wywodzą się jednostki innych wielkości, jak natężenie pola magnetycznego, natężenie prądu elektrycznego itd. Od jednostki natężenia prądu elektrycznego mamy jeden krok do określenia jednostki em CGS ładunku. Zatem w tym układzie nie wolno dowolnie przyjmować wartości ε_0', gdyż stała ta ma już określoną wartość.

Znamy już ważny fakt, potwierdzony najdokładniejszymi pomiarami, że stosunek jednostki em CGS natężenia prądu do jednostki es CGS natężenia prądu równy jest liczbowo prędkości światła c w próżni, wyrażonej w jednostkach układu CGS ($c = 3\cdot 10^{10}$ cm/s). Fakt ten wynika również ze słynnej teorii Maxwella, o której będzie mowa w rozdziale 5. Zupełnie to samo stosuje się do jednostek ładunku elektrycznego, $e = it$. Jeśli więc jednostki em ładunku są c razy większe od jednostek es, to zarówno e_1, jak i e_2 we wzorze (4.18) wyrażają się c razy mniejszymi liczbami, zatem tę samą wartość na F otrzymamy, jeśli na ε_0' przyjąć wartość $1/c^2$. Zatem w układzie elektromagnetycznym, w którym $\mu_0' = 1$, we wzorze (4.18) pojawia się współczynnik $\varepsilon_0' = 1/c^2$. I odwrotnie, w układzie elektrostatycznym, w którym $\varepsilon_0' = 1$, we wzorze (4.19) pojawia się współczynnik $\mu_0' = 1/c^2$. Ogólnie, iloczyn ε_0' i μ_0' jest stały i równy $1/c^2$:

$$\varepsilon_0' \mu_0' = \frac{1}{c^2}. \tag{4.20}$$

Jest to relacja Maxwella, wynikająca z jego teorii i potwierdzona doświadczalnie.

c) Układ jednostek CGS Gaussa. Bardzo duże rozpowszechnienie znalazł w fizyce XIX i początku XX wieku układ jednostek CGS mieszanych: es dla wielkości elektrycznych i em dla wielkości magnetycznych, wprowadzony przez Gaussa. Zawiera on dwa założenia: pierwsze założenie, że $\varepsilon_0' = 1$, co prowadzi do jednostek elektrostatycznych dla ładunku elektrycznego i wielkości pochodnych (i, U, R, C, E, D itd.); drugie założenie, że $\mu_0' = 1$, co prowadzi do jednostek elektromagnetycznych dla masy magnetycznej i wielkości pochodnych (H, B, Φ, L, itd.). W tych warunkach relacja Maxwella nie jest spełniona. Istotnie, $\varepsilon_0 \mu_0 = 1$, przeto we wzorach wiążących wielkości elektryczne

z wielkościami magnetycznymi pojawia się współczynnik c lub c^2, np. prawo Biota-Savarta, które w układzie em CGS wyraża wzór (3.9d), w układzie CGS Gaussa przybiera postać:

$$\Delta H = \frac{1}{c}\frac{i\Delta l}{r^2}\sin\alpha. \tag{4.21}$$

Komplikuje to bardzo wzory i równania elektrodynamiki. Stanowi to oczywiście wadę układu Gaussa.

d) Układ praktyczny MKSA. Wszystkie układy CGS miały ponadto inną wspólną wadę: oto podstawowe jednostki ważnych w praktyce wielkości fizycznych, jak np. natężenia prądu, napięcia elektrycznego, miały wartości w bardzo znacznym stopniu odbiegające od wartości spotykanych w praktyce. A więc np. prąd przepływający przez małą żarówkę (0,1 A) miał natężenie $3\cdot 10^8$ jednostek es CGS natężenia prądu lub 10^{-2} jednostek em CGS natężenia prądu, albo: napięcie między przewodami sieci elektrycznej (220 V) wynosiło 0,73 jednostki es CGS napięcia lub $2{,}2\cdot 10^{10}$ jednostek em CGS napięcia itp. Dlatego już w roku 1881 Międzynarodowy Kongres Elektryczności ustanowił praktyczny układ jednostek oparty na układzie jednostek mechanicznych MKS i na praktycznej jednostce ładunku, 1 kulombie (1 C), określonym jako 1/10 jednostki em CGS ładunku. W ten sposób w układzie praktycznym MKSC (metr-kilogram-sekunda-kulomb) znalazły się następujące jednostki:

Energii	1 dżul, $1\ \text{J} = 10^7$ erg
Mocy	1 wat, $1\ \text{W} = 10^7$ erg/s
Ładunku elektrycznego	1 kulomb, $1\ \text{C} = 10^{-1}$ jedn. em CGS
Natężenia prądu	1 amper, $1\ \text{A} = 1\,\frac{\text{C}}{\text{s}} = 10^{-1}$ jedn. em CGS
Napięcia elektrycznego	1 wolt, $1\ \text{V} = 1\,\frac{\text{W}}{\text{A}} = 10^8$ jedn. em CGS
Pojemności elektrycznej	1 farad, $1\ \text{F} = 1\,\frac{\text{C}}{\text{V}} = 10^{-9}$ jedn. em CGS
Oporu elektrycznego	1 om, $1\ \Omega = 1\,\frac{\text{V}}{\text{A}} = 10^9$ jedn. em CGS
Indukcyjności	1 henr, $1\ \text{H} = 1\,\frac{\text{V}}{\text{A/s}} = 10^9$ jedn. em CGS (czyli cm).

Oparcie układu praktycznego jednostek na 1 kulombie, określonym jako 1/10 jednostki em CGS ładunku, stwarzało trudności pomiarowe. Dlatego wkrótce oparto układ praktyczny na 1 amperze „międzynarodowym" określonym za pomocą elektrolizy (por. § 1.10 i § 3.13). Wiemy już z § 3.13, że z biegiem lat wytworzyła się sytuacja, przypominająca historię wzorca metra i układu metrycznego. Lecz zakończenie było inne: amper „międzynarodowy", czyli elektrolityczny został zmieniony i zastąpiony amperem absolutnym, opartym na pomiarze siły elektrodynamicznej działającej na przewodnik z prądem w polu magnetycznym wytworzonym przez drugi przewodnik, przez który płynie ten sam prąd. Do tego celu służy urządzenie, zwane *wagą Rayleigha*. Waga Rayleigha pozwala mierzyć prąd w amperach absolutnych, tj. amperach określonych jako 1/10 jednostki em CGS natężenia prądu. Opisywać jej bliżej nie będziemy, podamy jednak

zasadę pomiaru. Zasada ta polega na zmierzeniu siły działającej na zwojnicę ruchomą, połączoną z ramieniem czułej wagi, w polu magnetycznym wytworzonym przez zwojnicę nieruchomą, połączoną szeregowo ze zwojnicą ruchomą. Natężenie tego pola, według prawa Biota-Savarta (3.9), jest proporcjonalne do natężenia prądu i. Siła działająca na zwojnicę ruchomą jest proporcjonalna, zgodnie z prawem Laplace'a (3.14), zarówno do natężenia pola magnetycznego, jak i do natężenia prądu, a zatem jest proporcjonalna do i^2:

$$F = ki^2.$$

Bezwymiarowy współczynnik k może być obliczony teoretycznie na podstawie geometrii układu zwojnic. Zatem zmierzywszy F obliczyć można i w jednostkach elektromagnetycznych.

Układ praktyczny jednostek, identyczny z układem MKSC, lecz oparty na amperze absolutnym, nazywa się układem MKSA (metr-kilogram-sekunda-amper).

§ 4.13. Zracjonalizowanie układu MKSA metodą Giorgiego. Racjonalizowanie klasycznego układu jednostek ma podwójny cel. Po pierwsze: w układach klasycznych czynnik 4π pojawia się dość niespodziewanie we wzorach opisujących pole elektryczne jednorodne, natomiast znika dla pól o symetrii kulistej. Oto przykład: w układzie es CGS pojemność kondensatora płaskiego wyraża się wzorem:

$$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d},$$

natomiast pojemność kuli o promieniu r w przestrzeni wypełnionej dielektrykiem wyraża wzór

$$C = \varepsilon r.$$

Jak widać z § 2.34 i § 2.39 przyjęcie współczynnika ε_0 we wzorze (2.11) i (2.13),

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon E, \tag{4.22}$$

gdzie

$$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2}\frac{\text{F}}{\text{m}}, \tag{4.22a}$$

pozwoliło uniknąć, przy stosowaniu symbolu ε_0, wymienionego paradoksu. Spowodowało to, że we wzorze wyrażającym prawo Coulomba pojawił się czynnik 4π [patrz wzór (2.21)].

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{e_1 e_2}{r^2}$$

(r oznacza w tym wzorze i w dalszych wzorach odległość pomiędzy ładunkami e_1 i e_2), natomiast formalnie zniknął czynnik 4π we wzorach dotyczących pól bez symetrii kulistej, np. we wzorze wyrażającym pojemność kondensatora płaskiego,

$$C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}$$

i w wielu innych wzorach [patrz np. wzory (4.13) i (4.14), (4.16) i (4.17), itp.].

Po drugie: celem racjonalizacji jest nadanie możliwie prostej i przejrzystej postaci wzorom wyrażającym wielkości elektryczne i magnetyczne, a szczególnie równaniom Maxwella, rządzącym elektrodynamiką (patrz rozdz. 5). Dlatego drugim etapem racjonalizacji układu jednostek MKSA było przyjęcie w § 3.17 postulatu, by siła magnetomotoryczna prądu elektrycznego $\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{s}$ równa była nie $4\pi i$, jak w układzie em CGS, lecz po prostu i:

$$\underset{\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right)}{\oint \mathbf{H}} \quad \underset{(\mathrm{m})}{d\mathbf{s}} = \underset{(\mathrm{A})}{i} .$$

Racjonalizacja polega więc na prostym zabiegu: prawą stronę wzoru wyrażającego H w klasycznym układzie jednostek należy podzielić przez 4π [por. wzory (3.12) i (3.12a)]. Przyjęcie zracjonalizowanej postaci wzoru na siłę magnetomotoryczną dało nam możność określenia jednostki MKSA natężenia pola magnetycznego (1 A/m), a w konsekwencji określenia współczynnika μ_0 występującego we wzorze

$$B = \mu_0 \mu H \tag{4.23}$$

(patrz § 3.25). Na wartość przenikalności magnetycznej próżni otrzymaliśmy:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{V \cdot s}}{\mathrm{A \cdot m}} . \tag{4.23a}$$

Od razu widać, że tym samym relacja Maxwella jest spełniona:

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}}\right)^2 . \tag{4.24}$$

Zatem wzory wiążące wielkości elektryczne z wielkościami magnetycznymi wolne będą od współczynników zawierających c.

Wzory wyrażające oba prawa Coulomba w jednostkach zracjonalizowanego układu MKSA mają następującą postać [patrz § 2.41 oraz zagadnienie 3.9]:

$$F = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon} \frac{e_1 e_2}{r^2} \tag{4.25}$$

i

$$F = \frac{1}{4\pi \mu_0 \mu} \frac{m_1 m_2}{r^2} . \tag{4.26}$$

Ten ostatni wzór pozwoli określić jednostkę masy magnetycznej w zracjonalizowanym układzie MKSA. Podstawiając mianowicie $m_1 = m_2 = m$ i $\mu = 1$ mamy w układzie MKSA zracjonalizowanym:

$$m = r\sqrt{4\pi \mu_0 F} = r\sqrt{4\pi \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} F} = 4\pi r \sqrt{10^{-7} F} .$$

Przechodząc zaś do jednostek układu em CGS otrzymamy:

$$\underset{\substack{(\text{j. m. m.}\\ \text{MKSA zrac.})}}{m} = 4\pi \underset{(\mathrm{cm})}{r} \cdot 10^{-2} \sqrt{10^{-7} \cdot \underset{(\mathrm{dyn})}{F} \cdot 10^{-5}} = 4\pi \cdot 10^{-8} \underset{(\mathrm{cm})}{r} \sqrt{\underset{(\mathrm{dyn})}{F}} = 4\pi \cdot 10^{-8} \underset{\substack{(\text{j. m. m.}\\ \text{CGS})}}{m} .$$

Z powyższego wynika, że wielkość jednostki masy magnetycznej w układzie zracjonalizowanym MKSA jest:

$$1 \text{ jedn. m.m.MKSA} = \frac{1}{4\pi} 10^8 \text{ jedn. m.m. CGS.}$$

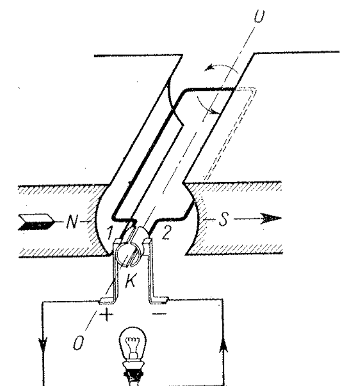
Powyższa metoda zracjonalizowania klasycznego układu jednostek została wprowadzona przez Giorgiego, dlatego układ MKSA, zracjonalizowany tą metodą, nazywają także *układem Giorgiego.*

W układzie tym wszystkie jednostki praktyczne MKSC wymienione w § 4.12d pozostają bez zmiany. Inne ważniejsze jednostki zracjonalizowanego układu MKSA znajdzie czytelnik w tablicy 4.1.

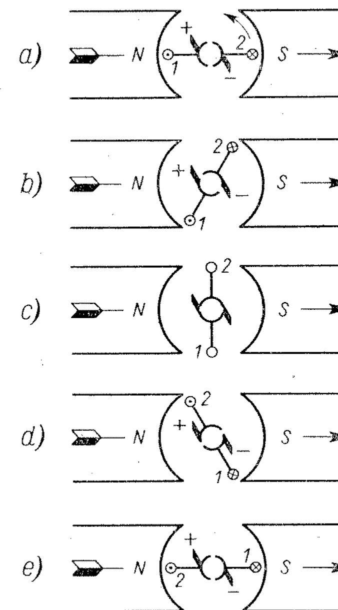
W dalszym ciągu książki mówiąc „układ MKSA" zawsze będziemy mieli na myśli układ zracjonalizowany.

B. Prądnice prądu stałego

***§ 4.14. Zasada działania prądnicy.** Przypomnijmy sobie prototyp silnika elektrycznego wyobrażony na rys. 3.54. Jeżeli odłączymy od niego źródło prądu i wprawimy w ruch obrotowy jego ramkę drucianą, to w ramce tej powstanie siła elektromotoryczna indukcji.



Rys. 4.16. Zasada działania prądnicy będącej „odwróceniem" silnika (patrz rys. 3.54)

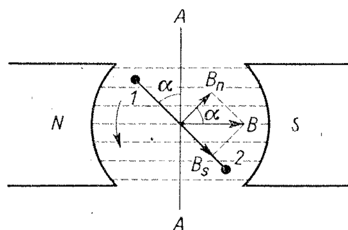


Rys. 4.17. Obrazy „kinematograficzne" ramki powyżej prądnicy w ruchu (patrz rys. 3.55)

Jeżeli jej końce (wyprowadzone przez komutator i szczotki) zepniemy jakimś opornikiem lub żarówką, to w obwodzie tym popłynie prąd. Wyobraża to rys. 4.16. Kierunek prądu indukcyjnego wyznaczyć można w każdej chwili na podstawie reguły Lenza: prąd płynie w takim kierunku, aby wytworzony przezeń strumień magnetyczny przeciwstawił się

zmianie, jakiej ulega strumień przechodzący przez ramkę, gdy ta się obraca. Kierunek prądu indukcyjnego dla różnych momentów w czasie obrotu ramki pokazuje rys. 4.17. Z rysunku tego widzimy, że drut, np. *1*, przecina linie sił raz z góry na dół, a raz — z dołu do góry. Zatem prąd, który w obwodzie powstaje, zmienia co pół obrotu kierunek. Ale każda ze szczotek zmienia co pół obrotu wycinek komutatora, z którym się styka, przy czym zmiana odbywa się w pozycji *neutralnej*, tj. gdy czynne druty ramki poruszają się niemal równolegle do linii sił pola (rys. 4.17c). W rezultacie tego przez szczotki i obwód zewnętrzny płynie prąd, który w czasie nie zmienia swojego kierunku: *prąd jednokierunkowy*.

Z łatwością obliczymy siłę elektromotoryczną indukowaną w ramce, a więc panującą na szczotkach w czasie obrotu ramki. Kąt obrotu α płaszczyzny ramki mierzyć będziemy np. od położenia neutralnego *AA* (rys. 4.18), poprzedzającego chwilę (*a*) na rys. 4.17. Załóżmy, że pole magnetyczne jest



Rys. 4.18. Strumień indukcji magnetycznej B_nS przechodzący przez zwój twornika („ramkę") wywołuje w nim siłę elektromotoryczną

jednorodne, co niewiele odbiega od rzeczywistości (rys. 3.57b i 4.20). Strumień indukcji magnetycznej przechodzący przez ramkę ma wartość największą Φ w położeniu neutralnym *AA*, mianowicie $\Phi = BS$ (*S* — pole powierzchni ramki). W każdym innym położeniu ramki strumień jest słabszy i wynosi (por. rys. 4.18).

$$\Phi' = B_n S = B \cos\alpha\, S = \Phi \cos\alpha\,,$$

ponieważ tylko składowa normalna B_n wytwarza strumień, natomiast składowa styczna B_s jest nieczynna. Jeżeli przez *t* oznaczymy czas, w ciągu którego kąt α został zakreślony, a przez *T* okres obrotu ramki, to

$$\alpha = \frac{2\pi}{T}t\,.$$

Zatem

$$\Phi' = \Phi \cos \frac{2\pi}{T}t\,.$$

Chcąc obliczyć siłę elektromotoryczną indukowaną w chwili *t*, zastosujemy prawo indukcji Faradaya

$$E = -\frac{\Delta\Phi'}{\Delta t}\,,$$

przy czym weźmy tak mały przyrost czasu Δt, aby można było $\frac{\Delta\Phi'}{\Delta t}$ zastąpić pochodną $\frac{d\Phi'}{dt}$. Obliczywszy tę pochodną

$$\frac{d\Phi'}{dt} = \Phi \frac{d}{dt}\left(\cos\frac{2\pi}{T}t\right) = -\frac{2\pi}{T}\Phi \sin\frac{2\pi}{T}t$$

otrzymujemy żądany rezultat

$$E = \frac{2\pi}{T}\Phi \sin\frac{2\pi}{T}t \qquad (4.27)$$

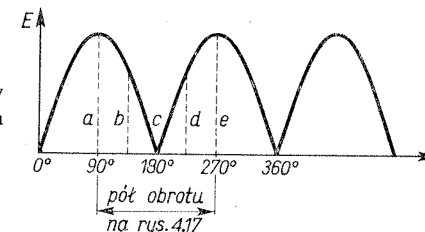
albo powracając do kąta α jako zmiennej niezależnej

$$E = \frac{2\pi}{T}\Phi \sin\alpha\,. \qquad (4.27a)$$

Wzór ten potwierdza to, co już mówiliśmy, że siła elektromotoryczna indukowana w ramce zmienia kierunek (znak) w zależności od kąta α. Ale dzięki komutatorowi siła elektromotoryczna panująca na szczotkach nie zmienia nigdy swojego znaku. Toteż wzór powyższy napiszemy tak

$$E = \frac{2\pi}{T}\Phi\,|\sin\alpha\,|\,, \qquad (4.27b)$$

gdzie $|\sin\alpha|$ oznacza wartość bezwzględną sin α. Wykresem siły elektromotorycznej będzie więc sinusoida, której dolne (ujemne) połówki odwrócono (rys. 4.19). Widzimy, że w momentach przechodzenia

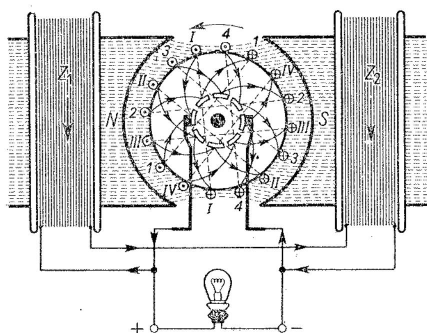


Rys. 4.19. Wykres siły elektromotorycznej prądnicy z rys. 4.16; *a*, *b*, *c*, *d*, *e* — odpowiadają położeniom ramki z rys. 4.17

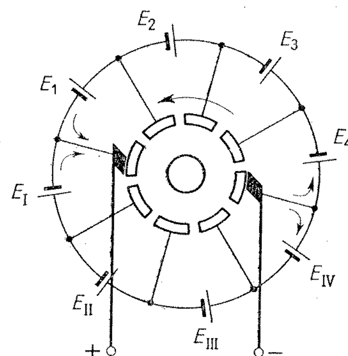
ramki przez położenie neutralne (*c*) siła elektromotoryczna zanika. Prąd jest wprawdzie jednokierunkowy, lecz natężenie jego zmienia się periodycznie od 0 do maksimum; prąd taki nazywa się *prądem tętniącym*.

§ 4.15. Budowa prądnicy. Prototyp prądnicy poznany w paragrafie poprzednim daje prąd silnie tętniący, gdyż jego natężenie spada do zera co pół obrotu. Ta cecha stanowiłaby poważną wadę prądnicy. Sposób jej usunięcia jest zupełnie ten sam, co i sposób usunięcia „tętniącego" momentu obrotowego w silniku (por. § 3.35b). Należy więc zastosować szereg „ramek", a w rzeczywistości — zwojnic rozmieszczonych w gwiazdę i połączonych szeregowo, aby gdy jedna przechodzi przez położenie neutralne i nie daje siły elektromotorycznej, wszystkie inne „pracowały". Rysunek 4.20 wskazuje sposób zrealizowania tej zasady. Zwojnice wyobrażone tylko za pomocą jednego zwoju nawinięte są na walcu żelaznym. Druty przebiegają wzdłuż tworzącej walca w rowkach nie zaznaczonych na rysunku. W tylnej części twornika przebieg drutów zaznaczony jest liniami przerywanymi. Początek i koniec każdej zwojnicy dolutowany jest do sąsiadujących ze sobą wycinków komutatora, który w prądnicy nazywa się *kolektorem*. Zwojnice, których końce przyłączone są do dolnych wycinków kolektora (w chwili wyobrażonej na rys. 4.20), oznaczone są cyframi: *I I*, *II II*, *III III* i *IV IV*; natomiast pozostałe zwojnice połączone z górnymi wycinkami oznaczone są cyframi arabskimi *11*, *22*, *33* i *44*. Widzimy zatem, że zwojnice oznaczone cyframi rzymskimi są między sobą połączone szeregowo; podobnie zwojnice oznaczone cyframi arabskimi; ale obie czwórki zwojnic połączone są ze sobą równolegle. Na rysunku tym zwojnice *II* i *44* przeszły przed chwilą przez położenie neutralne, zatem między wycinkami kolektora, do których ich końce są przyłączone, nie było napięcia. Jest to bardzo ważne, bo te właśnie wycinki prześliznęły się przed chwilą pod szczotkami i nawet na jeden moment zostały zwarte stosunkowo szerokimi szczot-

kami. Ponieważ w tej chwili nie było między tymi sąsiadującymi ze sobą wycinkami napięcia, zwarcie takie nie ma żadnego znaczenia: „szczotki nie iskrzą". (Gdyby jednak były źle ustawione i kontaktowały z niewłaściwymi wycinkami, iskrzyłyby silnie). Wszystkie inne zwojnice twornika, które nie przechodzą przez położenie neutralne, wytwarzają



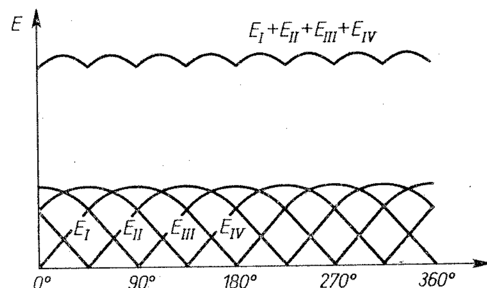
Rys. 4.20. Schemat prądnicy. (Jest to ten sam silnik elektryczny co na rys. 3.56, lecz w działaniu odwrotnym: obracany daje prąd; por. strzałki na rys. 4.20 i na rys. 3.56)



Rys. 4.21. $E_1, ..., E_4$ oraz $E_I, ..., E_{IV}$ symbolizują siły elektromotoryczne indukowane w zwojnicach prądnicy z rys. 4.20. W danej chwili $E_I = E_4 = 0$

siłę elektromotoryczną, która pędzi prąd tak, jak to symbolicznie przedstawia rys. 4.21: zarówno dolne zwojnice, jak i górne pędzą prąd do szczotki lewej; przez obwód zewnętrzny wraca on szczotką prawą. Podczas obrotu twornika zwojnice górne stają się dolnymi i pełnią ich funkcje; i tak w koło. Widzimy więc, że napięcie między szczotkami nigdy nie spada do wartości 0; tętnienie prądu jest zatem w porównaniu z poprzednim słabe.

Niemniej tętnienie, choć osłabione, istnieje. W każdej chwili siła elektromotoryczna prądnicy E jest równa sumie sił elektromotorycznych $E_1+E_2+E_3+E_4$ lub takiej samej sumie $E_I+E_{II}+E_{III}+E_{IV}$ (rys. 4.21). Siły elektromotoryczne poszczególnych zwojnic wyrażają się wzorem, (4.27a), w którym



Rys. 4.22. E — siła elektromotoryczna prądnicy o kolektorze 8-wycinkowym, E_I, E_{II}, E_{III} i E_{IV} — siły elektromotoryczne jednego z dwóch szeregów zwojnic. Na osi odciętych — kąt obrotu twornika (kąt pomiędzy linią neutralną a zwojnicą I)

$\Phi = Bn'S$ (n' — liczba zwojów w jednej zwojnicy). Wykresem każdej z tych sił elektromotorycznych jest „wyprostowana" sinusoida przedstawiona na rys. 4.19. Ale krzywe dla poszczególnych zwojnic są przesunięte względem siebie w fazie o 45°; tyle bowiem wynosi kąt pomiędzy sąsiednimi zwojnicami. Krzywe te wykreślone na jednym rysunku wyobraża rys. 4.22. Dodając do siebie rzędne poszczególnych krzywych otrzymujemy górną linię E, lekko falistą. Tętnienie E jest rzeczywiście bardzo nieznaczne, a jego częstotliwość jest 4 razy większa niż dla jednej zwojnicy. Stosując wielką liczbę zwojnic i wycinków kolektora (np. 16, 24 itp.) otrzymujemy siłę elektromotoryczną w znacznym stopniu „wygładzoną".

Część prądu wytwarzanego przez prądnicę zasila zwojnice Z_1 i Z_2 magneśnicy (rys. 4.20); w ten sposób prądnica sama sobie wytwarza pole magnetyczne. Gdy prądnica nie działa, magneśnica zachowuje pozostałość magnetyczną, która umożliwia późniejszy rozruch prądnicy. Pierwsze obroty twornika wytwarzają dzięki pozostałości magnetycznej słaby prąd, który zasila magneśnicę, wskutek czego prąd w tworniku staje się silniejszy, wzmacnia się więc prąd w magneśnicy itd. Po krótkim czasie magneśnica zostaje nasycona i prądnica działa normalnie.

§ 4.16. Moc i siła elektromotoryczna prądnicy. Scharakteryzujmy prądnicę przy pomocy takich samych danych, jak scharakteryzowaliśmy w § 3.35 silnik. Wprowadźmy oznaczenia: Φ — strumień indukcji magnetycznej przechodzący przez przekrój osiowy twornika, n — liczba drutów czynnych we wszystkich rowkach twornika, N — liczba obrotów twornika na sekundę, i — natężenie prądu wypływającego z twornika (tzn., że natężenie prądu w pojedynczym drucie czynnym wynosi $\frac{1}{2}i$ (por. rys. 4.21), przy czym nie bierzemy pod uwagę tętnienia prądu, zresztą nieznacznego.

Niech prądnica pracuje normalnie poruszana jakimś silnikiem, np. spalinowym. Jaką pracę wykonuje ten silnik w ciągu 1 sekundy? Pomijając rozmaite straty w transmisji i w samej prądnicy, jak tarcie i inne (patrz niżej) odpowiemy, że praca włożona w prądnicę jest pracą przeciwko siłom elektrodynamicznym wywieranym przez pole magnetyczne na przewodniki z prądem. Obliczymy tę pracę.

Weźmy pod uwagę jeden ze zwojów twornika, zresztą dowolny. Gdy przechodzi on np. z położenia a (na rys. 4.17) do położenia c, wówczas przechodzący przezeń strumień indukcji magnetycznej zmienia się od 0 do Φ, a więc wzrasta o Φ. Ponieważ natężenie prądu w tym zwoju wynosi $\frac{1}{2}i$, przeto praca, jaką wykonać trzeba przeciw siłom elektrodynamicznym, aby dokonać obrotu zwoju od a do c, wynosi według wzoru (3.21): $\frac{1}{2}i\Phi$. Zatem praca wykonana na obrócenie całego twornika o ćwierć obrotu wynosi $\frac{1}{2}n\cdot\frac{1}{2}i\Phi$, gdyż zwojów jest $\frac{1}{2}n$, a na obrócenie każdego z nich trzeba tej samej pracy. Jeden pełny obrót twornika wymaga pracy $ni\Phi$, a praca potrzebna do kręcenia twornika w ciągu jednej sekundy, czyli moc prądnicy M wynosi

$$M = N\ n\ i\ \ \Phi. \qquad (4.28)$$
$$\text{(W)} \quad (\text{s}^{-1}) \quad \text{(A)} \quad (\text{V}\cdot\text{s})$$

Moc powyższą prądnica zamienia na moc prądu elektrycznego, która wynosi Ei. W myśl zasady zachowania energii musi być

$$Ei = Nni\Phi,$$

a stąd siła elektromotoryczna prądnicy (pomijając drobne tętnienie) wynosi

$$E = N\ n\ \Phi. \qquad (4.29)$$
$$\text{(V)} \quad (\text{s}^{-1}) \quad (\text{V}\cdot\text{s})$$

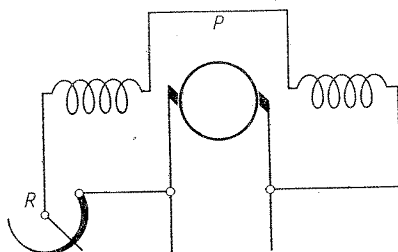
Wreszcie natężenie prądu i, wytwarzanego przez twornik, obliczyć można z prawa Ohma

$$i = \frac{E}{R+r},$$

gdzie R jest oporem obwodu zewnętrznego (wliczając do niego także równolegle przyłączone zwojnice magneśnicy), a r — oporem twornika. Ponieważ iR jest to napięcie U na zaciskach prądnicy, przeto z powyższego wynika, że

$$U = E - ri,$$

czyli słownie: napięcie na zaciskach prądnicy jest mniejsze od jej siły elektromotorycznej o spadek napięcia ri na oporze wewnętrznym (por. § 1.26, wzory (1.17) i (1.17a); przykłady liczbowe — por. zagadnienia 4.22—4.25).



Rys. 4.23. Schemat prądnicy P z regulacją siły elektromotorycznej. R — opornik korbowy regulujący prąd w elektromagnesach

Ze wzoru (4.29) widzimy, że aby regulować siłę elektromotoryczną prądnicy, wystarczy zmieniać strumień indukcji Φ, wychodzący z jej biegunów. W tym celu stosuje się opornik, za pomocą którego osłabia się lub wzmacnia prąd w elektromagnesach (w zwojnicach Z_1 i Z_2 na rys. 4.20). Pokazuje to schematycznie rys. 4.23.

§ 4.17. Wydajność prądnicy. Wydajność η prądnicy określamy jako stosunek mocy elektrycznej M wytworzonej przez prądnicę do mocy mechanicznej M_0 dostarczonej prądnicy:

$$\eta = \frac{M}{M_0}. \tag{4.30}$$

Różnicę mocy $M_0 - M$ nazywamy *stratami mocy* w prądnicy. Oznaczywszy straty literą s: $s = M_0 - M$, mamy

$$\eta = 1 - \frac{s}{M_0}. \tag{4.30a}$$

Straty mocy spowodowane są następującymi zjawiskami:

a) Wydzielaniem się ciepła Joule'a w zwojach twornika; strata mocy wynosi tu ri^2 (r — opór uzwojenia twornika, i — prąd w tworniku).

b) Wydzielaniem się ciepła w zwojach elektromagnesu; strata wynosi tu $r'i'^2$ (r' — opór uzwojenia magneśnicy, i' — natężenie prądu, na ogół stosunkowo słabe).

c) Wydzielaniem się ciepła w masie żelaznej twornika wskutek histerezy żelaza.

d) Wydzielaniem się ciepła w masie żelaznej twornika wskutek prądów wirowych; w celu zmniejszenia tych strat do minimum twornik buduje się nie z jednego bloku żelaznego, lecz z cienkich blach prostopadłych do osi obrotu twornika i odizolowanych od siebie papierem (por. § 4.4).

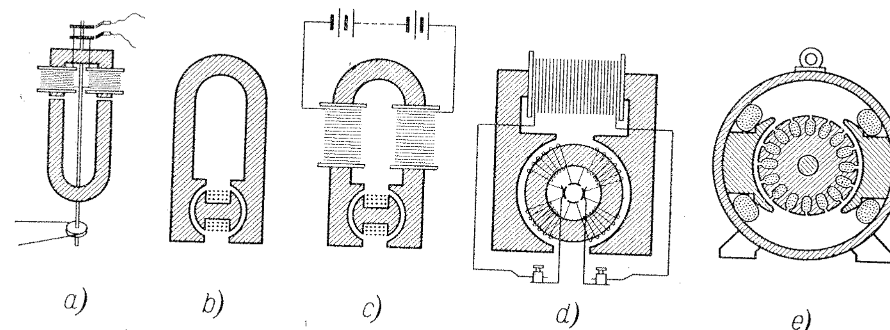
e) Wydzielaniem się ciepła wskutek tarcia w łożyskach, iskrzenia szczotek itp.

W bardzo dobrych prądnicach o dużej mocy, 100—1000 kW, wszystkie powyższe straty wynoszą około 5—10% mocy całkowitej. W prądnicach o mniejszej mocy straty bywają procentowo większe.

Gdybyśmy jako straty mocy uwzględnili tylko straty wymienione pod a), otrzymalibyśmy ze wzoru (4.30a) wzór (1.22) wyprowadzony w § 1.30 dla takich źródeł prądu, jak ogniwa, akumulatory itp.

Zupełnie te same straty występują w silnikach elektrycznych. Uwzględniając jedynie straty wymienione pod a) otrzymamy ze wzoru (4.30a) wzór (1.27) wyprowadzony już w § 1.31, co nietrudno sprawdzić.

***§ 4.18. Prądnica w rozwoju historycznym.** Rysunek 4.24 daje nam przegląd ważniejszych ulepszeń wprowadzanych z biegiem czasu do konstrukcji prądnicy, począwszy od prymitywnej maszynki (a), w której cewki osadzone na rdzeniu żelaznym obracały się naprzeciwko biegunów magnesu. Ulepszenia dotyczą przede wszystkim twornika i magneśnicy.



Rys. 4.24. Rozwój historyczny prądnicy. a) Postać prymitywna. b) Twornik dwuteowy, magnes trwały. c) Twornik dwuteowy, elektromagnes o wzbudzeniu obcym. d) Twornik pierścieniowy, wzbudzenie własne. e) Twornik bębnowy, wzbudzenie własne

U l e p s z e n i a t w o r n i k a. 1) Prądnice (b) i (c) mają twornik dwuteowy (Siemensa). Wadą jego jest to, że daje prąd tętniący. Spotyka się jeszcze czasem w tzw. maszynkach „magnetoelektrycznych", stosowanych w dawnych aparatach telefonicznych specjalnego typu; służyły one do uruchamiania dzwonka.

2) Prądnica (d) ma twornik *pierścieniowy*, wynaleziony przez Gramme'a (1869). Zaletą jego jest zmniejszenie tętnienia, wadą — że tylko połowa strumienia indukcji przechodzi przez zwoje, ponieważ strumień rozdziela się w pierścieniu na dwie części, górną i dolną.

3) Prądnica (e), najbardziej zbliżona do nowoczesnej, ma twornik bębnowy (Siemens, Hefner Alteneck), opisany w § 4.15. Jest on wolny od wady pierścienia Gramme'a, gdyż przez każdy zwój w czasie jego obrotu przechodzi cały strumień indukcji.

Ulepszenia magneśnicy. 1) Prądnica (b) ma magnes trwały. Magnes trwały stosuje się w małych prądniczkach: maszynkach magnetoelektrycznych, „magnetach" samochodowych itp. Stale prowadzone są prace nad udoskonaleniem stopów ferromagnetycznych oraz ferrytów, służących do budowy silnych i trwałych magnesów (por. § 3.29 i 3.30).

2) Prądnica (c) ma elektromagnes zasilany albo z oddzielnej baterii, albo z oddzielnej prądnicy.

3) Wadę powyższego urządzenia stanowi konieczność stosowania dodatkowego źródła prądu. Konieczność ta odpadła z chwilą wynalezienia sposobu wzbudzania magneśnicy z tej samej prądnicy („zasada dynamoelektryczna Siemensa", 1867), co opisane jest w § 4.15.

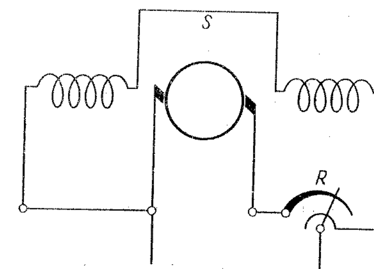
§ 4.19. Silnik elektryczny jako prądnica. Poznawszy zasadę działania oraz budowę silnika elektrycznego i prądnicy rozumiemy, że jest to jeden i ten sam przyrząd. Dołączony do źródła prądu działa jako silnik: twornik jego obraca się. Jeśli, przeciwnie, obracać jego twornik — wówczas silnik staje się źródłem prądu indukcyjnego; będzie działał jako prądnica.

Weźmy pod uwagę silnik elektryczny dołączony np. do sieci elektrycznej. Twornik jego obraca się. Wiemy jednak, że gdy twornik takiej maszyny się obraca, wytwarza się w nim siła elektromotoryczna. A więc obracający się silnik jest jednocześnie prądnicą obracającą się, oczywiście, w tym samym kierunku. Siła elektromotoryczna owej prądnicy wywołuje prąd elektryczny w zewnętrznym obwodzie, a więc prąd przechodzący przez źródło prądu. W jakim kierunku? Rzut oka na rysunki 3.54 i 4.16, na których silnik i prądnica obracają się w tym samym kierunku, poucza nas, że silnik wytwarza prąd mający przeciwny kierunek aniżeli prąd, który go zasila. Dlatego siła elektromotoryczna, wytwarzana przez silnik w ruchu, nosi nazwę *siły przeciwelektromotorycznej*; przeciwstawia się bowiem sile elektromotorycznej źródła prądu. Oto jest pochodzenie owej tajemniczej siły przeciwelektromotorycznej, którą przewidywaliśmy już dawniej (§ 1.31, 3.22 i 3.35) na podstawie zasady zachowania energii, nie wiedząc, jakie jest jej źródło. Obecnie wiemy, że powstaje ona jako skutek zjawiska indukcji elektromagnetycznej. Nic więc dziwnego, że siła przeciwelektromotoryczna silnika i siła elektromotoryczna prądnicy wyrażają się identycznymi wzorami [por. wzory (3.29) i (4.29)].

Wyciągniemy z tego pewne wnioski.

a) Rozruch silnika. Gdy silnik będący w spoczynku dołączymy do źródła prądu, w pierwszej chwili przepłynie przez niego bardzo silny prąd, ponieważ nie wytwarza się jeszcze siła przeciwelektromotoryczna. Dopiero gdy silnik zacznie się obracać, pojawi się siła przeciwelektromotoryczna, która zmniejszy natężenie prądu (por. rys. 1.46 i 1.47). Zanim jednak silnik „rozrusza się", nadmierny prąd początkowy może go uszkodzić. Dla uniknięcia tych skutków stosuje się opornik, który gdy silnik zaczyna się obracać, stopniowo wyłącza się z obwodu. Podczas rozruchu uzwojenie twornika narażone jest na niebezpieczeństwo. Natomiast uzwojenie magneśnicy jest zupełnie bezpieczne; ma ono bowiem duży opór i pobiera stale bardzo słaby prąd. Dlatego opornik rozruchowy, czyli tzw. *rozrusznik*, włącza się w obwód uzwojenia twornika; pokazuje to rys. 4.25.

b) Regulacja częstotliwości obrotów silnika. Przypuśćmy, że dwa silniki idą luzem, bez żadnego obciążenia. Jeden obraca się szybko, a drugi wolno. Dlaczego? Jak zwolnić bieg pierwszego, a przyspieszyć drugiego? Zdawałoby się, że wystarczy osłabić prąd doprowadzony do silnika, aby zwolnić jego bieg. Jednak doświadczenie pokazuje, że nie jest to sposób bardzo skuteczny; bo gdy wreszcie przy pomocy odpowiedniego oporu uda się nam zwolnić obroty silnika, będzie on pracował niezwykle słabo; bowiem z powodu małego natężenia prądu moc jego będzie znikoma. Przypomnijmy sobie z § 1.31 równanie mocy (1.25) dla silnika elektrycznego:



Rys. 4.25. Rozrusznik R (opornik korbowy) w obwodzie silnika S

Ui	$=$	$E'i$	$+$	ri^2
moc M dostarczana silnikowi z sieci		moc M' zamieniana na pracę mechaniczną		moc rozpraszana w zwojach twornika

Uwzględniliśmy w nim stratę a) (§ 4.17), a pominęliśmy straty inne. Wynika z niego znane już nam zresztą wyrażenie

$$E' = U - ri,$$

albo, ponieważ $M = Ui$,

$$E' = U - \frac{Mr}{U}.$$

Widać stąd, że przy stałej mocy M i przy stałym napięciu U siła przeciwelektromotoryczna jest stała. Wyraża ją wzór (3.29) lub (4.29):

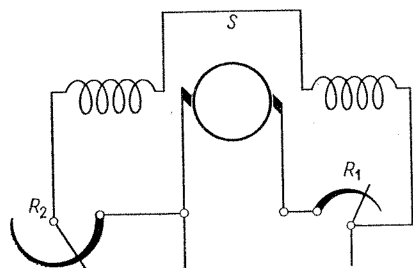
$$E' = Nn\Phi.$$

Wynika stąd dalej, że przy stałej mocy (a więc przy stałym E'), można zmniejszyć częstość obrotów N, należy tylko odpowiednio powiększyć strumień indukcji Φ. I odwrotnie, żeby powiększyć częstotliwość obrotów N, należy osłabić strumień indukcji Φ, a zatem osłabić prąd w uzwojeniu magneśnicy. Wygląda to paradoksalnie, niemniej doświadczenie przekona nas o tym. Z rozważań naszych wynika więc, że aby regulować częstotliwość obrotów N, należy jedynie regulować prąd w elektromagnesie, nie zaś w tworniku. Schemat odpowiedni pokazuje rys. 4.26. Rozrusznik R_1 służy tylko do rozruchu, natomiast opornik R_2 — do regulowania częstości obrotów.

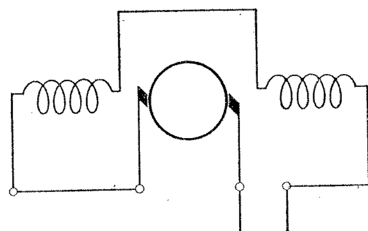
Doświadczenie to można wykonać z jakimkolwiek silnikiem według powyższego schematu. Im bardziej osłabimy prąd w elektromagnesie, tym szybciej obracać się będzie

twornik. Jednocześnie możemy zauważyć pewien proces uboczny. Ponieważ w warunkach tego doświadczenia moc silnika nie jest stała, lecz rośnie wraz z N, przeto rośnie równocześnie natężenie prądu i w tworniku W doświadczeniu tym czai się więc podwójne niebezpieczeństwo: twornik może zostać rozerwany siłą odśrodkową albo może się spalić od zbyt silnego prądu. Takie rezultaty można osiągnąć osłabiając prąd w uzwojeniu magneśnicy!

Rozważmy jeszcze zależność częstotliwości obrotów silnika od obciążenia. Z poprzednich wzorów wynika, że silnik musi się obracać z taką częstotliwością N, aby jego siła przeciwelektromotoryczna E' indukowana w tworniku równała się napięciu zasilającemu U, pomniejszonemu o spadek omowy ri wewnątrz twornika. Ponieważ spadek ten równa się $\frac{Mr}{U}$, przeto silnik pod większym obciążeniem będzie się obracał nieco wolniej. Ale zwolnienie to jest stosunkowo bardzo małe, ponieważ opór twornika bywa na ogół bardzo mały.



Rys. 4.26. Silnik S z dołączonym rozrusznikiem R_1 i regulatorem częstotliwości obrotów R_2



Rys. 4.27. Układ połączeń w prądnicy szeregowej lub silniku szeregowym

Dotychczas mówiliśmy o prądnicach i silnikach, w których uzwojenie twornika było przyłączone równolegle do uzwojenia elektromagnesów. Są to tzw. prądnice i silniki *bocznikowe*. Oprócz takiego połączenia stosuje się w pewnych wypadkach łączenie *szeregowe*, uwidocznione na rys. 4.27. W maszynach szeregowych cały wytwarzany prąd przepływa przez elektromagnesy, zatem uzwojenie ich musi mieć niewielki opór. Zaletę silników szeregowych ukaże nam następujący przykład. Przypuśćmy, że w czasie działania silnika obciążenie jego wzrasta np. czterokrotnie. Jeżeli to jest silnik bocznikowy, to częstotliwość obrotów niewiele się zmniejszy, a prąd w tworniku wzrośnie niemal czterokrotnie. Natomiast jeżeli to jest silnik szeregowy, prąd w tworniku wzrośnie niewiele więcej niż dwukrotnie. A to dlatego, że jednocześnie wzrośnie przeszło dwukrotnie prąd w elektromagnesach (jeszcze nie nasyconych), wzrośnie więc około dwukrotnie strumień indukcji, zatem siła działająca na druty czynne twornika wzrośnie czterokrotnie. Oczywiście nie ma tu żadnej sprzeczności z zasadą zachowania energii, ponieważ silnik szeregowy zwolni znacznie prędkość obrotów i będzie miał teraz mniejszą częstotliwość obrotów aniżeli silnik bocznikowy w tych samych warunkach. Ta cecha silników szeregowych sprawia między innymi, że stosuje się je do poruszania dźwigów (wind), tramwajów, lokomotyw elektrycznych itp. Poza tym najczęściej stosowanym typem silnika prądu stałego jest silnik bocznikowy.

*§ **4.20. Transformowanie prądu stałego.** Transformowanie prądu polega na zamienianiu prądu o natężeniu i_1, płynącego pod napięciem U_1, na prąd o natężeniu i_2, płynący pod napięciem U_2. Przyrządy służące do tego celu nazywają się *transformatorami*. Jeżeliby przyrząd działał bez strat, to moc wejściowa $U_1 i_1$ równałaby się mocy wejściowej $U_2 i_2$:

$$U_1 i_1 = U_2 i_2.$$

W rzeczywistości jednak zawsze istnieją straty mocy, które sprawiają, że $U_1 i_1$ jest nieco większe od $U_2 i_2$.

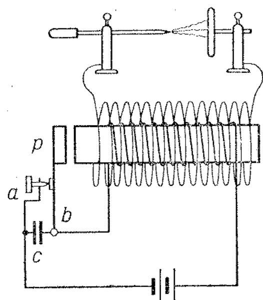
a) Transformowanie prądu stałego w skali laboratoryjnej. Transformatorem prądu stałego jest multiplikator napięcia, który poznaliśmy w rozdziale 2. Zamienia on prąd o niskim napięciu (np. 220 V, 60 mA) na prąd o wysokim napięciu (np. 13200 V, 1 mA, pomijając straty). Można go też zresztą stosować do odwrotnej funkcji, mianowicie do obniżania napięcia. W tym celu prąd o wysokim napięciu doprowadza się do końcowych zacisków baterii kondensatorów, a prąd niskiego napięcia czerpie się z zacisków połączonych z obracającymi się szczotkami. Odprowadzają one ładunek kolejno ze wszystkich kondensatorów.

W § 4.7 poznaliśmy przyrząd, który nazwaliśmy również transformatorem (rys. 4.13). Przypuśćmy, że w obwodzie pierwotnym (I) transformatora płynie prąd stały. Wówczas w obwodzie wtórnym (II) nie wytwarza się prąd indukcyjny, ponieważ strumień indukcji w żelazie jest stały. Aby w obwodzie wtórnym wytwarzał się prąd, musimy prąd w obwodzie pierwotnym ustawicznie włączać i wyłączać. Na tym właśnie polega zasada transformatora prądu stałego, opartego na zjawisku indukcji elektromagnetycznej.

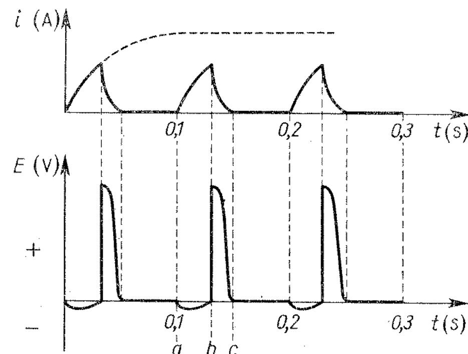
Przyrząd tego rodzaju z szeregiem udoskonaleń wyobraża rys. 4.28. Nosi on nazwę *cewki indukcyjnej Ruhmkorffa* albo *induktora*. Obwód pierwotny składa się z kilkudziesięciu zwojów grubego drutu nawiniętego na rdzeniu otwartym. Rdzeń złożony jest z wiązki drutów żelaznych, odizolowanych od siebie warstwą szelaku (dlaczego?). Obwód pierwotny zawiera przerywacz młoteczkowy p, działający na tej samej zasadzie co młoteczek dzwonka elektrycznego (rdzeń przyciąga młoteczek — obwód się przerywa — młoteczek odskakuje — obwód zostaje zamknięty — rdzeń przyciąga młoteczek — itd.). Obwód wtórny składa się z kilkudziesięciu tysięcy zwojów cienkiego drutu. Jest on nawinięty na kilku oddzielnych płaskich szpulach, które umieszczone są obok siebie na rdzeniu z uzwojeniem pierwotnym. W obwodzie tym powstaje siła elektromotoryczna indukcji dochodząca do kilkudziesięciu, a w większych cewkach nawet do kilkuset tysięcy woltów. Końce wtórnego uzwojenia dołączone są do iskiernika.

Aby cewka dawała wysokie napięcie, czas włączania i wyłączania prądu przez przerywacz musi być możliwie krótki, ponieważ szybkość zmian strumienia indukcji winna być wielka. Tymczasem czas włączania jest dość długi, gdyż po włączeniu prąd narasta powoli, sprzeciwia mu się bowiem siła elektromotoryczna indukcji własnej. Zanika ona jednak stopniowo i prąd dochodzi do wartości stałej (krzywa kropkowana na rys. 4.29). Zanim jednak to się stanie, młoteczek odskoczy od kontaktu i przerwie prąd. Przerwanie prądu jest dość nagłe, ale i tu indukcja własna robi swoje: w czasie przerwania prądu wytwarza się siła elektromotoryczna, która w przerywaczu, między śrubą i blaszką,

powoduje iskrę. Ma to ten skutek, że nawet gdy blaszka odskoczy od śruby, prąd jeszcze płynie przez iskrę. Aby zapobiec temu szkodliwemu zjawisku, między przewody a i b przerywacza włącza się kondensator C (kilka μF). Wówczas w chwili przerwania prądu — prąd indukcji własnej ładuje kondensator, oczywiście do niewielkiego napięcia (duża



Rys. 4.28. Cewka Ruhmkorffa w rysunku schematycznym



Rys. 4.29. U góry: krzywa prądu w obwodzie pierwotnym cewki indukcyjnej. U dołu: krzywa siły elektromotorycznej w obwodzie wtórnym. a — moment włączania prądu, b — moment przerywania prądu, c — moment zniknięcia strumienia indukcji w rdzeniu

pojemność), wskutek czego napięcie między śrubą a blaszką jest bez porównania niższe niż poprzednio, gdy nie było kondensatora; iskra więc nie przeskakuje i prąd w uzwojeniu pierwotnym szybko zanika (rys. 4.29).

Z takiego przebiegu prądu pierwotnego widzimy, że siła elektromotoryczna indukowana w obwodzie wtórnym będzie niewielka w czasie włączania, natomiast wielka — w czasie wyłączania. Praktycznie rzecz biorąc, cewka indukcyjna daje wysokie napięcie tylko w chwili wyłączania prądu w obwodzie pierwotnym. To wysokie napięcie, panujące na biegunach iskiernika cewki jest silnie tętniące i praktycznie biorąc, jednokierunkowe. Tętnienie napięcia stanowi poważną wadę cewki indukcyjnej; nie może więc być ona używana do takich prac, które wymagają stałości napięcia.

Aby lepiej zrozumieć rolę indukcji własnej i rolę kondensatora w działaniu przerywacza — porównaj zagadnienia 4.17 i 4.20.

Opisane tutaj sposoby transformowania prądu stałego mają jedynie znaczenie w pracy laboratoryjnej; natomiast nie nadają się do stosowania w szerszej skali technicznej.

b) Transformowanie prądu stałego w skali technicznej. Problem ten jest właściwie nie rozwiązany. Na małą skalę do transformowania prądu stałego stosuje się zespoły silnik-prądnica. Silnik pobiera prąd pod napięciem U_1 i obraca prądnicę, która wytwarza prąd o napięciu U_2. Tego rodzaju zespoły, zwane *przetwornicami*, budują nawet w postaci jednego przyrządu, który ma wspólny kadłub, wspólną magneśnicę i wspólny wirnik dla obu rodzajów prądu. Jedynie uzwojenia i kolektory są oddzielne dla prądu pierwotnego i wtórnego. Wadą tych przetwornic, jak i innych transformatorów prądu

stałego jest to, że mają ruchome części. Części te narażone są na zużycie, a zresztą stanowią dodatkową przyczynę strat mocy. Poza tym przetwornice tego rodzaju, podobnie jak i prądnice prądu stałego, nie mogą być wyrabiane na wyższe napięcia niż parę tysięcy woltów, ponieważ groziłoby to iskrzeniem między wycinkami kolektora. Tymczasem wysokie napięcie jest nieodzowne, jeśli chodzi o przesyłanie energii elektrycznej na duże odległości (por. zagadnienia 1.16 i 1.17).

c) O konieczności stosowania wysokiego napięcia. Przypuśćmy, że elektrownia ma wysyłać do odległej miejscowości prąd i pod napięciem U, a więc o mocy $M = Ui$. W kablu łączącym elektrownię z tą miejscowością część energii elektrycznej zamienia się na ciepło, mianowicie w ciągu sekundy Ri^2, gdzie R jest oporem kabla; innymi słowy, moc stracona w kablu wynosi $m = Ri^2$. Wzdłuż kabla istnieje spadek napięcia wynoszący Ri. Otóż nie można do tego dopuścić, aby strata mocy Ri^2 stanowiła zbyt dużą część mocy całkowitej Ui, czyli, aby spadek napięcia wzdłuż kabla Ri był znaczny. Chodzi więc o to, aby stosunek

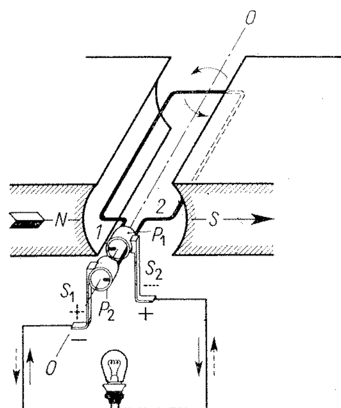
$$\frac{m}{M} = \frac{Ri^2}{Ui} = \frac{Ri}{U} = M\frac{R}{U^2}$$

miał jak najmniejszą wartość. Osiągnąć to można dwoma sposobami: a) przez zmniejszenie oporu R kabla; jednak ten sposób wymagałby nieraz stosowania kabli o bardzo wielkiej średnicy (por. zagadnienie 1.17), co przy długich liniach przesyłowych pociągałoby za sobą fantastycznie wysokie koszty, i b) przez zmniejszenie natężenia prądu przesyłanego i; ten sposób jednak wymaga odpowiedniego zwiększenia napięcia U, aby moc Ui pozostała ta sama. Ten więc sposób daje się zrealizować przez: 1) stosowanie wysokich napięć przesyłowych (zazwyczaj 5—200 kV) i 2) stosowanie na miejscu odbioru transformatorów zamieniających wysokie napięcie na niskie (rzędu 100 V). Te dwa ważne zadania elektrotechniki nie dają się rozwiązać przy użyciu prądu stałego. Natomiast dają się rozwiązać przy użyciu prądu przemiennego. Stąd pochodzi wielka doniosłość prądu przemiennego w elektrotechnice.

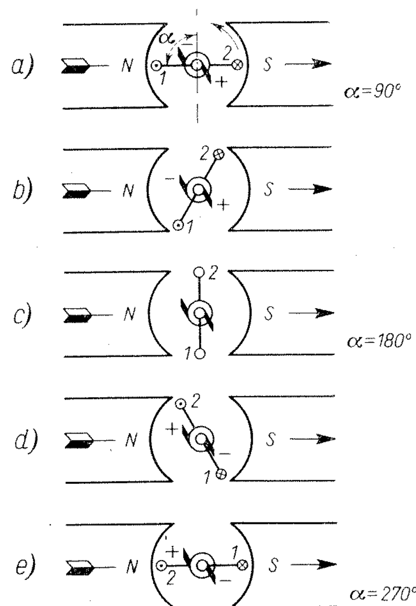
C. Prąd przemienny

***§ 4.21. Zasada działania prądnicy prądu przemiennego.** Przypomnijmy sobie, że w tworniku prądu stałego (rys. 4.16) wytwarzał się prąd indukcyjny pulsujący raz w jedną, raz w drugą stronę. Zadaniem kolektora było „wyprostowanie" tych pulsacji. Odrzućmy teraz kolektor, a oba końce ramki wirującej w roli twornika (rys. 4.30) połączmy z metalowymi pierścieniami P_1 i P_2, osadzonymi na osi twornika i odizolowanymi od niej. Prąd zbierają szczotki S_1 i S_2, do których przyłączony jest obwód zewnętrzny; na rysunku zawiera on żarówkę. Zrozumiałą jest rzeczą, że w obwodzie zewnętrznym, który jest dalszym ciągiem obwodu wewnętrznego, tj. ramki, krąży teraz prąd taki jak w ramce, a więc zmieniający kierunek co pół obrotu ramki. Taki prąd nazywa się prądem *zmiennym* lub właściwiej *przemiennym*. Prądnica wyobrażona na rys. 4.30 jest źródłem prądu przemiennego. Bieguny takiego źródła prądu, w tym wypadku szczotki S_1 i S_2, nie mają stałych znaków + i —; znaki te zmieniają się w zależności od kierunku prądu indukowa-

nego. Objaśnia to bliżej rys. 4.31 wyobrażający szereg kolejnych pozycji ramki. Widzimy, że gdy druty „czynne" (równoległe do osi obrotu) mają pozycję neutralną (c), kierunek prądu zmienia się. W ciągu jednego pełnego obrotu druty czynne dwa razy mijają po-



Rys. 4.30. Zasada działania prądnicy prądu przemiennego; P_1, P_2 — pierścienie



Rys. 4.31. Obrazy „kinematograficzne" ramki powyższej prądnicy w ruchu. Pierścienie, dla jasności, są tutaj różnej wielkości

zycję neutralną, wobec tego prąd dwa razy zmienia kierunek w ciągu obrotu. Każda szczotka w ciągu jednego obrotu jest zatem raz dodatnim biegunem źródła prądu i raz ujemnym.

Jeśli obwód zewnętrzny przerwiemy, prąd przestanie płynąć; panujące teraz między szczotkami przemienne napięcie jest równe sile elektromotorycznej E prądnicy. Tę siłę elektromotoryczną indukowaną w ramce obliczyliśmy już w § 4.14. Wyraża ją wzór (4.27):

$$E = \frac{2\pi}{T}\Phi \sin\frac{2\pi}{T}t,$$

gdzie $\frac{2\pi}{T}t = \alpha$ jest kątem obrotu, liczonym od linii neutralnej do drutu *1* (por. rys. 4.18). Zależność E od α przedstawia graficznie sinusoida (rys. 4.32). Oznaczając amplitudę tej sinusoidy $\frac{2\pi}{T}\Phi$ literą E_0 mamy

$$E = E_0 \sin\frac{2\pi}{T}t. \tag{4.31}$$

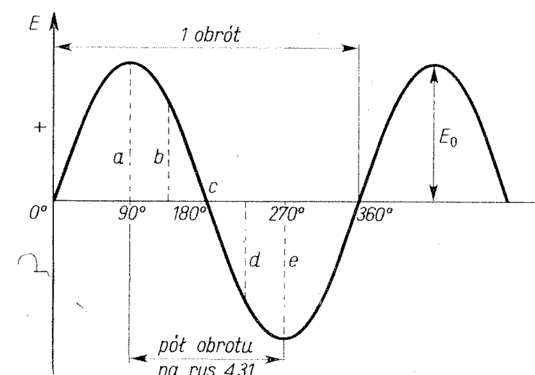
Widzimy, że dla $\alpha = 90°$ (na rys. 4.31) siła elektromotoryczna jest największa i wynosi

$$E = E_0 = \frac{2\pi}{T}\Phi.$$

W tym właśnie momencie szczotka S_1 jest ujemnym biegunem, a szczotka S_2 — dodatnim. Dla $\alpha = 180°$ siła elektromotoryczna znika: $E = 0$. Dla $\alpha = 270°$ siła elektromotoryczna znów jest największa co do wartości bezwzględnej, lecz ma znak przeciwny,

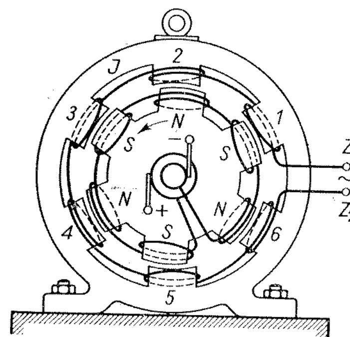
$$E = -E_0 = -\frac{2\pi}{T}\Phi.$$

Oznacza to, że jej kierunek jest przeciwny, tzn. że teraz szczotka S_1 jest dodatnim biegunem źródła prądu, a S_2 — ujemnym.



Rys. 4.32. Wykres siły elektromotorycznej prądnicy prądu przemiennego; *a*, *b*, *c*, *d*, *e* — odpowiadają położeniom ramki z rys. 4.31; E_0 — amplituda siły elektromotorycznej

*§ **4.22. Budowa prądnicy.** Prądnicę prądu przemiennego przedstawia schematycznie rys. 4.33. Twornik jej jest nieruchomy; składa się z sześciu zwojnic *1*, *2*, ..., *6*, nawiniętych w żłobkach jarzma *J*, które na rysunku przedstawione są w przesadnych rozmiarach.



Rys. 4.33. Schematyczny rysunek prądnicy prądu przemiennego. *1*, *2*, ..., *6* — zwojnice nieruchomego twornika; *N*, *S* — bieguny wirującego elektromagnesu, Z_1, Z_2 — zaciski prądnicy, ~ symbol prądu przemiennego

Jarzmo składa się z cienkich odizolowanych blach. Na rysunku zastępuje ono korpus maszyny; w rzeczywistości jednak jarzmo znajduje się wewnątrz korpusu wykonanego z odlewu żelaznego. Ruchomą częścią prądnicy jest elektromagnes o sześciu biegunach

zasilany z oddzielnego źródła prądu stałego. Doprowadzenie tego prądu umożliwiają dwie szczotki, ślizgające się po dwóch pierścieniach, połączonych z końcami uzwojenia elektromagnesu. Bieguny elektromagnesu muszą być parami różnoimienne; dlatego zwojnice elektromagnesu mają na przemian różne kierunki nawinięcia. W chwili, którą wyobraża rysunek, bieguny elektromagnesu zbliżają się do zwojnic twornika i indukują w nich siły elektromotoryczne. Ale bieguny są różnoimienne, a siły elektromotoryczne zwojnic muszą się dodać, a nie znieść. Dlatego kierunki nawinięcia zwojnic są na przemian przeciwne, co wyraźnie widać na rysunku. Na zaciskach Z_1 i Z_2 wytwarza się napięcie przemienne, równe w każdej chwili sześciokrotnej sile elektromotorycznej zwojnicy. Doświadczenie pokazuje, że prąd, jaki daje taka prądnica, ma przebieg w dużym przybliżeniu sinusoidalny; wyraża się więc wzorem

$$i = i_0 \sin \frac{2\pi}{T} t, \tag{4.32}$$

gdzie T nie oznacza bynajmniej czasu obrotu wirnika, lecz jego trzecią część, ogólnie jego p-tą część, gdzie p jest ilością par biegunów elektromagnesu. T jest okresem zmian kierunku prądu, lub krócej — okresem prądu. Jego odwrotność $f = \frac{1}{T}$ nazywa się *częstotliwością prądu* (nie należy mieszać z liczbą obrotów wirnika N!). Równanie (4.32) można więc napisać tak:

$$i = i_0 \sin 2\pi f t. \tag{4.32a}$$

Prąd przemienny wytwarzany przez elektrownie ma zazwyczaj częstotliwość $f = 50$ okresów na sekundę (krócej $f = 50\ s^{-1}$). Jednostką częstotliwości jest oczywiście „jeden na sekundę", czyli 1/s lub s^{-1}; jednostkę tę nazywają niekiedy „cyklem na sekundę", a w dziedzinie fal elektromagnetycznych, ku czci Hertza, również *hercem* (1 Hz):

$$1\ \text{Hz} = 1\ \text{c/s} = 1\ \text{s}^{-1}.$$

Wartość natężenia prądu i nosi nazwę *wartości chwilowej* (ponieważ takie natężenie ma prąd w chwili t). Wartość natężenia prądu i_0 jest największa ze wszystkich wartości chwilowych i nosi nazwę *amplitudy* natężenia prądu albo *wartości szczytowej* natężenia prądu. Kąt $2\pi f t$ nosi nazwę *fazy prądu*. Częstotliwość f pomnożoną przez 2π oznacza się literą ω:

$$\omega = 2\pi f;$$

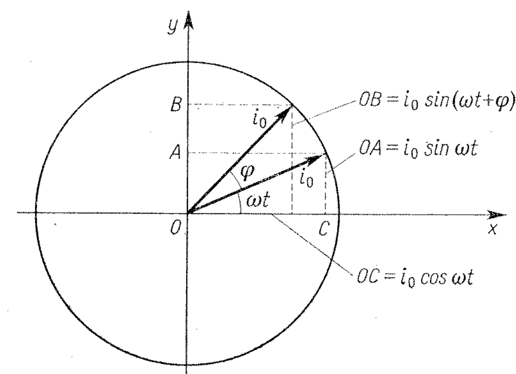
nazywamy ją *częstotliwością kołową*. Jest to liczba okresów prądu T, jaka mieści się w 2π sekundach: $2\pi/T$. W mechanice ω oznacza prędkość kątową punktu po okręgu koła. Kąt $\alpha = \omega t$ jest kątem zakreślonym przez promień wodzący owego punktu w ciągu t sekund. Równanie (4.32a), wyrażające przebieg natężenia prądu w czasie, napisać można tak:

$$i = i_0 \sin \omega t. \tag{4.32b}$$

Jeśli dla chwili początkowej, $t = 0$, faza prądu nie jest równa zeru, lecz wynosi np. φ, wówczas równanie prądu ma postać:

$$i = i_0 \sin(\omega t + \varphi). \tag{4.32c}$$

Mówimy, że ten ostatni prąd *wyprzedza* w fazie o φ prąd wyrażony równaniem (4.32b). Interpretację geometryczną obu równań prądu przedstawia rys. 4.34. Widzimy na nim, że prąd szczytowy i_0 wyobrazić sobie można jako wektor, który obraca się dookoła swojego początku (punktu O) z prędkością kątową ω. Wówczas jego składowa na oś y reprezentuje wartość chwilową prądu i.



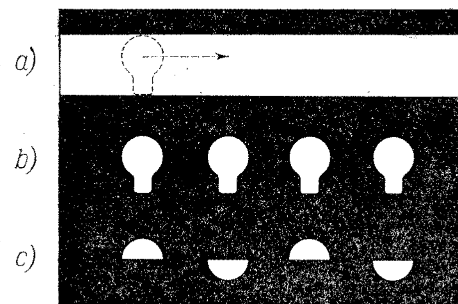
Rys. 4.34. Interpretacja geometryczna równań (4.32 b, c, d) prądu przemiennego

Gdyby prąd wyrazić równaniem

$$i = i_0 \cos \omega t, \tag{4.32d}$$

wówczas wartość chwilową i reprezentowałaby składowa wektora i_0 na oś x.

***§ 4.23. Kilka doświadczeń z prądem przemiennym.** a) Żarówka włączona w obwód prądu przemiennego świeci bez migotania. Pochodzi to przede wszystkim stąd, że włókno lampy nie zdąży ostygnąć po jednym impulsie prądu, gdy je po upływie 1/100 sekundy rozżarza następny impuls; tę właściwość określa się, jako „bezwładność" cieplną włókna. Lampka neonowa jarząca się pod wpływem prądu przemiennego robi wrażenie również

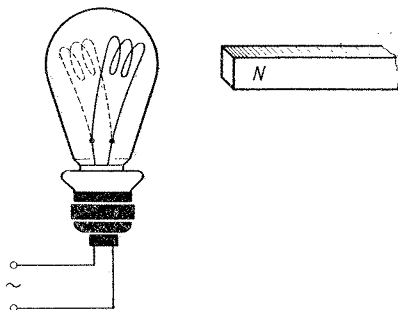


Rys. 4.35. Obraz w zwierciadle wirującym: a) żarówki, b) neonówki, c) neonówki ustawionej tak, aby jedna elektroda była nad drugą. Półkolami jasnymi zaznaczono symbolicznie świecące elektrody

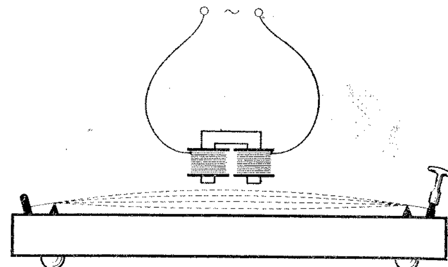
nie migocącej. Zbyt pospieszny byłby jednak wniosek, że świecenie neonu odznacza się również „bezwładnością". A to dlatego, że oko ludzkie nie jest w stanie odróżnić poszczególnych migotań, czy błysków, jeśli tylko odbywają się one z większą częstotliwością niż 10—20 na sekundę. Lecz zastosujmy znaną metodę zwierciadła wirującego. Obserwując żarówkę i neonówkę w zwierciadle wirującym stwierdzamy, że żarówka daje wstęgę

ciągłą, podczas gdy neonówkę widzimy jako wstęgę poprzerywaną (rys. 4.35b); jasne plamy na ciemnym tle — to obrazy neonówki, rozbłyskującej co 1/100 sekundy, ciemne — to obrazy neonówki nie świecącej. Jeśli ustawimy neonówkę w taki sposób, aby jedna elektroda była nad drugą, zobaczymy, że elektrody świecą na przemian (rys. 4.35c). Jest to zrozumiałe, ponieważ prąd zmienia kierunek, a gaz w lampce jarzy się tylko w okolicy katody. W braku zwierciadła wirującego możemy zastosować bardziej prymitywny sposób. Mianowicie nastawiwszy wzrok na nieskończenie odległy punkt, obracajmy szybko głowę w prawo i w lewo, zmieniając odpowiednio kierunek patrzenia. Lampka stojąca przed nami ukaże się na siatkówce oka w postaci wstęgi. Migotanie neonówki, niewidoczne poprzednio, objawi się teraz jak na rys. 4.35b lub c.

b) Żarówkę węglową (tzn. o włóknie węglowym) dołączmy do sieci prądu przemiennego i zbliżmy do niej magnes (rys. 4.36). Włókno żarówki zaczyna silnie drgać. Oto wytłumaczenie: włókno żarówki węglowej ma postać swego rodzaju solenoidu; ponieważ bieguny jego zmieniają się 100 razy na sekundę, przeto biegun znajdujący się bliżej magnesu jest 50 razy w ciągu sekundy przyciągany i tyleż razy odpychany.



Rys. 4.36. Włókno żarówki węglowej silnie drga, gdy zbliżyć doń magnes (~ symbol prądu przemiennego)



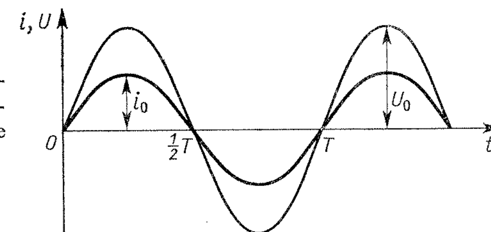
Rys. 4.37. Elektromagnes zasilany prądem przemiennym wywołuje drgania struny

c) Do struny stalowej, słabo naciągniętej na tzw. monochordzie, zbliżamy bieguny elektromagnesu zasilanego prądem przemiennym (rys. 4.37). Struna słabo drga. Naciągajmy kluczem strunę coraz silniej. Struna drga coraz silniej, a wreszcie amplituda drgań osiąga maksimum. Jest to moment rezonansu: zgodność podwójnej częstości prądu z częstością drgań własnych struny. Nietrudno to zrozumieć. Bieguny elektromagnesu indukują w strunie bieguny magnetyczne przeciwnego znaku i przyciągają strunę. Przyciąganie struny nie zależy więc od tego, czy bieguny elektromagnesu mają takie czy inne znaki. Ponieważ kierunek prądu zmienia się 100 razy na sekundę, zatem 100 razy na sekundę struna pociągana jest ku górze i 100 razy opada ku dołowi, w momentach, gdy prąd w elektromagnesie znika. Naciągając w dalszym ciągu strunę coraz silniej obserwujemy zanik rezonansu: amplituda drgań szybko maleje. Lecz wkrótce amplituda znów rośnie i znów osiągamy rezonans. Tym razem jednak pojawia się węzeł w środku i obie części struny drgają z podwójną częstością równą 200 s^{-1}. Struna wydaje ton o oktawę wyższy od

poprzedniego; jest to ton zwany *drugim harmonicznym*, dla odróżnienia od tonu podstawowego, najniższego, który jest *pierwszym harmonicznym*.

d) Do zacisków sieci prądu przemiennego dołączamy żarówkę i szeregowo z nią połączony zwykły amperomierz magnetyczny. Wskazówka amperomierza nie wychyli się. Przez cewkę jego bowiem przepływa prąd 50 razy na sekundę w jedną stronę i tyleż razy w drugą, a ponieważ znajduje się ona w stałym polu magnetycznym magnesu, przeto zostaje 50 razy na sekundę pchnięta w prawo i 50 razy — w lewo. Zanim zdąży odchylić się po pierwszym pchnięciu, otrzymuje drugie, przeciwnie skierowane. Bezwładność jej sprawia, że pozostaje w miejscu.

§ 4.24. Opór w obwodzie prądu przemiennego. Jeśli w obwodzie generatora prądu przemiennego umieścimy opór R, to przepływać przez niego będzie, jak już mówiliśmy, prąd przemienny, którego natężenie i zmienia wielkość i kierunek tak, jak rzędne sinusoidy [por. wzór (4.32b)]. Weźmy pod uwagę przedział czasu Δt, tak krótki w stosunku do okresu T prądu, że w ciągu tego czasu możemy i uważać za stałe. Zastosujmy prawo Ohma, aby obliczyć napięcie U na końcach oporu R



Rys. 4.38. Napięcie na końcach oporu i natężenie prądu są w zgodnej fazie (na osi odciętych — czas; na osi rzędnych — napięcie i natężenie)

$$U = Ri.$$

Stosuje się ono dla każdego przedziału czasu, byle dostatecznie krótkiego, czyli inaczej się wyrażając „dla każdej chwili". Ponieważ natężenie prądu wyraża się równaniem (4.32b),

$$i = i_0 \sin \omega t, \tag{4.32b}$$

przeto w każdej chwili napięcie na oporze R wyraża się wzorem

$$U = Ri_0 \sin \omega t.$$

Wykres jego jest zatem sinusoidą o amplitudzie

$$U_0 = Ri_0;$$

inaczej

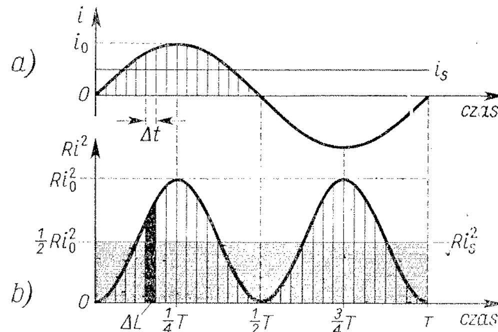
$$U = U_0 \sin \omega t. \tag{4.33}$$

Wzory (4.32b) i (4.33) pouczają nas, że gdy prąd przemienny przepływa przez opór, napięcie U i natężenie i są w *zgodnej fazie*, ponieważ kąty w obu wzorach są identyczne (ωt). Impulsy napięcia i natężenia są synchroniczne, żadne nie spóźniają się względem drugich. Graficznie ilustruje to rysunek 4.38, na którym widzimy wykresy funkcji i oraz U w zależności od czasu.

§ **4.25. Energia wydzielona w przewodniku.** Niech przez przewodnik o oporze R przepływa prąd przemienny, którego natężenie, jak już wiemy, wyraża wzór

$$i = i_0 \sin \frac{2\pi}{T} t .$$

Podzielmy okres T na bardzo wiele drobnych przedziałów Δt. W każdym z tych przedziałów prąd ma pewne natężenie i niemal stałe, ponieważ Δt jest niezmiernie krótkie



Rys. 4.39. a) Przebieg funkcji i w czasie; i_s — natężenie skuteczne. b) Przebieg funkcji Ri^2 (mocy) w czasie; pole zakreskowane pionowo jest miarą pracy L prądu przemiennego; pole zakreskowane poziomo o tej samej wielkości jest miarą pracy prądu stałego o natężeniu skutecznym i_s

(rys. 4.39a). Wobec tego energia, która w ciągu czasu Δt zostanie w oporze wydzielona w postaci ciepła wynosi

$$\Delta L = Ri^2 \Delta t = Ri_0^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \Delta t .$$

Aby obliczyć całkowitą energię L wydzieloną w oporze w ciągu jednego okresu T, należy zsumować wszystkie ΔL:

$$L = \Sigma \Delta L$$

(rys. 4.39b). Obliczenie tej sumy stanie się bardzo łatwe, jeżeli zastosujemy znany wzór z trygonometrii:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} ,$$

biorąc jako α kąt $\frac{2\pi}{T} t$. Otrzymujemy wtedy

$$\Delta L = R \frac{i_0^2}{2} \Delta t - \frac{1}{2} Ri_0^2 \cos\left(\frac{2\pi}{T/2} t\right) \Delta t .$$

Widzimy, że należy zsumować wszystkie pierwsze wyrazy i wszystkie drugie wyrazy wzięte kolejno dla wszystkich przedziałów Δt. Pierwsze wyrazy zsumowane dają w wyniku $R \frac{i_0^2}{2} T$. Natomiast drugie wyrazy, będące wartościami funkcji cosinus (o okresie $\frac{1}{2} T$), występują równie często ze znakiem $+$, jak i ze znakiem $-$. Po zsumowaniu dadzą więc 0. A zatem cała energia wydzielona w ciągu okresu T wynosi

$$L = R \frac{i_0^2}{2} T . \qquad (4.34)$$

§ **4.26. Natężenie i napięcie skuteczne.** Zapytajmy: jakie natężenie i_s musiałby mieć prąd stały, aby w ciągu tego samego czasu wydzielić tę samą ilość energii cieplnej, co prąd przemienny. Korzystając ze wzoru (4.34) napiszemy warunek ten w postaci równania

$$R \frac{i_0^2}{2} T = Ri_s^2 T .$$

Stąd obliczymy szukane natężenie

$$i_s = \frac{i_0}{\sqrt{2}} = \frac{i_0}{1{,}414} = 0{,}707\, i_0 . \qquad (4.35)$$

Prąd przemienny o amplitudzie i_0 przepływając przez opór wydziela w nim tyle ciepła, ile wydzieliłby w ciągu tego samego czasu prąd stały o natężeniu i_s, które jest $\sqrt{2} = 1{,}414$ razy mniejsze od i_0. To natężenie i_s nazywa się *natężeniem skutecznym* prądu przemiennego. Jeżeli natężenie skuteczne prądu wynosi $i = 1$ A, to jego amplituda, czyli natężenie maksymalne albo inaczej szczytowe, wynosi $i_0 = 1{,}414$ A. Nazwijmy napięciem skutecznym U_s panującym na końcach przewodnika iloczyn oporu przewodnika i natężenia skutecznego:

$$U_s = Ri_s .$$

Stosując wzór (4.35) otrzymujemy: $U_s = R \frac{i_0}{\sqrt{2}}$. Ale Ri_0 jest to napięcie maksymalne, czyli szczytowe U_0 (por. § 4.24). Zatem

$$U_s = \frac{U_0}{\sqrt{2}} = \frac{U_0}{1{,}414} = 0{,}707\, U_0 . \qquad (4.36)$$

Napięcie skuteczne prądu przemiennego jest również 1,414 razy mniejsze od napięcia szczytowego. Jeżeli np. napięcie skuteczne wynosi $U_s = 120$ V, to napięcie szczytowe $U_0 = 120 \cdot 1{,}414$ V $= 169{,}7$ V.

Obliczyliśmy przed chwilą energię cieplną, wydzieloną w oporze R w czasie T; dzieląc to wyrażenie przez T otrzymujemy tzw. *średnią moc* M_s prądu przemiennego:

$$M_s = R \frac{i_0^2}{2} = Ri_s^2 .$$

Ale Ri_s jest to napięcie skuteczne U_s. Zatem

$$M_s = U_s i_s . \qquad (4.37)$$

Moc średnia, wydzielona w postaci ciepła w oporze przez prąd przemienny, równa jest iloczynowi napięcia skutecznego panującego na końcach tego oporu i natężenia skutecznego prądu przezeń przepływającego.

Zastrzec należy, że powyższy wynik jest słuszny tylko dla tych części obwodu, które mają znikomą indukcję własną, a więc dla oporników, żarówek, grzejników itp.; natomiast traci swoją moc dla tych części obwodu, które zawierają cewki, szczególnie z rdzeniem (por. § 4.30).

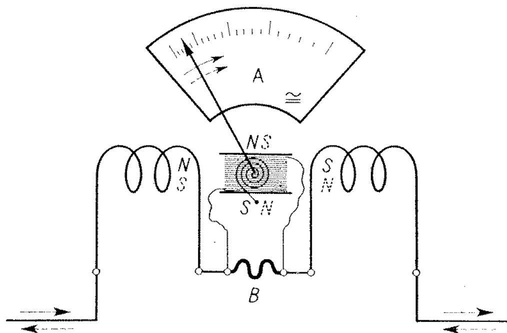
Rachunek, jaki w poprzednim paragrafie zastosowaliśmy do obliczenia pracy prądu elektrycznego, był „właściwie zamaskowanym” całkowaniem. Kto zna rachunek całkowy, nie potrzebuje uciekać się do rozmaitych mniej lub więcej dowcipnych sposobów ominięcia trudności rachunkowych, lecz obliczy od razu moc średnią w następujący prosty sposób:

$$M_s = \frac{1}{T}\int_0^T Ri^2\,dt = \frac{Ri_0^2}{T}\int_0^T \sin^2\frac{2\pi}{T}t\,dt = \frac{Ri_0^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\alpha\,d\alpha = \frac{Ri_0^2}{2} = R\left(\frac{i_0}{\sqrt{2}}\right)^2 = Ri_s^2;$$

albo, co na jedno wychodzi:

$$M_s = \frac{1}{T}\int_0^T Ui\,dt = \frac{U_0 i_0}{T}\int_0^T \sin^2\frac{2\pi}{T}t\,dt = \frac{U_0 i_0}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\alpha\,d\alpha = \frac{U_0 i_0}{2} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}\frac{i_0}{\sqrt{2}} = U_s i_s.$$

*§ **4.27. Przyrządy miernicze.** a) Amperomierz cieplny. W § 1.9 poznaliśmy amperomierz cieplny (rys. 1.18), w którym wychylenie wskazówki zależne było jedynie od temperatury cienkiego drucika, przez który przepuszcza się mierzony prąd. Ponieważ drucik stale ostyga, przeto jego temperatura, a więc i wychylenie wskazówki, zależne są od ilości ciepła dostarczonego mu w jednostce czasu. Weźmy pod uwagę amperomierz cieplny wyskalowany (por. § 1.10) przy pomocy prądu stałego. Przepuśćmy przez niego prąd przemienny; wskazówka wychyla się i pokazuje np. x amperów. Jakie znaczenie fizyczne ma x? Wychylenie „x” wskazuje nam, że przez drucik przyrządu musiałoby płynąć x amperów prądu stałego, aby dać takie właśnie wychylenie. To znaczy, że x amperów prądu stałego wydziela w druciku tyle ciepła na sekundę, ile właśnie wydziela przepływający przez amperomierz prąd przemienny. Wynika stąd jasno, że „x amperów” jest to natężenie skuteczne i_s prądu przemiennego. *Amperomierz cieplny wskazuje więc natężenie skuteczne prądu przemiennego.*



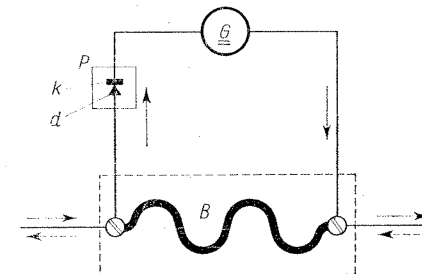
Rys. 4.40. Schemat amperomierza elektrodynamicznego. Kierunkowi prądu → odpowiadają bieguny oznaczone literami ciągłymi; natomiast kierunkowi prądu ⇢ odpowiadają bieguny oznaczone literami kropkowanymi. Przyrząd nadaje się zarówno dla prądu stałego, jak i przemiennego (symbol ≅)

b) Amperomierz elektrodynamiczny. W § 4.23d przekonaliśmy się, że zwykły amperomierz magnetyczny, np. z ruchomą cewką, pod wpływem prądu przemiennego nie daje wychylenia. Inaczej jednak rzecz by się miała, gdyby cewka amperomierza znajdowała się nie w polu trwałego magnesu, lecz w polu elektromagnesu, albo lepiej (ze względu na histerezę) w polu solenoidu, przez który przepływa ten sam prąd, co i przez ruchomą cewkę. Rysunek 4.40 wyjaśnia w dostatecznie zrozumiały sposób interesującą

właściwość tego przyrządu: kierunek wychylenia wskazówki nie zależy od kierunku prądu. Pochodzi to stąd, że przy zmianie kierunku prądu zmieniają się zarówno bieguny solenoidu nieruchomego, jak i bieguny ruchomej cewki. Wobec tego siły działające na zwoje cewki nie zmieniają kierunku. Dlatego wskazówka amperomierza wychyla się pod wpływem prądu przemiennego. Przyrząd ten nazywa się *amperomierzem elektrodynamicznym.*

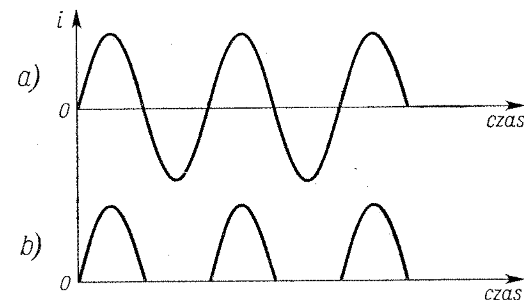
Nietrudno udowodnić (podobnie jak to zrobiliśmy niżej, w punkcie e), że wychylenie wskazówki amperomierza elektrodynamicznego jest proporcjonalne do i^2 i że amperomierz wyskalowany prądem stałym mierzy natężenie skuteczne prądu przemiennego. Zresztą amperomierz można wyskalować prądem przemiennym, porównując jego wskazania ze wskazaniami amperomierza cieplnego, włączonego szeregowo do tego samego obwodu.

c) Amperomierz magnetyczny z prostownikiem. Wykonajmy następujące doświadczenie. Przez bocznik odłączony od amperomierza przepuśćmy prąd przemienny, np. zasilający żarówkę. Jeśli do zacisków bocznika dołączymy galwanometr, czy mili-



Rys. 4.41. Doświadczenie: galwanometr lub miliamperomierz G na prąd stały (symbol =) daje wychylenie pod wpływem prądu przemiennego, wyprostowanego przez prostownik P (dioda krystaliczna), B — bocznik. Jednocześnie: schemat amperomierza magnetycznego z prostownikiem

amperomierz magnetyczny G (rys. 4.41), to jak już pokazało doświadczenie d) w § 4.23, wskazówka przyrządu nie wychyli się. Ale włączmy do obwodu galwanometru (nie do obwodu głównego!) „diodę krystaliczną” P, jaką stosują w radioodbiornikach do



Rys. 4.42. Natężenie prądu płynącego przez galwanometr (rys. 4.41): a) bez użycia prostownika, b) z zastosowaniem prostownika

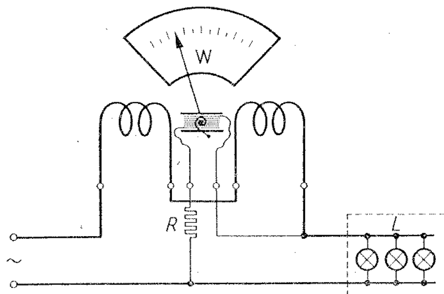
prostowania prądu przemiennego. Jest to przyrząd składający się z kryształka k (germanu, krzemu itp.), do którego przytknięte jest ostrze d (por. cz. 2, Elektryczność i materia). Ma on tę właściwość, że przepuszcza prąd tylko w jednym kierunku. Ta właściwość nazywa się „prostowaniem” prądu: prąd przemienny zamienia się w obwodzie prostownika na prąd tętniący (rys. 4.42). Wskazówka galwanometru wychyli się. Bez-

władność sprawia, że wskazówka nie drga. Przyrząd opisany można wyskalować porównując go z amperomierzem cieplnym lub z jakimkolwiek innym, byle wyskalowanym. W ten sposób na tarczy galwanometru G możemy odczytać natężenie skuteczne prądu przemiennego w amperach.

Na wyżej opisanej zasadzie oparte są nowoczesne amperomierze prądu przemiennego. Przyrząd mierniczy (galwanometr, miliamperomierz), prostownik i szereg boczników znajduje się we wspólnej skrzyneczce; boczniki można dowolnie przełączać, zależnie od żądanego zakresu pomiarów. Ponieważ tzw. prostowniki suche (por. część 2) tak dalece udoskonalono, że odznaczają się one bardzo stałym działaniem, przeto amperomierze magnetyczne z prostownikiem coraz bardziej się rozpowszechniają.

d) Woltomierze. Wszystkie wyżej opisane amperomierze mogą być z łatwością zamienione na woltomierze przez odłączenie bocznika, a dołączenie w szereg bardzo wielkiego oporu (por. rys. 1.29).

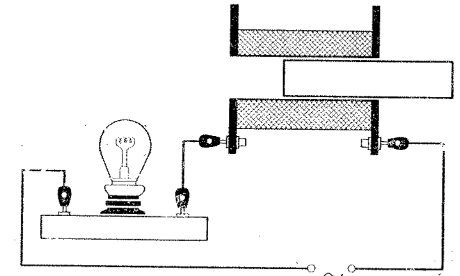
e) Watomierz. Przypuśćmy, że mamy zmierzyć moc prądu przemiennego dostarczoną odbiornikowi energii elektrycznej L (rys. 4.43). Do obwodu włączamy amperomierz elektrodynamiczny w ten sposób, aby cały prąd i przepłynął przez nieruchomą zwojnicę przyrządu. Pole magnetyczne H, jakie wytwarza, jest proporcjonalne do i (prawo



Rys. 4.43. Watomierz W mierzy moc wytwarzaną przez prąd przemienny w odbiorniku energii elektrycznej L

Biota—Savarta). Jeśli cewkę ruchomą tego przyrządu połączymy przez wielki opór R z zaciskami odbiornika L, to przez jej zwoje przepływać będzie słaby prąd i' w każdej chwili proporcjonalny do napięcia U panującego na zaciskach odbiornika. Ponieważ siła działająca na zwoje ruchomej cewki jest proporcjonalna do Hi' (prawo Laplace'a), przeto jest również proporcjonalna do iU, czyli do mocy w danej chwili. Gdyby wskazówka była wolna od bezwładności, wykonywałaby drgania z częstotliwością 100 na sekundę, odpowiednio do drgań mocy (por. rys. 4.39b), dookoła pewnego położenia równowagi, zależnego jedynie od mocy średniej. Ale ponieważ wskazówka ma bezwładność, która jej nie pozwala na podążanie za drganiami mocy, zajmie ona pewne położenie średnie, zależne jedynie od średniej wartości mocy. W ten sposób przyrząd ten, wyskalowany prądem stałym, będzie wskazywał moc średnią prądu przemiennego w watach; dlatego nazywa się *watomierzem*.

§ 4.28. Podwójna rola indukcji własnej w obwodzie prądu przemiennego. Dane doświadczalne. a) Zmniejszanie natężenia prądu. Do obwodu żarówki elektrycznej, żarzonej ze źródła prądu przemiennego (rys. 4.44), włączmy szeregowo cewkę bez rdzenia, zawierającą kilka tysięcy zwojów niezbyt cienkiego izolowanego drutu (oczywiście miedzianego, np. o średnicy 0,5 mm). Dołączenie cewki prawie wcale nie osłabia żarzenia się lampki, co dowodzi, że opór tej cewki oraz jej indukcyjność własna wpływają tylko bardzo nieznacznie na natężenie prądu w obwodzie. Wprowadźmy jednak do cewki rdzeń żelazny, co, jak wiemy, bardzo znacznie zwiększy jej indukcyjność własną. Żarówka przygasa i stale już świeci słabo. Zjawisko to nie zachodzi oczywiście dla prądu



Rys. 4.44. Indukcyjność własna zmniejsza natężenie prądu przemiennego

stałego, co łatwo można stwierdzić powtarzając opisane tu doświadczenie z prądem stałym. Doświadczenie to dowodzi, że obecność indukcyjności własnej w obwodzie prądu przemiennego zmniejsza średnie (a co za tym idzie, i szczytowe) natężenie prądu w obwodzie. Cewka, która ma opór R i współczynnik indukcji własnej L, zachowuje się w obwodzie prądu stałego tylko jak przewodnik o oporze R, natomiast w obwodzie prądu przemiennego — jak opór większy od R; i to tym większy, im większe jest L. Opór cewki dla prądu przemiennego, tzn. stosunek $\frac{U_s}{i_s}$ lub $\frac{U_0}{i_0}$, nazwiemy *zawadą* (Z) albo *oporem pozornym*, albo wreszcie *impedancją* danej cewki. Dla odróżnienia od zawady, prawdziwy opór R, tj. opór dla prądu stałego, nazywa się oporem *omowym*. Teoria (§ 4.29) potwierdzona przez doświadczenie prowadzi do następującego wzoru na zawadę:

$$Z = \sqrt{R^2+(\omega L)^2} \tag{4.38}$$

(wszystkie wielkości w jednostkach praktycznych; Z i R w omach, $\omega = 2\pi f$ w s^{-1}, L w henrach).

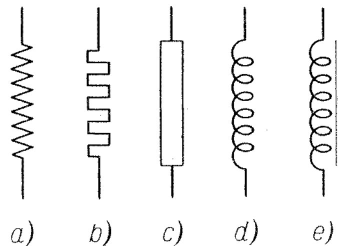
Widzimy, że zawada zależy nie tylko od L, ale i od częstotliwości f prądu; dla $f = 0$ (prąd stały) albo dla $L = 0$ (opór bez indukcji własnej) mamy $Z = R$. Natomiast, gdy opór omowy R cewki jest znikomy ($R = 0$), wówczas jej zawada jest czysto indukcyjna i wynosi

$$Z = \omega L ;$$

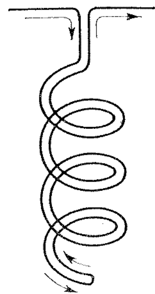
ta część zawady nazywa się *oporem indukcyjnym* cewki, czyli *induktancją*.

Z powyższego widać, że w elektrotechnice ważną jest rzeczą, czy przewodnik wykazuje indukcję własną, jak np. opornik nawinięty na wałku, czy też jest wolny od indukcji własnej, jak np. oporniki w postaci pręcików z węgla, sylitu oraz innych mas oporowych, używane w radiotechnice. Dlatego w schematach stosuje się odmienne symbole

dla oporników bezindukcyjnych i indukcyjnych, jak poucza rys. 4.45. Opornik drutowy, nawinięty zwyczajnie, nie jest wolny od indukcji własnej, ponieważ stanowi jednocześnie solenoid. Ale nawinięty „bifilarnie", jak wskazuje rys. 4.46, nie ma indukcji własnej, po-



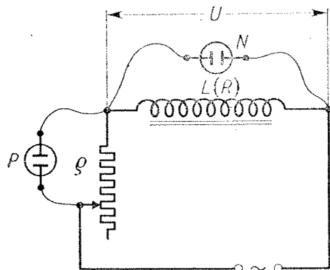
Rys. 4.45. Znaki schematyczne: a) opornika z indukcyjnością własną; b) opornika bez indukcyjności; c) opornika bezindukcyjnego ze specjalnej masy, używanego zazwyczaj w radiotechnice; d) cewki bez rdzenia, zatem ze znikomo małą indukcyjnością własną; e) cewki z rdzeniem (tzw. „dławik")



Rys. 4.46. Szpula opornika zatyczkowego, nawinięta bifilarnie (opornik bezindukcyjny)

nieważ prąd przepływający przez niego w dwóch przeciwnych kierunkach nie wytwarza wewnątrz szpuli pola magnetycznego. Taki sposób nawijania stosuje się w precyzyjnych opornikach zatyczkowych.

b) Wywołanie różnicy faz prądu i napięcia. Poprzednie doświadczenie powtórzmy z cewką mającą jeszcze większą indukcję własną, np. z wtórną cewką induk-



Rys. 4.47. Lampka neonowa P rozbłyska zgodnie z fazą prądu w obwodzie, lampka N — zgodnie z napięciem na końcach cewki L

tora Ruhmkorffa (L, rys. 4.47); zamiast żarówki zastosujmy opornik bezindukcyjny o oporze $\varrho \cong 10^4\,\Omega$. Niech prąd, który przepływa przez opór i cewkę, wyraża się równaniem

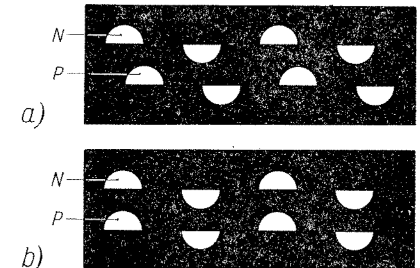
$$i = i_0 \sin \omega t .$$

Prąd ten wywoła na końcach opornika ϱ napięcie (por. § 4.24)

$$U' = \varrho i = \varrho i_0 \sin \omega t = U_0' \sin \omega t ,$$

a więc napięcie będące w zgodnej fazie z natężeniem prądu (rys. 4.38). Do końców tego opornika przyłączmy lampkę neonową P i powiększajmy opór ϱ tak długo, aż lampka się zapali. Oznacza to, że napięcie szczytowe na oporze ϱ (tzn. U_0') osiągnęło wartość napięcia zapłonu lampki P. Ale lampka, jak widzimy, nie pali się w sposób ciągły, błyska ona w chwili, gdy napięcie na końcach opornika dochodzi do swej wartości szczytowej. Ponieważ napięcie na oporniku jest w fazie z natężeniem prądu, przeto lampka P błyska w chwilach, gdy natężenie prądu i osiąga wartość szczytową. Powiemy krócej, że lampka P, jeśli ją oglądać będziemy w zwierciadle wirującym, pokazuje *fazę prądu* przepływającego przez opór ϱ, a zatem i przez cewkę L.

Drugą lampkę neonową N dołączamy do końców cewki L. Błyskać ona będzie w chwilach, gdy napięcie na końcach cewki osiągnie wartość napięcia zapłonu tej lampki. Błyskiem więc swym znaczyć będzie mniej lub więcej wąski przedział napięcia w otoczeniu napięcia szczytowego. Powiemy krócej, że lampka N oglądana w zwierciadle wirującym pokazywać będzie *fazę napięcia* panującą na końcach cewki L.



Rys. 4.48. Lampki N i P w doświadczeniu z rys. 4.47 oglądane w zwierciadle wirującym. a) Prąd (P) opóźnia się w fazie względem napięcia (N); b) gdy cewkę L zastąpić opornikiem, fazy prądu i napięcia są zgodne. Półkolami zaznaczono symbolicznie, że świeci tylko jedna elektroda lampki: górna lub dolna

Obie lampki N i P ustawione jedna nad drugą oglądajmy w zwierciadle wirującym. Obraz, jaki ujrzymy (rys. 4.48a), od razu nam mówi, że fazy napięcia i prądu nie są zgodne, albowiem szczytowe wartości U i i nie wypadają jednocześnie. Przeciwnie: szczytowe wartości prądu (błyski lampki P) opóźniają się względem szczytowych wartości napięcia (błyski lampki N). Wypowiemy to krócej: *prąd w cewce opóźnia się w fazie względem napięcia panującego na końcach cewki*; albo inaczej: *napięcie wyprzedza w fazie prąd.* Ponieważ równanie prądu jest

$$i = i_0 \sin \omega t ,$$

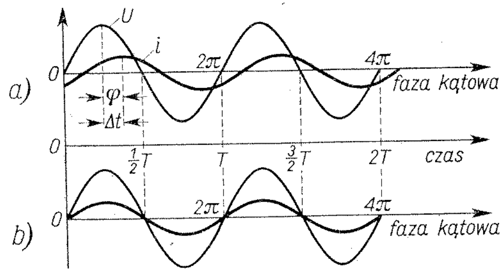
przeto napięcie na końcach cewki musi być wyrażone równaniem

$$U = U_0 \sin(\omega t + \varphi) ,$$

gdzie φ jest różnicą faz pomiędzy prądem i napięciem. Tylko dzięki wprowadzeniu kąta φ, $\sin \omega t$ i $\sin(\omega t + \varphi)$ nie stają się jednocześnie jednościami lub zerami, co zachodziłoby w wypadku zgodnych faz. Ten ostatni wypadek nietrudno zrealizować. Zastąpmy cewkę L opornikiem bezindukcyjnym R. Od razu ujrzymy w zwierciadle wirującym, że fazy są zgodne, gdyż błyski lampek są jednoczesne (rys. 4.48b); sinusy w obu powyższych równaniach stają się jednocześnie jednościami, a więc $\varphi = 0$.

Istotę różnicy faz zrozumiemy lepiej przy pomocy następującego rozważania. Zapytajmy, kiedy napięcie U staje się największe. Odpowiemy, że wtedy, gdy np. kąt $(\omega t_U +$

$+\varphi)=\frac{\pi}{2}n$, gdzie n oznacza liczbę nieparzystą; stąd $t_U=\frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2}n-\varphi\right)$. A kiedy natężenie prądu osiągnie wartość największą? Odpowiedź nietrudna: gdy kąt $\omega t_i=\frac{\pi}{2}n$; stąd $t_i=\frac{1}{\omega}\cdot\frac{\pi}{2}n$. A więc natężenie osiąga wartość szczytową później niż napięcie, mianowicie



Rys. 4.49. Wykresy napięcia i prądu w poprzednich doświadczeniach. a) prąd opóźnia się w fazie o φ względem napięcia; b) $\varphi=0$

później o $\Delta t=t_i-t_U$, czyli o $\Delta t=\frac{1}{\omega}\varphi$. Jeżeli więc czas opóźnienia się szczytów natężenia względem napięcia wynosi Δt, to różnica faz wynosi $\varphi=\omega\Delta t$. Zrozumienie tego ułatwi rys. 4.49.

Teoria (§ 4.29) potwierdzona doświadczeniem prowadzi do następującego wzoru na tangens różnicy faz

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\omega L}{R}, \tag{4.39}$$

gdzie R jest oporem omowym cewki. Dla cewki o dużym współczynniku indukcji własnej i o małym oporze $\operatorname{tg}\varphi$ zbliża się do ∞ i różnica faz $\varphi\approx 90°$.

§ 4.29. Podwójna rola indukcji własnej w obwodzie prądu przemiennego. Teoria. W paragrafie poprzednim założyliśmy, że prąd w cewce jest sinusoidalny, tzn., że wyraża się równaniem

$$i=i_0\sin\omega t, \tag{a}$$

gdzie litera grecka ω, jak poprzednio, oznacza częstotliwość kołową i zastępuje wyrażenie $2\pi f$, czyli $\frac{2\pi}{T}$. Przypomnijmy jeszcze, że we wzorze (a) kąt ωt jest fazą prądu. W chwili początkowej ($t=0$) faza $=0$, po upływie ćwierci okresu $\left(t=\frac{T}{4}\right)$ faza $=\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}=\frac{\pi}{2}=90°$ itd.

Gdyby nie zjawisko indukcji własnej, dla prądu przemiennego stosowałoby się zwykłe prawo Ohma, wyrażające, że $U=Ri$ dla każdej chwili (wyjaśnienie „chwili" — por. § 4.24). Ale z powodu zjawiska indukcji własnej, zachodzącego w cewce, powstaje w niej siła elektromotoryczna indukcji własnej; cewka staje się źródłem prądu, którego siłę elektromotoryczną określa wzór (4.7):

$$E=-L\frac{\Delta i}{\Delta t}. \tag{b}$$

Dla bardzo krótkich Δt ($\Delta t\to 0$), $\frac{\Delta i}{\Delta t}$ przechodzi w pochodną:

$$\frac{\Delta i}{\Delta t}\to\frac{di}{dt}=\omega i_0\cos\omega t.$$

Wobec tego

$$E=-\omega L i_0\cos\omega t. \tag{c}$$

Dopiero teraz, gdy uwzględnimy, że siła elektromotoryczna E dodaje się algebraicznie (ze znakiem + albo −, zależnie od fazy ωt) do napięcia U, możemy obliczyć dla każdej chwili natężenie prądu z prawa Ohma

$$i=\frac{U+E}{R}, \tag{d}$$

nie obawiając się „niestosowalności" zwykłego prawa Ohma, którą stwierdziliśmy w paragrafie poprzednim; bowiem przyczyna owej niestosowalności, tj. indukcja w cewce, uwzględniona została w wyrazie E.

Ale celem naszym jest obliczenie nie prądu, który uważamy w tym rachunku za dany, lecz napięcia U. Ze wzoru (d) mamy

$$U=Ri-E. \tag{e}$$

Korzystając ze wzorów (a) i (c) otrzymujemy

$$U=Ri_0\sin\omega t+\omega L i_0\cos\omega t=Ri_0\left(\sin\omega t+\frac{\omega L}{R}\cos\omega t\right).$$

Wyrażenie w nawiasie da się z łatwością przedstawić jako sinus pewnej sumy kątów. Należy w tym celu zastosować znaną i łatwą metodę polegającą na tym, że współczynnik $\frac{\omega L}{R}$ przy cosinusie należy oznaczyć jako tangens jakiegoś kąta, który oznaczymy literą φ:

$$\frac{\omega L}{R}=\operatorname{tg}\varphi. \tag{f}$$

Wówczas

$$U=Ri_0(\sin\omega t+\operatorname{tg}\varphi\cos\omega t)=\frac{Ri_0}{\cos\varphi}(\sin\omega t\cos\varphi+\sin\varphi\cos\omega t).$$

Wyrażenie w nawiasie jest to nic innego jak $\sin(\omega t+\varphi)$, zatem napięcie na końcach cewki wyrazi się znów funkcją sinus:

$$U=\frac{Ri_0}{\cos\varphi}\sin(\omega t+\varphi).$$

Widzimy, że fazą napięcia jest nie kąt ωt, lecz $(\omega t+\varphi)$, a zatem że napięcie w fazie swojej wyprzedza natężenie prądu (a) o kąt φ. A więc φ jest różnicą faz; wyraża się ona wzorem (f), który jest identyczny ze wzorem (4.39):

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\omega L}{R}. \tag{g}$$

Ze wzoru (g) odczytać jeszcze można, że amplituda napięcia U_0 wynosi

$$U_0 = \frac{Ri_0}{\cos\varphi}. \tag{h}$$

Ale $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{\cos\varphi}$; stąd $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}$.

Stosując wzór (4.39) mamy

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}. \tag{i}$$

Podstawiając to wyrażenie do (h) otrzymujemy

$$U_0 = i_0\sqrt{R^2+\omega^2L^2}. \tag{j}$$

Analogicznie do prawa Ohma, $U_0 = i_0R$, napiszemy

$$U_0 = i_0 Z, \tag{k}$$

gdzie

$$Z = \sqrt{R^2+\omega^2L^2} \tag{l}$$

odgrywa rolę oporu. Jest to właśnie „zawada" elektryczna, którą poznaliśmy w poprzednim paragrafie.

Wzór (j) lub (k) wyraża prawo Ohma uogólnione dla prądu przemiennego. Jeśli obie strony tego wzoru podzielimy przez $\sqrt{2}$, otrzymamy analogiczny związek dla wartości skutecznych napięcia i natężenia

$$U_s = i_s Z = i_s\sqrt{R^2+\omega^2L^2}.$$

Wyniki teorii przedstawionej w tym paragrafie dadzą się streścić w następujących słowach:

Niech w cewce płynie prąd przemienny sinusoidalny

$$i = i_0 \sin\omega t,$$

gdzie ω *oznacza liczbę okresów w* 2π *sekundach*

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}.$$

Wówczas na końcach tej cewki wytwarza się napięcie również sinusoidalne, wyrażające się równaniem

$$U = U_0 \sin(\omega t+\varphi),$$

którego amplituda U_0 *jest iloczynem amplitudy natężenia i zawady cewki*

$$U_0 = i_0 Z,$$

gdzie

$$Z = \sqrt{R^2+\omega^2L^2}, \tag{4.38}$$

a faza wyprzedza fazę natężenia prądu o kąt φ *określony wzorem*

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L}{R}. \tag{4.39}$$

Oczywiście równie dobrze można wypowiedzieć to w ten sposób, że jeśli na końcach cewki panuje napięcie sinusoidalne, wyrażone równaniem

$$U = U_0 \sin\omega t,$$

to prąd płynący w cewce jest spóźniony w fazie o φ:

$$i = i_0 \sin(\omega t-\varphi),$$

przy czym różnicę faz określa wzór (4.39), a amplitudę natężenia prądu obliczyć można ze wzoru $i_0 = \frac{U_0}{Z}$, gdzie Z wyraża wzór (4.38).

§ 4.30. Moc średnia prądu przemiennego. Zapytajmy: jaką moc średnią wytwarza prąd przemienny w cewce? Praca tego prądu w ciągu bardzo krótkiego czasu Δt jest

$$\Delta L = Ui\Delta t = U_0 i_0 \Delta t \sin\omega t \sin(\omega t+\varphi).$$

Iloczyn sinusów wyraża znany wzór trygonometryczny

$$\sin\alpha\sin\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$$

Zastosowawszy go do naszego wypadku otrzymujemy

$$\Delta L = \tfrac{1}{2}U_0 i_0 \Delta t\cos\varphi - \tfrac{1}{2}U_0 i_0\Delta t\cos(2\omega t+\varphi).$$

Zsumujmy prace ΔL, rozciągnąwszy sumowanie na cały okres T. Zauważmy, że suma drugich wyrazów zniknie; albowiem w ciągu pełnego okresu T drugi wyraz powyższego wzoru staje się tyle razy dodatni co i ujemny, ponieważ zawiera $\cos(2\omega t+\varphi) = \cos\left(\frac{2\pi}{T/2}t+\varphi\right)$, a ten zmienia znak co $\frac{1}{4}T$. Zostaje więc suma pierwszych wyrazów, która wynosi: $L = \frac{1}{2}U_0 i_0 T\cos\varphi$. Podzieliwszy tę pracę przez czas T otrzymujemy moc średnią M_s

$$M_s = \tfrac{1}{2}U_0 i_0\cos\varphi.$$

Do tego samego rezultatu dochodzimy obliczając całkę

$$M_s = \frac{1}{T}\int_0^T Ui\,dt = \frac{U_0 i_0}{T}\int_0^T \sin\omega t\sin(\omega t-\varphi)\,dt = \tfrac{1}{2}U_0 i_0\cos\varphi.$$

Wyrażenie to możemy napisać tak: $M_s = \frac{U_0}{\sqrt{2}}\,\frac{i_0}{\sqrt{2}}\cos\varphi$. A ponieważ dwa pierwsze czynniki są to napięcie i natężenie skuteczne, przeto

$$M_s = U_s i_s\cos\varphi. \tag{4.40}$$

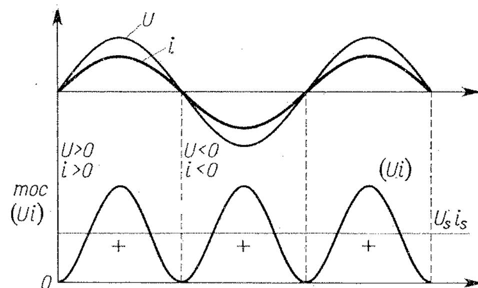
Moc prądu przemiennego przepływającego przez cewkę równa jest iloczynowi napięcia skutecznego, natężenia skutecznego oraz $\cos\varphi$, *gdzie* φ *jest różnicą faz napięcia i prądu;* $\cos\varphi$ nazywa się *współczynnikiem mocy prądu przemiennego.*

A teraz rozpatrzmy dwa wypadki szczególne, krańcowe, a). Jeśli w obwodzie prądu istnieje tylko opór omowy ($L = 0$), wtedy $\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$ i wzór (4.40) przechodzi w dawny wzór (4.37); patrz rys. 4.39b. b) Jeśli w obwodzie znajduje się cewka o dużej indukcji własnej, lecz znikomym oporze (załóżmy $R = 0$), wtedy ze wzoru (4.39) wynika, że $\varphi = 90°$, zatem $\cos\varphi = 0$ i $M_s = 0$. Wynik jest taki, że mimo iż przez cewkę płynie prąd i na jej końcach panuje napięcie, moc średnia prądu jest zerem. *Prąd przesunięty w fazie o 90° względem napięcia „nie pracuje"*; taki prąd nazywają *jałowym* albo *bezwatowym*.

Przykład liczbowy. Do obwodu prądu przemiennego, zawierającego zwojnice (np. do obwodu silnika elektrycznego) włączono amperomierz i woltomierz. Przyrządy te wskazują odpowiednio: $i_s = 10$ A, $U_s = 120$ V. Zdawałoby się, że moc prądu wynosi $M_s = 1200$ W. Tymczasem tak nie jest. Włączmy do obwodu watomierz, a wskaże znacznie mniej, np. $M_s = 900$ W. Wnosimy stąd, że

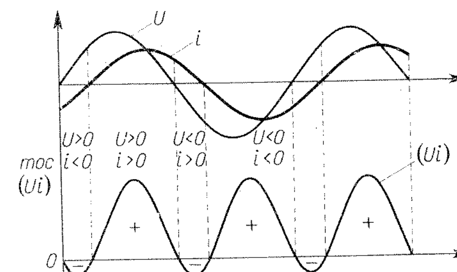
$$\cos\varphi = \frac{M_s}{U_s i_s} = \frac{900}{1200} = 0{,}75.$$

Iloczyn $U_s i_s$ nazywamy *mocą pozorną*; jest to moc w założeniu, że $\cos\varphi = 1$. Dla odróżnienia od mocy prawdziwej, moc pozorną wyraża się nie w watach (W), lecz w „woltoamperach" (V·A) lub w „kilowoltoamperach" (kV·A). W naszym przykładzie moc pozorna wynosi 1,2 kV·A, podczas gdy moc rzeczywista M_s równa była 0,9 kW.



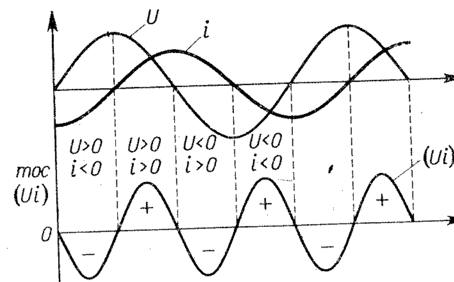
Rys. 4.50. Krzywa napięcia, natężenia i mocy w wypadku zgodności faz: $\varphi = 0$. Moc pozorna $U_s i_s$ równa $^1/_2 U_0 i_0$ stanowi w tym wypadku średnią moc rzeczywistą

Dla lepszego zrozumienia roli $\cos\varphi$ zauważmy, że jeżeli prąd i napięcie są zgodne w fazie (rys. 4.50), a więc zawsze w zgodnych kierunkach, to w każdej chwili wydzielają w obwodzie moc, która się waha od 0 do $U_0 i_0$; średnio wynosi ona $U_s i_s = \frac{1}{2} U_0 i_0$. Natomiast, jeśli prąd opóźnia się w fazie względem napięcia np. o $\varphi < 90°$, to nie zawsze prąd i napięcie pracują w zgodnych kierunkach. Są okresy czasu, w których prąd i napięcie są przeciwnie skierowane (rys. 4.51). Wtedy cewka zamiast pochłaniać pracę prądu elektrycznego sama ją wytwarza; staje się (dzięki indukcji!) generatorem prądu. Jest to praca ujemna, gdyż iloczyn $Ui < 0$. Dzięki temu zjawisku średnia moc wydzielona w cewce przez prąd z sieci zmniejsza się. Na rysunku 4.51 widzimy krzywą mocy (Ui) w funkcji czasu, która powstała przez utworzenie iloczynów rzędnych krzywych U i i, wziętych dla tej samej chwili. Widać, że krzywa mocy przebiega częściowo pod osią odciętych, mianowicie wtedy, gdy $U > 0$ i jednocześnie $i < 0$ lub gdy $U < 0$ i jednocześnie $i > 0$. Jeśli $\varphi = 90°$, krzywa mocy przebiega równie długo pod osią, jak i nad osią (rys. 4.52). Cewka jest tyle samo czasu odbiornikiem energii, co i jej wytwórcą. Całkowita praca równa jest zeru, moc średnia również równa jest zeru. W obwodzie



Rys. 4.51. Krzywa napięcia, natężenia prądu i mocy, dla różnicy faz $\varphi = 45°$. Praca ujemna (pola oznaczone znakiem —) sprawia, że moc średnia jest teraz mniejsza od mocy pozornej $U_s i_s$ (por. rys. 4.50)

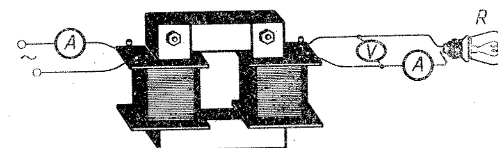
może płynąć prąd bardzo silny, lecz nie pracujący — „jałowy". Jasną jest rzeczą, że watomierz w tym ostatnim wypadku wskaże zero. Bowiem siły działające na zwoje jego cewki ruchomej są w każdej chwili proporcjonalne do Ui; gdyby wskazówka nie miała



Rys. 4.52. Krzywe napięcia, natężenia prądu i mocy, dla różnicy faz $\varphi = 90°$. Praca dodatnia = pracy ujemnej: prąd jałowy

bezwładności, drgałaby według krzywej przebiegającej podobnie do krzywej mocy na rys. 4.52, dookoła położenia zerowego jako środka drgań. Mając bezwładność, nie opuszcza położenia zerowego.

***§ 4.31. Transformatory.** a) Zasada działania. W § 4.20c pokazaliśmy, że zagadnienie przesyłania energii na wielkie odległości może być rozwiązane jedynie przez przesyłanie prądu pod wysokim napięciem. Pokazaliśmy również, że transformowanie prądu

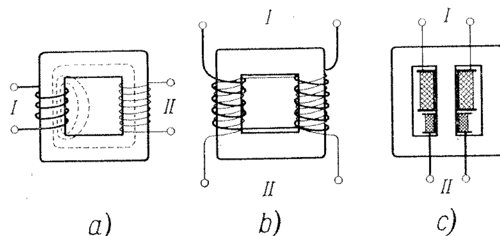


Rys. 4.53. Transformator pokazowy z wymiennymi cewkami

stałego nastręcza znaczne trudności. Tymczasem prąd przemienny transformuje się bardzo łatwo za pomocą przyrządów, zwanych *transformatorami*, przedstawionych na rys. 4.13 (§ 4.7), 4.53 i 4.54.

Zasada działania transformatora jest niezwykle prosta. Prąd przemienny przepuszczamy przez pierwotne uzwojenie transformatora. Wskutek tego w rdzeniu powstaje

periodycznie zmienny strumień indukcji. Strumień ten przechodzi niemal całkowicie przez uzwojenie wtórne transformatora i indukuje w nim siłę elektromotoryczną przemienną o tej samej częstotliwości. Wartość tej siły elektromotorycznej jest proporcjonalna do liczby zwojów cewki wtórnej; siły elektromotoryczne bowiem, indukowane w poszczególnych zwojach, sumują się. Biorąc cewkę wtórną o bardzo dużej liczbie zwo-



Rys. 4.54. Różne formy transformatorów. W a) część linii sił opuszczająca rdzeń (tzw. linie „uronione") omija cewkę wtórną; w b) zjawisko to występuje w mniejszym stopniu; a w c) — w jeszcze mniejszym

jów możemy otrzymać po stronie wtórnej bardzo wysokie napięcie. Przeciwnie, biorąc cewkę wtórną o bardzo małej liczbie zwojów, otrzymamy na jej zaciskach niskie napięcie, które może być znacznie niższe od napięcia w cewce pierwotnej. Widzimy, że transformator służyć może nie tylko do podwyższenia, ale i do obniżania napięcia.

b) Przekładnia transformatora. Przyjmijmy następujące oznaczenia: U_{s1}, i_{s1} — napięcie i natężenie skuteczne prądu w cewce pierwotnej. U_{s2}, i_{s2} — napięcie i natężenie skuteczne prądu w cewce wtórnej, n_1, n_2 — ilości zwojów cewki pierwotnej i wtórnej. Do sieci prądu przemiennego dołączamy transformator wyobrażony na rys. 4.53, wyposażony w cewki o oznaczonej ilości zwojów. W obwodzie cewki pierwotnej umieśćmy amperomierz, a w obwodzie cewki wtórnej — opór R (np. jedną lub kilka żarówek) oraz amperomierz; do końców cewki należy dołączyć woltomierz. Kilka łatwych pomiarów przekona nas, że transformator podwyższając napięcie w pewnym stosunku, w tym samym stosunku obniża natężenie prądu. I odwrotnie: jeśli w pewnym stosunku obniża napięcie, to w tym samym stosunku powiększa natężenie prądu. Doświadczenie to również pokazuje, że stosunek powyższy równy jest w przybliżeniu stosunkowi liczby zwojów cewki wtórnej do liczby zwojów cewki pierwotnej. Rezultat ten wyrazić można w przybliżeniu następującymi dwiema równościami:

$$\frac{U_{s2}}{U_{s1}} = \frac{n_2}{n_1}, \tag{4.41}$$

$$\frac{i_{s2}}{i_{s1}} = \frac{n_1}{n_2}. \tag{4.41a}$$

Stosunek $n_2 : n_1$ nosi nazwę *przekładni transformatora.*

Można również napisać proporcję

$$\frac{U_{s2}}{U_{s1}} = \frac{i_{s1}}{i_{s2}},$$

z której wynika, że iloczyn napięcia i natężenia w obwodzie pierwotnym jest równy (w przybliżeniu) odpowiedniemu iloczynowi w obwodzie wtórnym

$$U_{s1}\, i_{s1} = U_{s2}\, i_{s2}. \tag{4.41b}$$

Z drugiej strony, z zasady zachowania energii wynika, że moc prądu w obwodzie pierwotnym (M_{s1}) musi być równa (pomijając straty, patrz niżej) mocy w obwodzie wtórnym (M_{s2})

$$M_{s1} = M_{s2}.$$

Z porównania ostatnich dwóch wzorów i ze względu na (4.40) wnosimy, że $\cos\varphi$ w obydwu obwodach ma mniej więcej tę samą wartość.

*§ **4.32. Przybliżona teoria transformatora.** Wobec trudności rachunkowych ograniczymy się tylko do wyprowadzenia wzoru (4.41) dla napięć. Wiemy już z § 4.29, że do pierwotnego uzwojenia transformatora, jako do pewnej cewki, możemy zastosować prawo Ohma dla wartości chwilowych napięcia i natężenia prądu; musimy jednak uwzględnić siłę elektromotoryczną E_1 indukcji własnej. Napisać więc możemy według wzoru (e) § 4.29:

$$U_1 = r_1 i_1 - E_1,$$

gdzie U_1 i i_1 oznaczają wartości chwilowe napięcia i natężenia prądu w cewce pierwotnej, a r_1 — jej opór omowy. Prąd cewki pierwotnej i_1 wytwarza w rdzeniu transformatora strumień indukcji $\Phi = BS$ (por. § 4.7). Strumień ten przechodzi przez uzwojenie pierwotne i wytwarza w nim siłę elektromotoryczną indukcji własnej E_1, która według prawa indukcji wynosi

$$E_1 = -\frac{\Delta(n_1\Phi)}{\Delta t} = -n_1\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Wobec tego

$$U_1 = r_1 i_1 + n_1\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

W transformatorach opór omowy jest zazwyczaj dość mały, tak że spadek omowy $r_1 i_1$ stanowi tylko drobną część napięcia przyłożonego U_1, dlatego pomińmy $r_1 i_1$ wobec U_1 i napiszmy

$$U_1 = n_1\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \tag{a}$$

Z drugiej strony, cały strumień indukcji Φ (pomijając straty, patrz niżej) przechodzi przez uzwojenie wtórne transformatora i wytwarza w nim siłę elektromotoryczną E_2, której wartość liczbowa wynosi

$$E_2 = \frac{\Delta(n_2\Phi)}{\Delta t} = n_2\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Jeśli w obwodzie wtórnym płynie prąd i_2, to napięcie na końcach cewki wtórnej U_2 równe jest sile elektromotorycznej, pomniejszonej o spadek omowy $r_2 i_2$ w cewce, gdzie r_2 oznacza opór omowy cewki wtórnej. Ten spadek jest znów zazwyczaj mały (przy niewielkim obciążeniu transformatora) i możemy go wobec E_2 pominąć, zatem

$$U_2 = n_2\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \tag{b}$$

Dzieląc równania (b) i (a) przez siebie otrzymujemy związek

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{n_2}{n_1},$$

dotyczący wartości chwilowych napięcia. Wobec tego ten sam związek stosuje się do wartości szczytowych (jako jednych z chwilowych), a co za tym idzie, do wartości skutecznych:

$$\frac{U_{s2}}{U_{s1}} = \frac{n_2}{n_1}. \tag{4.42}$$

*§ **4.33. Wydajność transformatora.** Przez wydajność transformatora rozumiemy stosunek mocy M_2 wydzielonej w obwodzie wtórnym do mocy M_1 pochłoniętej w obwodzie pierwotnym:

$$\eta = \frac{M_2}{M_1}.$$

Różnica $M_1 - M_2$ jest miarą strat mocy, jakie występują w transformatorze. Straty mocy spowodowane są następującymi zjawiskami:

a) Wydzielaniem się ciepła Joule'a w obydwu zwojach transformatora; straty z tego powodu wynoszą $r_1 i_{s1}^2 + r_2 i_{s2}^2$.

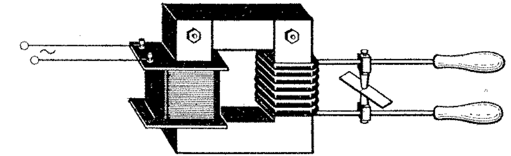
b) Wydzielaniem się ciepła w rdzeniu żelaznym transformatora wskutek histerezy żelaza.

c) Wydzielaniem się ciepła w rdzeniu wskutek prądów Foucaulta. Straty te zmniejsza się bardzo znacznie przez stosowanie rdzenia złożonego z cienkich blach żelaznych, równoległych do linii sił i odizolowanych od siebie papierem lub lakierem. Na ogół transformatory przy pełnym obciążeniu pracują z wydajnością około 96%; straty wynoszą więc około 4%.

Gdy transformator idzie luzem, tzn. gdy obwód wtórny jest otwarty i prąd w nim nie płynie, straty na ciepło Joule'a są znikome. Natomiast inne straty (b i c) występują, ponieważ spowodowane są zmiennością strumienia indukcji. Gdyby tych strat nie było, moc średnia prądu w obwodzie pierwotnym byłaby = 0, tzn. $\cos\varphi = 0$, czyli $\varphi = 90°$, prąd byłby jałowy. Stosunki rzeczywiste niewiele od tych odbiegają; mianowicie, z powodu strat, różnica faz prądu i napięcia wynosi około 80°. Zmniejsza się ona znacznie z chwilą korzystania z prądu w obwodzie wtórnym.

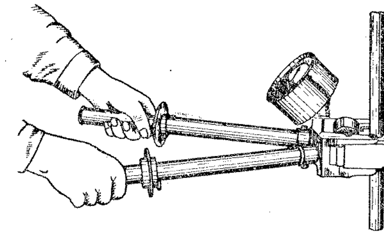
*§ **4.34. Zastosowanie transformatorów.** a) Do otrzymywania wysokich napięć. Transformatory służące do wytwarzania wysokich napięć są przeważnie zanurzone w oleju dla uzyskania lepszej izolacji między uzwojeniami. Transformatory o dużej mocy są ponadto chłodzone wodą w celu odprowadzenia wielkich ilości ciepła, które się wydzielają w transformatorze wskutek strat mocy wymienionych w § 4.33. Za pomocą transformatorów można otrzymać napięcia rzędu setek tysięcy woltów przy bardzo wielkiej mocy, dochodzącej do stu tysięcy kV·A.

b) Do otrzymywania silnych prądów. Przy bardzo małej liczbie zwojów w cewce wtórnej można otrzymywać bardzo silne prądy płynące pod odpowiednio niższym napięciem. Znajdują one zastosowanie np. przy spawaniu metali. Łatwe doświadczenie ilustruje rysunek 4.55, w którym dwie blaszki zostają spojone wskutek silnego ogrzania. Jest to tzw. spawanie punktowe, które może zastąpić nitowanie. (Poza tym istnieje spawanie przy pomocy łuku elektrycznego, w którym wytwarza się bardzo wysoka temperatura; patrz część 2).



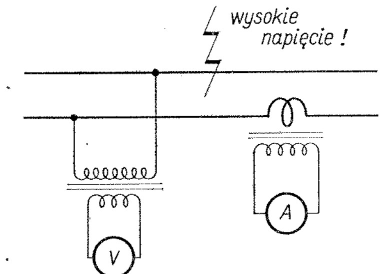
Rys. 4.55. Spawanie punktowe za pomocą bardzo silnego prądu

c) Do celów mierniczych. Aby zmierzyć natężenie prądu w linii wysokiego napięcia, nie włącza się przyrządu mierniczego bezpośrednio do linii, lecz prąd przepuszcza się przez uzwojenie pierwotne tzw. „transformatora mierniczego", w którego uzwojeniu wtórnym znajduje się przyrząd mierniczy wyskalowany tak, że wykazuje od razu natężenie prądu w obwodzie pierwotnym. Obwód pierwotny tego typu transformatorów,



Rys. 4.56. Transformatorek mierniczy prądowy

tzw. „prądowych", składa się nieraz z jednego grubego zwoju, albo nawet stanowi po prostu kabel linii, w której prąd ma być zmierzony. W tym ostatnim wypadku transformatory miernicze mają rdzeń w postaci kleszczy, którymi obejmuje się badany kabel; ilustruje to rys. 4.56.



Rys. 4.57. Schemat transformatorów mierniczych: prądowego (A) i napięciowego (V)

Podobnie do pomiaru wysokich napięć służą transformatory miernicze, zwane „*napięciowymi*". W uzwojeniu wtórnym takiego transformatora znajduje się woltomierz wyskalowany tak, że pokazuje od razu napięcie w uzwojeniu pierwotnym; uzwojenie to składa się z bardzo wielu zwojów cienkiego drutu. Transformatorki miernicze, prądowy i napięciowy, przedstawia schematycznie rys. 4.57.

d) Inne zastosowania. Transformatory stosuje się w rozmaitych wypadkach, w których potrzeba: albo obniżyć napięcie (transformatory do instalacji dzwonkowych, do ładowania akumulatorów przez prostownik itp.), albo podwyższyć napięcie (transformatory do zasilania reklam neonowych, lamp rentgenowskich itp.), albo zmieniać amplitudę wahań prądu (transformatory telefoniczne, radiowe itp. — patrz część 2).

*§ **4.35. Silnik na prąd przemienny.** a) Silnik synchroniczny. Wyobraźmy sobie, że prąd przemienny o częstotliwości f przepuszczamy przez twornik (nieruchomy) generatora prądu przemiennego (rys. 4.33), podczas gdy jego magnesy zasilamy prądem stałym. Niech wirnik będzie na razie w spoczynku. Czy po przepuszczeniu prądu wirnik zacznie się obracać? Aby odpowiedzieć na to pytanie, weźmy pod uwagę jeden z biegunów wirnika, np. S będący naprzeciwko zwojnicy *1* twornika. W ciągu jednej sekundy biegun S jest f (= 50) razy przyciągany przez biegun cewki *1* i na przemian tyle samo razy przez nią odpychany. Bezwładność wirnika sprawia, że pod wpływem tak częstego szarpania wirnik nie ruszy z miejsca. Nie wyłączając prądu zacznijmy obracać wirnik ręką coraz szybciej. W pewnej chwili wirnik nabierze takiej prędkości, przy której „szarpanie" wywołane prądem przemiennym będzie zsynchronizowane ze zbliżaniem się i oddalaniem biegunów wirnika względem biegunów twornika. Więc np. wspomniany biegun S zbliżając się do bieguna cewki *1* będzie przezeń przyciągany, oddalając się od *1* (a zbliżając do *2*) będzie przez biegun *1* odpychany (a przez *2* przyciągany) itd. Otóż gdy wirnik doprowadzimy do takiej prędkości, że opisany proces będzie miał miejsce, wtedy wirnik będzie się obracał sam dalej, dzięki popychaniu go przez siły elektromagnetyczne, działające między zmiennymi biegunami twornika i stałymi biegunami wirnika. Częstotliwość obrotów wirnika będzie dokładnie stała. Nietrudno ją obliczyć. Powróćmy do bieguna *1* twornika, który 50 razy w ciągu sekundy przyciągał biegun S i tyleż razy go odpychał. Obecnie, gdy wirnik obraca się pod wpływem sił elektromagnetycznych, biegun *1* musi przyciągać coraz to dalsze bieguny wirnika, kolejno, według porządku; inaczej wirnik byłby nie obracany, lecz szarpany nieregularnie. A zatem, jeśli liczba biegunów S wirnika wynosi p, jeden obrót wirnika trwać będzie $p/50$ sekundy, czyli częstotliwość obrotów wirnika wynosić będzie $50/p$ na sekundę. Ogólniej, oznaczywszy przez N częstotliwość obrotów, czyli liczbę obrotów w ciągu sekundy, mamy

$$N = \frac{f}{p},$$

gdzie f jest częstotliwością prądu, a p — liczbą par biegunów wirnika (lub liczbą biegunów jednego znaku).

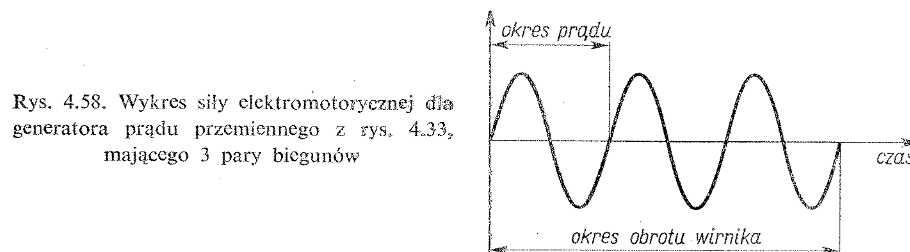
Z powyższego widzimy, że zwykły generator prądu przemiennego dołączony do sieci prądu przemiennego staje się silnikiem, którego częstotliwość obrotów jest ściśle zsynchronizowana z częstotliwością prądu i wynosi dokładnie f/p. Nie może być ani większa, ani mniejsza, ponieważ periodycznie zmienne siły obracające wirnik przestały być synchroniczne z mijaniem się biegunów wirnika i twornika, a wówczas wirnik przestałby się obracać. Tego rodzaju silnik nazywa się *silnikiem synchronicznym.*

Zaletą silnika synchronicznego jest jego stała częstotliwość obrotów, ściśle zależna od częstotliwości prądu. Silnik taki może być doskonale zsynchronizowany z prądnicą.

Silnik synchroniczny ma jednak dwie poważne wady. Pierwszą jest kłopotliwy rozruch; drugą stanowi fakt, że jeśli silnik synchroniczny zostanie przeciążony, traci synchronizację i staje. Dlatego silniki synchroniczne rzadko są stosowane i to tylko do specjalnych celów, w których zależy na jednostajnym chodzie silnika, np. w zegarach elektrycznych na prąd przemienny.

b) Silniki asynchroniczne. Silniki asynchroniczne, tj. takie, których częstotliwość obrotów może się zmieniać w pewnych granicach, bywają rozmaitych typów; jeden z nich, o większej doniosłości, poznamy w § 4.39. Na małą skalę jako silników asynchronicznych na prąd przemienny, można używać silników prądu stałego, pod warunkiem jednak, że uzwojenie twornika i magneśnicy będą połączone szeregowo (rys. 4.27). Bowiem tylko wtedy kierunek prądu w tworniku i w elektromagnesach będzie się zmieniał jednocześnie i silnik będzie działał prawie tak samo, jak gdyby był zasilany prądem stałym. Oczywiście pewne szczegóły konstrukcji silnika muszą być przystosowane do prądu przemiennego. A więc np. magneśnica musi być całkowicie wykonana z blach żelaznych dla uniknięcia prądów Foucaulta, gdyż w jej zwojach płynie teraz prąd przemienny; poza tym, uzwojenie magneśnicy nie może mieć tak wiele zwojów jak w silniku prądu stałego, gdyż zawada uzwojenia byłaby zbyt wielka. Wadę tego silnika stanowi istnienie kolektora, który iskrzy i zużywa się. Istnieją jeszcze inne typy silników asynchronicznych na prąd przemienny, które nie mają kolektorów (por. § 4.39).

*§ **4.36. Wytwarzanie prądu przemiennego trójfazowego.** Powróćmy do prądnicy prądu przemiennego wyobrażonej schematycznie na rys. 4.33. Ilekroć biegun S wirnika zbliża się do zwojnicy *1*, a N do przeciwnie nawiniętej zwojnicy *2*, wytwarza się w obwodzie

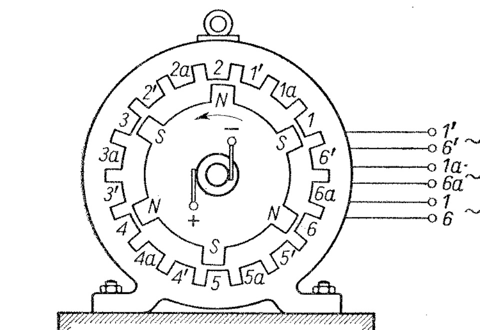


Rys. 4.58. Wykres siły elektromotorycznej dla generatora prądu przemiennego z rys. 4.33, mającego 3 pary biegunów

siła elektromotoryczna o pewnym kierunku. Natomiast gdy tenże biegun S wirnika oddala się od zwojnicy *1*, a zbliża się do zwojnicy *2*, wytwarza się w obwodzie siła elektromotoryczna o przeciwnym kierunku niż poprzednio. Gdy w dalszym ciągu S zbliża się do zwojnicy *3*, historia się powtarza. Widzimy stąd, że w czasie jednego obrotu wirnika prąd przemienny przechodzi kilka pełnych okresów (rys. 4.58). Jeden okres równa się czasowi przejścia któregokolwiek bieguna wirnika od zwojnicy *1* do zwojnicy *3*. Odstęp między zwojnicami *1* i *2* odpowiada połowie okresu prądu ($T/2$).

Podzielmy ten odstęp na trzy równe części i w miejscach podziału wstawmy dwie nowe zwojnice *1a* i *1'*; na razie tak samo nawinięte jak zwojnica *1* (rys. 4.59). Zrozumiałą jest rzeczą, że w zwojach *1a* i *1'* będzie powstawała siła elektromotoryczna z opóźnieniem w fazie o 1/6 i 1/3 okresu w stosunku do siły elektromotorycznej powstającej w zwojnicy *1*. Ilustrują to wykresy na rys. 4.60a.

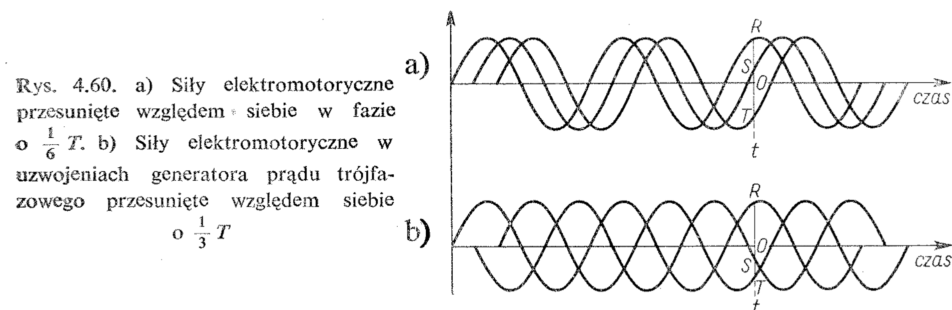
Prądnica wyobrażona na rys. 4.59 ma, podobnie jak prądnica z rys. 4.33, wirnik o sześciu biegunach oraz układ sześciu zwojnic twornika: 1, 2, ..., 6; są one połączone szeregowo i stanowią jeden wspólny obwód, którego początek połączony jest z zaciskiem *1*, a koniec z zaciskiem *6*. Oprócz tego prądnica ma jeszcze dwa układy zwojnic: *1a*, *2a*, ... *6a*



Rys. 4.59. Generator prądu trójfazowego w bardzo uproszczonym schemacie. Na rysunku, dla jasności, nie uwidoczniono ani zwojnic elektromagnesów wirnika, ani zwojnic twornika, które należy sobie wyobrazić analogicznie jak na rys. 4.33

oraz *1'*, *2'*, ..., *6'*. Każdy z tych układów stanowi oddzielny obwód z zaciskiem *1a*, *6a* i *1'*, *6'*. We wszystkich trzech obwodach powstają siły elektromotoryczne, których zmienność w czasie przedstawia rys. 4.60a: siły elektromotoryczne w obwodach *1—6*, *1a—6a* i *1'—6'* przesunięte są względem siebie o 1/6 okresu, czyli o $2\pi/6 = 60°$ w fazie kątowej.

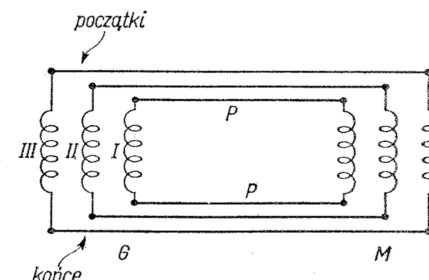
Wyobraźmy sobie teraz, że zwojnice drugiego z tych układów (*1a*, *2a*, ...) nawinięte są w przeciwnych kierunkach niż zwojnice je poprzedzające (*1*, *2*, ...). Wówczas kierunek siły elektromotorycznej w tym układzie zwojnic odwróci się na przeciwny, jak to poka-



Rys. 4.60. a) Siły elektromotoryczne przesunięte względem siebie w fazie o $\frac{1}{6}T$. b) Siły elektromotoryczne w uzwojeniach generatora prądu trójfazowego przesunięte względem siebie o $\frac{1}{3}T$

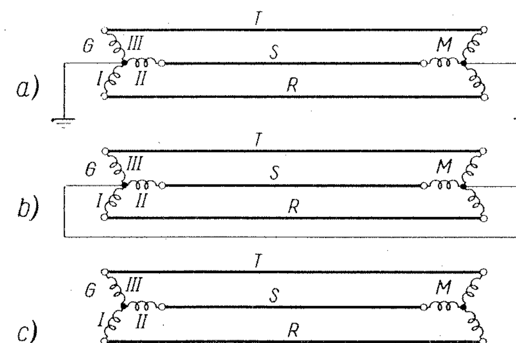
zuje rys. 4.60b. I oto widzimy, że obecnie siła elektromotoryczna obwodu *1—6* wyprzedza w fazie siłę elektromotoryczną obwodu *1'—6'* o 1/3 okresu (120°), a ta ostatnia wyprzedza siłę elektromotoryczną obwodu *1a—6a* również o 1/3 okresu. Widzimy więc, że generator z rys. 4.59 wytwarza w trzech niezależnych zwojach drutu złożonych ze zwojnic siły elektromotoryczne przemienne, z których każda następna opóźniona jest względem poprzedniej o 1/3 okresu. Taka prądnica nazywa się prądnicą prądu przemiennego *trójfazowego*.

§ 4.37. Przesyłanie i użytkowanie prądu trójfazowego. a) Połączenie w gwiazdę. Z rozważań poprzedniego paragrafu wynika, że generator prądu trójfazowego (*G* z rys. 4.61) można przedstawić schematycznie jako trzy oddzielne uzwojenia *I*, *II* i *III* z sześcioma zaciskami. Prąd należałoby tedy przesyłać na miejsce użytkowania (*M*) sześcioma przewodami, zupełnie tak, jak gdyby pochodził z trzech oddzielnych prądnic. Zauważmy jednak, że ponieważ uzwojenia są niezależne, tzn. nie mają wspólnego punktu, możemy



Rys. 4.61. *G* — generator prądu trójfazowego. *PP* — linia przesyłowa sześcioprzewodowa, *M* — odbiornik energii elektrycznej (żarówki, silniki piece itp.)

jeden zacisk każdego z uzwojeń uziemić. Jeżeli uziemimy wszystkie początki uzwojeń, otrzymamy *połączenie w gwiazdę* (rys. 4.62a). Punkt środkowy ma wtedy potencjał zerowy; jest to tzw. *punkt zerowy*. Zamiast uziemienia można zastosować przewód wychodzący od punktu zerowego (rys. 4.62b); nosi on nazwę *przewodu zerowego*. Prądy wypływające przewodami *R*, *S* i *T* wracają wszystkie wspólnym przewodem zerowym.



Rys. 4.62. Przesyłanie prądu trójfazowego z prądnicy *G* połączonej w gwiazdę, a) przewód zerowy uziemiony, b) przewód zerowy nie uziemiony, c) bez przewodu zerowego

Nietrudno udowodnić, że jeśli wszystkie trzy obwody (inaczej mówiąc „fazy") są jednakowo obciążone, to prądy „powracające" przewodem zerowym znoszą się; w rezultacie przewód zerowy staje się zbyteczny i wystarczą trzy przewody, jak pokazuje rys. 4.62c. I to jest właśnie doniosła zaleta prądu trójfazowego. Owo znoszenie się prądów w przewodzie zerowym widać z rys. 4.60b. Weźmy mianowicie dowolną chwilę t. Przewodami S i T płyną prądy wyobrażone odcinkami OS i OT, natomiast przewodem R płynie prąd w przeciwnym kierunku; natężenie jego wyobraża odcinek OR. Wszystkie te prądy wracają przewodem zerowym. Ich suma $OR+OS+OT = 0$, niezależnie od wyboru chwili t. Zróbmy to samo dla wykresów na rysunku 4.60a, a od razu zobaczymy, że suma analogicznych odcinków nie jest równa zeru. *Znikanie prądu w przewodzie zerowym jest właściwością prądu trójfazowego, o różnicy faz równej* 1/3 *okresu, czyli* 120°.

Dowód. Przy jednakowym obciążeniu poszczególnych faz (tzn. obwodów) prądy w przewodach R, S i T, a więc i w uzwojeniach I, II i III są

$$i_I = i_0 \sin \omega t\,, \quad i_{II} = i_0 \sin(\omega t + 120°)\,, \quad i_{III} = i_0 \sin(\omega t + 240°)\,, \tag{a}$$

gdzie i_0 jest wartością szczytową natężenia prądu we wszystkich trzech fazach. Prądy te wracają przewodem zerowym i dają łączne natężenie, wynoszące

$$I = i_I + i_{II} + i_{III} = i_0\,[\sin \omega t + \sin(\omega t + 120°) + \sin(\omega t + 240°)] =$$
$$= i_0\,[2\sin(\omega t + 60°)\cos(-60°) + \sin(\omega t + 240°)] = i_0\,[\sin(\omega t + 60°) + \sin(\omega t + 240°)] =$$
$$= i_0\,[-\sin(\omega t + 60° + 180°) + \sin(\omega t + 240°)] = 0\,.$$

A zatem w każdej chwili (niezależnie od wyboru chwili t) natężenie prądu w przewodzie zerowym jest równe zeru. Możemy więc uważać, że np. w chwili t na rys. 4.60 prąd wypływa przewodami S i T, a „wraca" przewodem R; w innych chwilach stosunki ułożą się inaczej, np. może wypływać przewodem T, a wracać przewodami R i S itp.

Zapytajmy teraz, ile wynosi napięcie „międzyprzewodowe", tzn. napięcie panujące między przewodami RS (U_{RS}), ST (U_{ST}) i TR (U_{TR}), skoro wiemy, że napięcie wytwarzane na końcach poszczególnych uzwojeń prądnicy, czyli tzw. napięcie „fazowe", ma wartość szczytową u_0? Z łatwością można wykazać, że wszystkie trzy napięcia międzyprzewodowe są sinusoidalne i że mają wspólną wartość szczytową U_0, która jest $\sqrt{3}$ razy większa od u_0; a zatem $U_0 = \sqrt{3}\,u_0$. Stąd wynika, że ten sam związek stosuje się do wartości skutecznych $U_s = \sqrt{3}\,u_s$.

Dowód. Napięcia chwilowe panujące między początkiem a końcem każdego z uzwojeń prądnicy wyrażają się równaniami

$$U_I = u_0 \sin \omega t\,, \quad U_{II} = u_0 \sin(\omega t + 120°)\,, \quad U_{III} = u_0 \sin(\omega t + 240°)\,. \tag{b}$$

Ponieważ początki uzwojeń połączone są ze sobą, przeto między ich końcami panuje napięcie równe różnicy napięć dwóch danych uzwojeń. A zatem

$$U_{RS} = u_0\,[\sin \omega t - \sin(\omega t + 120°)] = 2u_0 \sin(-60°)\cos(\omega t + 60°) = -\sqrt{3}\,u_0 \cos(\omega t + 60°) =$$
$$= -\sqrt{3}\,u_0 \sin(90° - \omega t - 60°) = -\sqrt{3}\,u_0 \sin(30° - \omega t) = \sqrt{3}\,u_0 \sin(\omega t - 30°)\,.$$

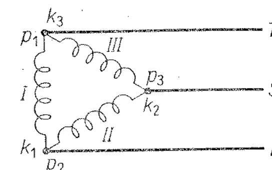
Zupełnie analogicznie obliczymy

$$U_{ST} = u_0\,[\sin(\omega t + 120°) - \sin(\omega t + 240°)] = \sqrt{3}\,u_0 \sin(\omega t + 90°)\,,$$
$$U_{TR} = u_0\,[\sin(\omega t + 240°) - \sin \omega t] = \sqrt{3}\,u_0 \sin(\omega t + 210°)\,.$$

Z powyższych równań widzimy, że napięcie międzyprzewodowe jest sinusoidalne, trójfazowe, z różnicą faz $= 120°$ oraz że napięcie szczytowe między dwoma dowolnymi przewodami wynosi $\sqrt{3}\,u_0$.

b) Połączenie w trójkąt. Jeśli uzwojenia prądnicy trójfazowej połączymy w ten sposób, że koniec każdego uzwojenia (k_1, k_2 i k_3) połączymy odpowiednio z początkiem następnego uzwojenia (p_2, p_3 i p_1), otrzymamy *połączenie w trójkąt* (rys. 4.63). Widać z rysunku od razu, że napięcie między jakimikolwiek dwoma przewodami równa się napięciu na zaciskach uzwojenia, z którego początkiem i końcem są połączone dane dwa przewody; a więc: $U_{RS} = u_{II}$, $U_{ST} = u_{III}$ i $U_{TR} = u_I$. Wynika stąd, że napięcie szczytowe między dowolnymi dwoma przewodami U_0 jest równe napięciu szczytowemu pojedynczej fazy $U_0 = u_0$; podobna równość zachodzi i dla napięć skutecznych $U_s = u_s$.

Pewną wątpliwość może wzbudzić zagadnienie, czy w obwodzie zamkniętym, jakim jest trójkąt, nie płynie prąd wówczas, gdy prądnica nie dostarcza prądu na zewnątrz, tzn. czy siły elektromotoryczne E_I, E_{II} i E_{III} czynne w tym obwodzie znoszą się wzajemnie. Nietrudno wykazać, że istotnie w każdej chwili $E_I + E_{II} + E_{III} = 0$. Zatem trójkąt jest wolny od prądu.



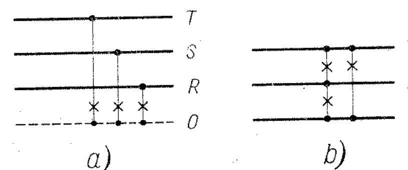
Rys. 4.63. Połączenie uzwojeń generatora w trójkąt. Podobnie można łączyć obwody odbiornika (np. żarówki, patrz rys. 4.64)

Dowód. Doświadczenie uczy, że siły elektromotoryczne powstające w uzwojeniach prądnicy mają przebieg bardzo zbliżony do sinusoidalnego. We wszystkich trzech uzwojeniach prądnicy wytwarzają się te same siły elektromotoryczne (gdyż uzwojenia są identyczne), lecz przesunięte względem siebie w fazie o 120°. Zatem siły elektromotoryczne, indukowane w uzwojeniach I, II i III, wyrazić możemy równaniami

$$E_I = E_0 \sin \omega t\,, \quad E_{II} = E_0 \sin(\omega t + 120°)\,, \quad E_{III} = E_0 \sin(\omega t + 240°)$$

Dodając te równania do siebie otrzymujemy $E_I + E_{II} + E_{III} = 0$.

Przy połączeniu w gwiazdę każdym przewodem płynął prąd, wysyłany przez odpowiednie uzwojenie przyłączone do tego przewodu; wracał natomiast przewodem zerowym. Zatem natężenia prądu w przewodach (I_R, I_S i I_T) były w każdej chwili równe natężeniom prądu w odpowiednich uzwojeniach (i_I, i_{II} i i_{III}). Inaczej rzecz się ma przy połączeniu w trójkąt. Na przykład prąd, w przewodzie R (I_R), stanowi w każdej chwili sumę (algebraiczną) prądów płynących w obwodach: (I—p_1—T — odbiornik — R—k_1—I) i (II—p_2—R — odbiornik — S—k_2—II) (I prawo Kirchhoffa). Można udowodnić, że przy jednakowym obciążeniu faz wartość szczytowa natężenia prądu w poszczególnych przewodach (I_0) jest $\sqrt{3}$ razy większa od wartości szczytowej natężenia prądu w poszczególnych uzwojeniach (i_0); $I_0 = \sqrt{3}\,i_0$. Oczywiście ten sam związek zachodzi również dla wartości skutecznych: $I_s = \sqrt{3}\,i_s$.



Rys. 4.64. Sposób przyłączania trzech żarówek (×) dla sieci prądu trójfazowego. Żarówki połączone a) w gwiazdę, b) w trójkąt

Dowód. Przypuśćmy, że każda z faz obciążona jest jednakowo, np. tą samą liczbą identycznych żarówek (patrz rys. 4.64). Wówczas prądy indukowane w poszczególnych uzwojeniach mają tę samą wartość szczytową i_0:

$$i_I = i_0 \sin \omega t\,, \quad i_{II} = i_0 \sin(\omega t + 120°)\,, \quad i_{III} = i_0 \sin(\omega t + 240°)\,.$$

Natężenie prądu I_R w przewodzie R wynosi (I prawo Kirchhoffa)

$$I_R = i_I - i_{II} = i_0\,[\sin \omega t - \sin(\omega t + 120°)] = \sqrt{3}\,i_0 \sin(\omega t - 30°)\,.$$

Podobnie

$$I_S = i_{II} - i_{III} = i_0 [\sin(\omega t+120°) - \sin(\omega t+240°)] = \sqrt{3}\, i_0 \sin(\omega t+90°),$$

$$I_T = i_{III} - i_I = i_0 [\sin(\omega t+240°) - \sin \omega t] = \sqrt{3}\, i_0 \sin(\omega t+210°).$$

Z powyższych równań widać, że wartość szczytowa natężenia prądu I_0 w każdym przewodzie wynosi $I_0 = \sqrt{3}\, i_0$.

§ **4.38. Moc prądu trójfazowego.** Przypuśćmy, że z prądnicy prądu trójfazowego odprowadza się prąd sześcioma przewodami (rys. 4.61) do trzech niezależnych obwodów użytkowania. Jeśli prądy w tych obwodach są jednakowe, to mówimy, że wszystkie trzy fazy są jednakowo obciążone. Amperomierze włączone do tych trzech obwodów pokażą jednakowe natężenia skuteczne w poszczególnych fazach, czyli w poszczególnych uzwojeniach (i_s). Woltomierze dołączone do zacisków uzwojeń pokażą napięcie skuteczne (u_s) poszczególnych faz. Moc wydzielana przez prąd w każdym z trzech obwodów jest tedy równa $u_s i_s \cos\varphi$ [wzór (4.40)]. Zatem moc wydzielana w całym odbiorniku trójfazowym wynosi

$$M_s = 3u_s i_s \cos\varphi.$$

Wzór ten określa moc prądu trójfazowego za pomocą napięcia i natężenia w uzwojeniach prądnicy. Nie zmieni się wcale, jeśli uzwojenia połączymy w trójkąt lub w gwiazdę. Wygodniej jednak będzie wzór ten wyrazić za pomocą napięcia międzyprzewodowego i natężenia skutecznego w przewodach (U_s i I_s). W tym celu napiszmy go tak:

$$M_s = \sqrt{3}\sqrt{3}\, u_s i_s \cos\varphi.$$

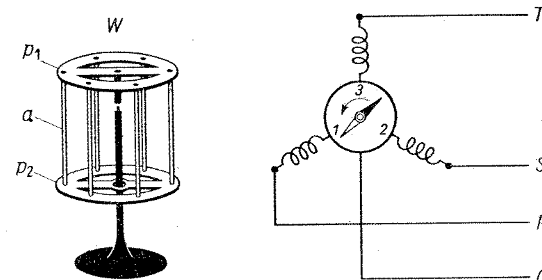
Przy połączeniu w gwiazdę napięcia między przewodami $U_s = \sqrt{3}\, u_s$, ale prąd w przewodach I_s równy jest prądowi w uzwojeniach i_s ($I_s = i_s$). Natomiast przy połączeniu w trójkąt napięcie U_s nie różni się od u_s, ale prąd w przewodach I_s jest $\sqrt{3}$ razy silniejszy od prądu i_s w uzwojeniach: $I_s = \sqrt{3}\, i_s$. Wobec tego w obu tych wypadkach moc wyraz się wzorem

$$M_s = \sqrt{3}\, U_s I_s \cos\varphi, \tag{4.43}$$

gdzie U_s i I_s oznaczają wartości skuteczne napięcia międzyprzewodowego i natężenia prądu w przewodach.

§ **4.39. Silnik trójfazowy asynchroniczny [zasada działania].** Trzy cewki 1, 2 i 3 umieśćmy w płaszczyźnie poziomej tak, jak wskazuje rys. 4.65; osie tych cewek mają tworzyć ze sobą kąty po 120°. Połączmy cewki w gwiazdę lub w trójkąt i dołączmy do sieci prądu trójfazowego; na rys. 4.65 cewki połączone są w gwiazdę. W środku tego układu umieśćmy igłę magnetyczną osadzoną na ostrzu. Igła zostaje wprawiona w szybki ruch obrotowy. Jeśli ten ruch odbywa się w lewo jak na rysunku, dowodzi to, że maksymalne natężenia prądu występują kolejno w cewkach *1*, *2* i *3* (a nie *1*, *3*, *2*). Stosownie do tego trzy sinusoidy na rys. 4.66 przedstawiają przebieg natężenia prądu w cewkach *1*, *2* i *3*. Weźmy pod uwagę chwile odpowiadające pionowym kreskom *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, następujące po sobie co 1/6 okresu. W chwili *a*, na przykład w cewce *1*, płynie prąd najsilniejszy; przypuśćmy, że jego kierunek jest taki, że na końcu cewki bliższym igły wytwarza się biegun *N*; w tej samej chwili *a* w cewkach *2* i *3* płyną prądy w przeciwnym kierunku, lecz słabsze,

tak że na końcach cewek bliższych igły wytwarzają się bieguny *S* stosunkowo słabsze. Rozmieszczenie tych biegunów (silnego *N* i dwóch słabszych *S*) uwidocznione jest w kole a na rys. 4.66. Dalsze koła b, c, itd. ukazują rozmieszczenie biegunów magnetycznych

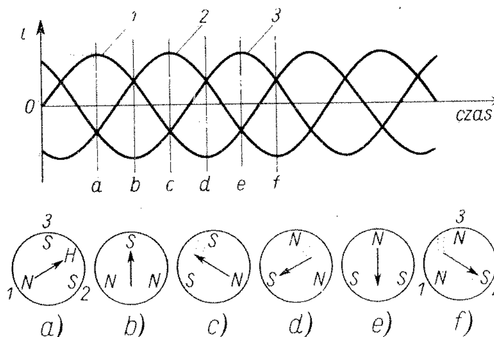


Rys. 4.65. Między cewkami *1*, *2* i *3* powstaje pole magnetyczne „wirujące", które wprawia w ruch obrotowy igłę magnetyczną albo „klatkę *W*", będącą prototypem wirnika silnika „krótkozwartego"

w chwilach późniejszych. Natężenie pola magnetycznego panującego w środku koła można przedstawić w postaci wektora **H**, zaznaczonego na rysunkach. Widzimy, że wektor magnetyczny obraca się wykonując jeden obrót w ciągu okresu *T*.

Można ściśle udowodnić, że wektor **H** nie zmienia swojej wartości, lecz tylko kierunek i że wiruje ruchem jednostajnym.

Zamiast igły magnetycznej umieśćmy na jej miejscu wirnik *W*, przedstawiony na rys. 4.65, mogący obracać się dookoła osi pionowej. Wirnik ten składa się z kilku prętów miedzianych (*a*), przynitowanych do dwóch miedzianych pierścieni (p_1 i p_2); całość przy-



Rys. 4.66. Na wykresie: przebieg natężenia prądu w trzech cewkach *1*, *2* i *3* z rys. 4.65. Poniżej: wypadkowy wektor **H** pola magnetycznego w środku gwiazdy złożonej z cewek (rys. 4.65); *a*, *b*, ..., *f* — kolejne chwile; widać, że wektor **H** obraca się

pomina klatkę mającą kształt walca. Wirnik ten znajduje się więc w wyżej opisanym, wirującym polu magnetycznym; niech na razie pozostaje w spoczynku. Dla zrozumienia procesu, jakiego będziemy świadkami, wyobraźmy sobie, że jest odwrotnie: pole magnetyczne jest nieruchome, tzn. wektor **H** jest w spoczynku, a wirnik zostaje wprawiony w ruch obrotowy. Wobec tego w obwodach klatki, utworzonych przez pręty i oba pierścienie, wzbudzają się prądy indukcyjne. Powstają zatem siły elektrodynamiczne, hamujące ruch obrotowy wirnika. Siły te działają na pręty wirnika stycznie do powierzchni walca. Hamować one będą ruch wirnika, tzn. zmniejszać jego prędkość względną (względem linii sił pola magnetycznego) tak długo, aż wirnik stanie; innymi słowy, aż pręty

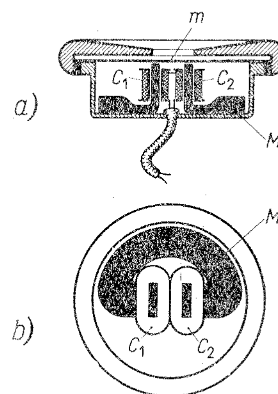
przestaną przecinać linie sił pola magnetycznego. Otóż siły elektrodynamiczne powstają niezależnie od tego, czy wirnik obraca się, a pole magnetyczne spoczywa, czy też pole magnetyczne obraca się, a wirnik spoczywa. Zatem wystąpią one i w naszym wypadku, gdy klatkę umieścimy w wirującym polu magnetycznym. Pod ich wpływem wirnik zaczyna się obracać w takim kierunku, aby, jak wyżej, prędkość jego względem wektora **H** zmalała; a zatem wirnik obraca się w kierunku wirowania wektora **H** (doświadczenie). Prędkość jego rośnie coraz bardziej, aż wreszcie zrówna się niemal z prędkością wirowania wektora magnetycznego. Pozostaje jednak bardzo mała różnica prędkości, która sprawia, że pręty klatki przecinają jeszcze, choć powoli, linie sił pola magnetycznego, wskutek czego w obwodach wirnika powstają słabe prądy indukcyjne; a zatem na prądy klatki działają pewne niewielkie siły elektrodynamiczne, pokonując siłę tarcia w łożyskach i opór powietrza.

Na wyżej opisanej zasadzie zbudowany jest silnik asynchroniczny trójfazowy. Jego wirnik składa się również z prętów połączonych dwoma pierścieniami, lecz wnętrze tego wirnika stanowi rdzeń złożony z blach żelaznych. Gdy silnik zostanie obciążony, zwalnia swój bieg dopóty, dopóki prędkość (względna) wirnika względem pola magnetycznego wzrośnie do tego stopnia, że w wirniku powstanie dostatecznie silny prąd indukcyjny. Wówczas dopiero siły elektrodynamiczne działające na pręty z prądem, wytworzą dostatecznie wielki moment obrotowy, który zrównoważy obciążenie silnika. Wirnik nie nadąża wtedy za obracającym się polem magnetycznym; powstała różnica prędkości nazywa się „poślizgiem" i wynosi, w dobrych silnikach, zaledwie kilka procentów prędkości podczas biegu luzem.

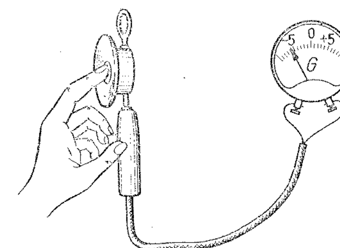
Opisany tu silnik asynchroniczny wolny jest od wad, jakie ma silnik synchroniczny (por. § 4.35a). Silniki, których wirnik stanowi obwód elektryczny zamknięty w sobie, noszą nazwę silników „krótkozwartych". Na podkreślenie zasługuje fakt, że nie mają one ani kolektora, ani szczotek, ani nawet pierścieni, które w silnikach innego typu służą do doprowadzenia prądu do wirnika (patrz rys. 4.33); i to właśnie stanowi ich dużą zaletę.

***§ 4.40. Telefon i inne przyrządy elektroakustyczne.** a) Słuchawka telefoniczna w roli mikrofonu. Gdy biegun magnesu zbliża się i oddala względem cewki, to w zwojach jej powstaje prąd przemienny, zmieniający natężenie i kierunek w rytm drgań magnesu. Na tej zasadzie zbudowany jest telefon. Rysunek 4.67 przedstawia konstrukcję zwykłej słuchawki telefonicznej. Rolę drgającego magnesu spełnia błona stalowa, czyli membrana, namagnesowana trwale w silnym polu magnetycznym magnesu M. Namagnesowanie to jest tego rodzaju, że naprzeciwko bieguna N magnesu indukuje się w membranie biegun S, a naprzeciwko bieguna S magnesu — biegun N. Jeśli membranę zbliżać do biegunów magnesu M lub od nich oddalać, to w zwojach cewek C_1 i C_2 indukują się siły elektromotoryczne. Cewki te połączone są szeregowo tak, aby siły elektromotoryczne indukcji dodawały się. Że w zwojach cewek indukują się rzeczywiście prądy indukcyjne, wskazuje doświadczenie wyobrażone na rys. 4.68. Przewody idące od uzwojeń słuchawki łączymy z galwanometrem, a membranę naciskamy palcem. W chwili naciśnięcia membrany wskazówka galwanometru wychyla się w jednym kierunku, a w chwili uwolnienia membrany — w drugim. Widzimy, że słuchawka telefoniczna działa

w tym doświadczeniu jak miniaturowy generator prądu przemiennego. Jeśli na membranę padnie fala głosowa, pobudzi ją do drgań (wymuszonych), a te wywołują w uzwojeniu cewek siłę elektromotoryczną przemienną (drgającą), której okres i amplituda zmieniają się tak, jak okres i amplituda fali głosowej. W doświadczeniu tym słuchawka została zastosowana do zupełnie przeciwnego celu, aniżeli ma to miejsce w praktyce. W tym



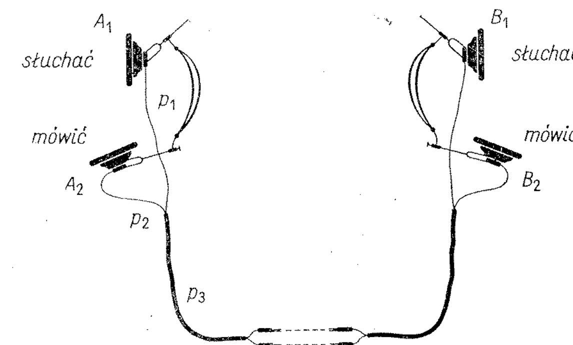
Rys. 4.67. a) Słuchawka telefoniczna w przekroju; b) widok magnesu M z góry



Rys. 4.68. Słuchawka telefoniczna jako generator prądu przemiennego

bowiem doświadczeniu słuchawka telefoniczna zamieniała drgania głosowe na drgania prądu; przyrząd, który pełni taką funkcję, nazywa się *mikrofonem*. Widzimy więc, że słuchawka może być swego rodzaju mikrofonem.

b) Słuchawka telefoniczna w roli słuchawki. Właściwą swą funkcję słuchawka pełnić będzie wtedy, gdy prąd drgający wytwarzany przy pomocy mikrofonu



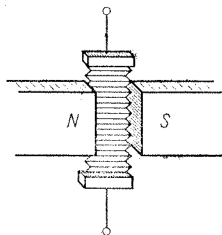
Rys. 4.69. Dwie słuchawki radiowe połączone ze sobą długim podwójnym przewodem umożliwiają prymitywną komunikację telefoniczną w obu kierunkach

przepuścimy przez uzwojenie słuchawki. Wówczas prąd ten wzmacniać będzie lub osłabiać bieguny magnesu M i wskutek tego membrana słuchawki drgać będzie w takt drgań prądu, a więc w takt drgań membrany mikrofonu. Stanie się więc źródłem takich samych dźwięków jak te, które zostały skierowane do mikrofonu.

Wywody powyższe możemy poprzeć następującym łatwym doświadczeniem. Dwie słuchawki radiowe łączymy ze sobą długim podwójnym przewodnikiem i umieszczamy je w dwóch różnych pokojach, znacznie od siebie oddalonych (rys. 4.69). Słuchawka radiowa składa się, jak wiadomo, z dwóch pojedynczych słuchawek (np. A_1 i A_2), połączonych ze sobą równolegle dwoma przewodnikami (p_1 i p_2, każdy oczywiście podwójny). Jedna z tych słuchawek gra rolę właściwej słuchawki (A_1 lub B_1), a druga — mikrofonu (A_2 lub B_2); pierwszą więc trzymamy przy uchu, drugą — przy ustach. Gdy mówimy np. do A_2, to słychać we wszystkich pozostałych słuchawkach, a więc i w B_1. To samo w kierunku przeciwnym. Widzimy, jak prostym sposobem możemy zrealizować połączenie telefoniczne dwukierunkowe.

c) Inne mikrofony. Słuchawka telefoniczna jako mikrofon ma rozmaite wady, m.in. tę, że jej membrana, sztywna i stalowa błona, ma drgania własne w obszarze wysokich tonów. Wskutek tego membrana ta łatwiej reaguje na pewne wysokie tony aniżeli na niskie; powoduje to zniekształcanie przekazywanych dźwięków, gdyż nie wszystkie tony harmoniczne danego dźwięku zostają z właściwym natężeniem oddane przez membranę.

Wady tej pozbawiony jest w znacznym stopniu mikrofon wstęgowy (rys. 4.70). Bardzo cienka, pofałdowana metalowa wstęga umieszczona w polu magnetycznym drga pod wpływem fal głosowych. Wskutek tego ruchu wytwarza się w niej siła elektromotoryczna indukcji. Mikrofon ten stosowany był wyłącznie w radiotechnice.



Rys. 4.70. Zasada mikrofonu wstęgowego

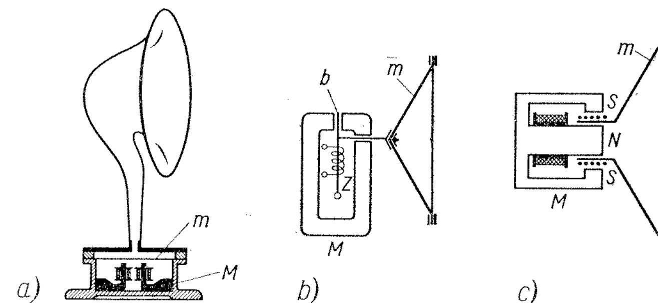
Do bardzo rozpowszechnionych mikrofonów zarówno w telefonii, jak i w radiotechnice, należy mikrofon węglowy. W odróżnieniu od mikrofonów indukcyjnych oparty jest on na zupełnie odmiennej zasadzie; omówiony będzie w części 2.

d) Głośniki. Szybki rozwój radiofonii po pierwszej wojnie światowej sprawił, że sprzęt elektroakustyczny udoskonalał się również w bardzo szybkim tempie. Ponieważ lampa katodowa (patrz część 2) umożliwiła wzmacnianie prądów mikrofonowych setki i tysiące razy, przeto słuchawka mogła być zastąpiona przyrządem o większej mocy, tj. *głośnikiem*. Jest to przyrząd, który podobnie jak słuchawka zamienia prądy drgające (ale znacznie silniejsze) na drgania membrany, a więc na dźwięk. Budowa jego jednak pozwala na drgania membrany o znacznie większej amplitudzie aniżeli w słuchawkach; wytwarza więc on dźwięki o dużym natężeniu.

Pierwszym typem głośnika stosowanym w początkach radiofonii był głośnik „magnetyczny" z membraną stalową, którego budowa wzorowana jest dokładnie na słuchawce

(rys. 4.71a). Z powodu własnych drgań membrany oddawał on silniej tony wysokie aniżeli niskie. Zniekształcał więc dźwięk w sposób niemiły dla ucha.

Lepszym typem głośnika jest głośnik magnetyczny z membraną papierową (rys. 4.71b). Pręcik żelazny *b* może się swobodnie poruszać ruchem drgającym wewnątrz zwojnicy *Z*, przez którą przepuszcza się prąd mikrofonowy po wzmocnieniu. Pod wpływem tego prądu pręcik magnesuje się silniej lub słabiej, w takt zmian natężenia prądu mikrofonowego. Ponieważ jeden jego koniec znajduje się w polu między biegunami magnesu *M*, przeto pręcik drga i zmusza do drgań membranę papierową *m*, mającą kształt lejka.

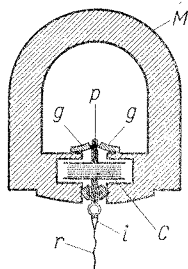


Rys. 4.71. Różne typy głośników radiowych w rozwoju historycznym: a) magnetyczny z membraną stalową z okresu lat dwudziestych, b) magnetyczny z membraną papierową, nieco późniejszy, c) elektrodynamiczny z membraną papierową (lata trzydzieste i późniejsze)

Najdoskonalszym jednak głośnikiem, obecnie wyłącznie używanym, jest głośnik „elektrodynamiczny" (rys. 4.71c). Membrana papierowa *m* w kształcie dużego lejka zakończona jest na węższym końcu cylindrem papierowym, na którym nawinięte jest uzwojenie cewki, na rysunku zaznaczone punktami. Do uzwojenia doprowadzamy wzmocniony prąd mikrofonowy. Cewka ta znajduje się w cylindrycznej szczelinie między biegunami silnego magnesu trwałego, który ma kształt cylindrycznego naczynia z walcem wewnątrz. W takt zmian natężenia prądu w cewce, cewka i membrana drgają, gdyż na uzwojenie cewki działają siły elektrodynamiczne, prostopadłe do kierunku prądu i do linii sił pola magnetycznego. W głośnikach tego typu o dużej mocy, czyli tzw. megafonach, zamiast magnesu trwałego stosuje się elektromagnes; na rysunku zaznaczono jego uzwojenie. Głośnik elektrodynamiczny ma również pewną wadę, mianowicie oddaje on stosunkowo silniej tony niskie. Wskutek tego dźwięk jest w specyficzny sposób zniekształcony (wychodzi „jak z beczki"), co jest dobrze znane wszystkim radiosłuchaczom. Bardzo dobrym rozwiązaniem tej trudności jest stosowanie jednocześnie kilku głośników elektrodynamicznych o odmiennej konstrukcji różniącej się wielkością i sztywnością membran, jak również wielkością magnesów, pudeł rezonansowych itp.; jedne odtwarzają silniej tony niskie, inne — wysokie.

e) Adapter gramofonowy. Igła gramofonowa *i* zakończona szafirem posuwając się wzdłuż rowka *r* płyty gramofonowej, drga (rys. 4.72) Z igłą połączony jest sztywno pręcik żelazny *p*, znajdujący się między biegunami magnesu *M*. Drgając wraz z igłą

zbliża się raz do jednego bieguna magnesu, raz do drugiego. Dzięki temu przemagnesowuje się w rytm drgań i indukuje w cewce C prądy drgające. Gumki gg zapobiegają zbyt silnym drganiom. Przyrząd powyższy jest to głowica adaptera gramofonowego,

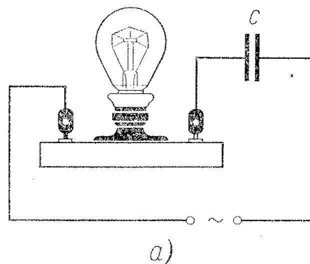


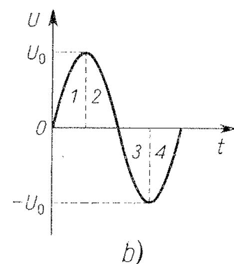
Rys. 4.72. Głowica adaptera gramofonowego w przekroju

zamienia ona drgania mechaniczne igły gramofonowej na drgający prąd elektryczny. Prąd ten można wzmocnić za pomocą wzmacniacza lampowego z głośnikiem, który go znów zamieni na dźwięki (patrz część 2).

D. Pojemność i indukcja własna w obwodzie prądu przemiennego. Rezonans

§ 4.41. Podwójna rola kondensatora w obwodzie prądu przemiennego. Dane doświadczalne. a) K o n d e n s a t o r p r z e w o d z i p r ą d p r z e m i e n n y. Zwykłą żarówkę i kondensator o pojemności 0,1—1 μF należy połączyć szeregowo i dołączyć do sieci prądu przemiennego (rys. 4.73a). Z łatwością stwierdzamy, że żarówka świeci tym jaśniej,





Rys. 4.73. a) Kondensator przewodzi prąd przemienny. b) *1* — prąd ładowania, *2* — prąd rozładowania, 3 — prąd ładowania w przeciwnym kierunku, *4* — prąd rozładowania

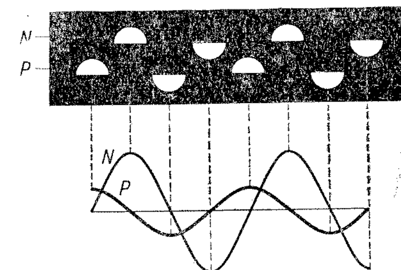
im większą pojemność ma kondensator. Doświadczenie to poucza, że kondensator, którego opór omowy (dla prądu stałego) jest, jak wiemy, nieskończenie wielki, przewodzi bardzo dobrze prąd przemienny. Zrozumienie tego zjawiska ułatwia rys. 4.73b: w pierwszej ćwiartce okresu kondensator zostaje naładowany do napięcia U_0, w drugiej rozładowany, w trzeciej zostaje naładowany prądem o przeciwnym kierunku do napięcia $-U_0$, a w czwartej znów rozładowany itd. W ten sposób w obwodzie wciąż płynie na przemian prąd ładowania i prąd rozładowania.

Jeśli opór pozorny kondensatora (Z) dla prądu przemiennego sinusoidalnego określimy jako stosunek $\frac{U_0}{i_0}$ lub $\frac{U_s}{i_s}$, to zarówno teoria (patrz niżej), jak i doświadczenie prowadzą do następującego wzoru na Z:

$$Z = \frac{1}{\omega C}. \tag{4.44}$$

(Wszystkie wielkości w jednostkach praktycznych: Z w omach, $\omega = 2\pi f$ w s^{-1}, C w faradach). Z nazywa się *oporem pojemnościowym* (*kapacytancją*) kondensatora. Dla prądu stałego ($f = 0$) opór pojemnościowy jest nieskończenie wielki, $Z = \infty$.

b) W y w o ł a n i e r ó ż n i c y f a z p r ą d u i n a p i ę c i a. Wykonajmy doświadczenie analogiczne do przedstawionego na rys. 4.47 (§ 4.28), lecz zamiast indukcyjności własnej L włączmy do obwodu pojemność C. Lampka neonowa P zaświeca się wtedy, gdy przez opór ϱ płynie najsilniejszy prąd ładowania lub rozładowania. Natomiast lampka N zaświeca się wtedy, gdy na zaciskach kondensatora panuje największe napięcie. To ostatnie zaś występuje wtedy, gdy proces ładowania jest ukończony, a więc gdy natężenie prądu wynosi 0. Zrozumiałe jest więc, że *natężenie prądu w obwodzie zawierającym kondensator musi wyprzedzać w fazie* napięcie na zaciskach kondensatora o około 90°. Przewidywanie to potwierdzi nam doświadczenie: jeśli obie lampki oglądać będziemy w zwierciadle wirującym, to ujrzymy (rys. 4.74), że błyski lampki N są poprzedzane błyskami lampki P.



Rys. 4.74. Lampki neonowe N i P oglądane w zwierciadle wirującym. Prąd wyprzedza w fazie napięcie niemal o 90°

§ 4.42. Podwójna rola kondensatora w obwodzie prądu przemiennego. Teoria. Wiemy już, że prąd przemienny przepływa przez kondensator z łatwością. Załóżmy, że ma on charakter sinusoidalny, tzn. że jego natężenie wyraża się równaniem

$$i = i_0 \sin \omega t. \tag{a}$$

W pewnym momencie t_0 kondensator jest rozładowany i zaczyna się na nowo ładować, moment ten charakteryzuje się tym, że prąd ma wówczas największe natężenie, tzn. że $\sin \omega t_0 = 1$, czyli $\omega t_0 = 2\pi f t_0 = 90°$. W późniejszym momencie t prąd jest już słabszy, gdyż kondensator naładował się częściowo i na jego okładkach powstało napięcie przeciwstawiające się prądowi ładującemu (siła przeciwelektromotoryczna E). Ładunek nagromadzony w tym czasie w kondensatorze wynosi (por. § 2.4)

$$e = \int_{t_0}^{t} i\,dt = i_0 \int_{t_0}^{t} \sin \omega t\,dt = \frac{i_0}{\omega} \int_{90°}^{\omega t} \sin \alpha\,d\alpha = -\frac{i_0}{\omega} \cos \omega t.$$

Wobec tego siła przeciwelektromotoryczna E, czyli napięcie kondensatora, jest

$$E=\frac{e}{C}=-\frac{i_0}{\omega C}\cos\omega t=\frac{i_0}{\omega C}\sin(\omega t-90°). \qquad \text{(b)}$$

Z równania tego wynikają dwa wnioski: a) Wartość szczytowa napięcia jest

$$E_0=\frac{i_0}{\omega C}; \qquad \text{(c)}$$

ten sam związek musi się oczywiście stosować do wartości skutecznych:

$$E_s=\frac{i_s}{\omega C}; \qquad \text{(d)}$$

jak widać, rolę oporu $\left(\frac{E_s}{i_s}\right)$ odgrywa wyrażenie

$$Z=\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{2\pi fC} \qquad (4.44)$$

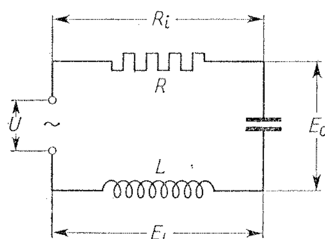
zwane *oporem pojemnościowym* kondensatora.

Z równania (b) wynika poza tym, że napięcie E na zaciskach kondensatora opóźnia się w fazie o 90° względem prądu, co istotnie stwierdziliśmy doświadczalnie.

§ 4.43. Opór, indukcyjność własna i pojemność w obwodzie prądu przemiennego. Jeśli w obwodzie prądu znajduje się tylko opór R i indukcyjność własna L, to do wartości chwilowych napięcia U i natężenia i stosuje się prawo Ohma w postaci wzoru (e) (§ 4.29):

$$U=Ri-E_L.$$

gdzie E_L jest siłą elektromotoryczną indukcji własnej [wzór (c), § 4.29]. Przypuśćmy, że w którymkolwiek miejscu przerywamy obwód i włączamy kondensator (rys. 4.75).



Rys. 4.75. Opór, indukcyjność własna i pojemność w obwodzie prądu przemiennego

Prąd przemienny płynie w dalszym ciągu, ale w obwodzie pojawia się teraz siła przeciwelektromotoryczna E_C, określona wzorem (b) z paragrafu poprzedniego. Wobec tego w powyższym wzorze, wyrażającym prawo Ohma, należy U pomniejszyć o E_C:

$$U-E_C=Ri-E_L.$$

Załóżmy, że prąd jest sinusoidalny o natężeniu szczytowym i_0,

$$i=i_0\sin\omega t. \qquad \text{(a)}$$

Wówczas napięcie chwilowe U na krańcowych zaciskach obwodu jest

$$U=Ri-E_L+E_C=Ri_0\sin\omega t+\omega Li_0\cos\omega t-\frac{i_0}{\omega C}\cos\omega t=$$

$$=Ri_0\left(\sin\omega t+\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}\cos\omega t\right).$$

Współczynnik przy $\cos\omega t$ oznaczmy, podobnie jak w § 4.29, jako tangens kąta φ:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}. \qquad (4.45)$$

Wówczas wyrażenie na U znakomicie się uprości:

$$U=Ri_0(\sin\omega t+\operatorname{tg}\varphi\cos\omega t)=\frac{Ri_0}{\cos\varphi}(\sin\omega t\cos\varphi+\sin\varphi\cos\omega t)=\frac{Ri_0}{\cos\varphi}\sin(\omega t+\varphi).$$

Ale

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}=\frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}};$$

podstawiając to ostatnie wyrażenie do wzoru na U, otrzymujemy

$$U=Zi_0\sin(\omega t+\varphi), \qquad \text{(b)}$$

gdzie

$$Z=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2} \qquad (4.46)$$

jest zawadą całego obwodu. Z równania (b) widzimy, że wartość szczytowa napięcia

$$U_0=Zi_0. \qquad \text{(c)}$$

Podzieliwszy obie strony przez $\sqrt{2}$ otrzymujemy związek dla wartości skutecznych

$$U_s=Zi_s. \qquad \text{(d)}$$

Związek ten jest odpowiednikiem prawa Ohma dla prądu przemiennego.

Wyniki powyższych rachunków dadzą się streścić w następujących słowach: *Jeśli w obwodzie zawierającym opór, indukcyjność własną i pojemność — płynie prąd sinusoidalny*

$$i=i_0\sin\omega t,$$

na krańcowych zaciskach tego obwodu panuje napięcie również sinusoidalne

$$U=Zi_0\sin(\omega t+\varphi), \qquad \text{(b)}$$

lecz wyprzedzające w fazie prąd o kąt φ, którego tangens jest

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}; \qquad (4.45)$$

amplituda napięcia, $U_0 = Zi_0$, *jest iloczynem amplitudy natężenia prądu* i_0 *i zawady obwodu* Z *wyrażonej wzorem*

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \tag{4.46}$$

W powyższych rozważaniach opór R oznaczał całkowity opór omowy obwodu, a więc opór opornika + opór cewki + opór doprowadzeń do kondensatora. Wszystkie te opory jako połączone w szereg zostały oznaczone wspólnym symbolem R na rys. 4.75.

Jak już mówiliśmy, ωL jest oporem indukcyjnym obwodu, zaś $\frac{1}{\omega C}$ — oporem pojemnościowym. Wyrażenie $\omega L - \frac{1}{\omega C}$ nosi nazwę *oporu biernego* (*reaktancji*) i oznacza się literą X

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}. \tag{4.47}$$

Ze wzoru (4.46) widać, że zawadę Z obwodu oblicza się jako przeciwprostokątną trójkąta o bokach R i X:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}. \tag{4.48}$$

Kąt pomiędzy R i Z — to φ, jak wynika ze wzoru (4.45).

Przypadki szczególne: 1. $C = 0$: w obwodzie jest tylko opór i indukcja własna. Powyższe wzory przechodzą we wzory (4.38) i (4.39), podane w § 4.29.

2. $L = 0$: w obwodzie mamy kondensator i opór dołączony szeregowo. Zawada wynosi

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}. \tag{4.49}$$

Jest więc większa od oporu omowego. Napięcie opóźnia się w fazie względem prądu o φ, przy czym

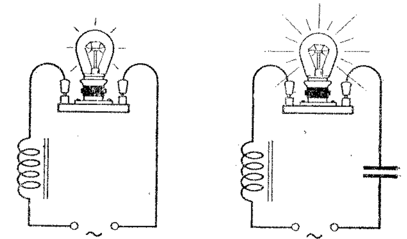
$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{\omega CR}. \tag{4.50}$$

Dla znikomego oporu, φ zbliża się do 90°, a wzór na Z przybiera postać (4.44).

Doświadczenie. Wzór (4.46) poucza, że pojemność C, byle dostatecznie duża, włączona do obwodu, w którym znajduje się opór R i indukcja własna L, zmniejsza zawadę obwodu. Ten dość paradoksalny wniosek sprawdzimy doświadczalnie (rys. 4.76). Żarówkę żarzymy z sieci prądu przemiennego przez dławik (cewka z rdzeniem żelaznym); żarówka świeci słabo. Obwód przerywamy i włączamy w szereg kondensator: a) o pojemności bardzo małej — żarówka świeci ciągle słabo, b) o pojemności odpowiednio dobranej — żarówka świeci jasno, c) o pojemności bardzo dużej — żarówka świeci znów słabo.

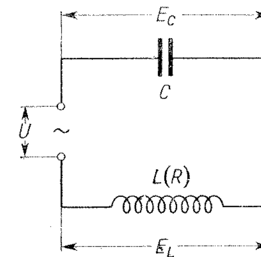
Powyższe doświadczenie wykazuje, że zgodnie ze wzorem (4.46) włączenie do obwodu odpowiedniej pojemności zmniejsza jego zawadę. Zmniejsza się bowiem opór bierny

$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$. Ale skoro opór bierny się zmniejsza, przeto i kąt φ zmniejsza się zgodnie ze wzorem (4.45), a zatem $\cos\varphi$ — współczynnik mocy — zwiększa się. Widzimy, że za pomocą kondensatora możemy „poprawić $\cos\varphi$" i zwiększyć przez to moc prądu; jest to zagadnienie ważne w elektrotechnice.



Rys. 4.76. Żarówka włączona przez odpowiednio dobrany kondensator świeci jaśniej

§ **4.44. Rezonans elektryczny. Przetężenie i przepięcie.** Z rozważań i z doświadczenia poprzedniego paragrafu wyciągniemy bardzo ważny wniosek. Przypuśćmy, że obwód zawiera cewkę o indukcji własnej L i o bardzo małym oporze omowym R (rys. 4.77).



Rys. 4.77. Przy rezonansie napięcia E_C i E_L znacznie przewyższają napięcie zasilające U

Do obwodu tego włączmy szeregowo pojemność C tak dobraną, aby dla danej częstotliwości f prądu skompensować różnicę faz φ, tzn. aby $\operatorname{tg}\varphi$ równał się zeru. Cel ten osiągniemy, gdy pojemność i indukcja własna spełnią warunek wynikający ze wzoru (4.45) poprzedniego paragrafu:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0. \tag{a}$$

Ale jednocześnie zawada elektryczna obwodu stanie równa się oporowi omowemu,

$$Z = R,$$

co wynika ze wzoru (4.46). A wtedy natężenie prądu w obwodzie może dojść do olbrzymiej wartości, zwłaszcza gdy obwód ma mały opór omowy. Zjawisko to nosi nazwę *rezonansu elektrycznego*. Występuje ono wtedy, powtarzamy, gdy indukcja własna L i pojemność C spełniają warunek (a), czyli

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}. \tag{b}$$

Z równania tego możemy wyznaczyć tę częstotliwość, przy której zachodzi rezonans:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \tag{4.51}$$

stąd wyznaczamy okres prądu, przy którym rezonans występuje.

$$\underset{(s)}{T} = 2\pi\sqrt{\underset{(H)}{L}\,\underset{(F)}{C}}\,. \tag{4.52}$$

Przypuśćmy, że L i C zostały tak dobrane, że obwód elektryczny jest w rezonansie z zasilającym go prądem przemiennym (rys. 4.76). Wówczas z całej zawady obwodu pozostaje niewielki opór omowy R i natężenie prądu w obwodzie przybiera dużą na ogół wartość

$$i_s = \frac{U_s}{R}. \tag{c}$$

Prąd ten przepływa zarówno przez kondensator, jak i przez cewkę L i na ich zaciskach wywołuje napięcia E_C i E_L, których wartość skuteczna równa jest iloczynowi i_s i zawady kondensatora czy cewki. Zawada kondensatora równa jest $\frac{1}{\omega C}$, natomiast zawada cewki wynosi $\sqrt{R^2+\omega^2L^2} \cong \omega L$, gdyż niewielkie R^2 wobec drugiego wyrazu możemy pominąć. Zatem

$$E_{Cs} = \frac{i_s}{\omega C}, \tag{4.53}$$

$$E_{Ls} = \omega L i_s. \tag{4.54}$$

Ale z równania (c) mamy

$$U_s = R i_s. \tag{4.55}$$

Porównując ostatnie trzy wyrażenia widzimy, że $E_{Cs} = E_{Ls}$ oraz że oba te napięcia są znacznie wyższe od U_s, gdyż R jest na ogół oporem bardzo małym w stosunku do zawady ωL czy $\frac{1}{\omega C}$. *A zatem, jeżeli obwód złożony z pojemności i indukcji własnej jest w rezonansie z prądem zasilającym go, to na zaciskach kondensatora i cewki występują wysokie napięcia, znacznie przewyższające napięcie zasilające; napięcia te są niemal równe sobie i przeciwnie skierowane, tak że w sumie dają stosunkowo niewielkie napięcie zasilające U.*

Stosunek napięcia na końcach cewki do napięcia zasilającego nazywa się *współczynnikiem przepięcia*, przyjęto oznaczać go literą Q. Jak to wynika ze wzorów (4.54) i (4.55), wyraża się on wzorem

$$Q = \frac{\omega L}{R}. \tag{4.56}$$

Jest on więc stosunkiem oporu indukcyjnego cewki do jej oporu omowego. Współczynnik Q ma olbrzymie znaczenie w radiotechnice (por. § 4.45). Nazywa go się wówczas *dobrocią obwodu.*

Przykład liczbowy. Przypuśćmy, że prąd przemienny rozprowadzany jest pod napięciem $U_s = 3000$ V długim dwużyłowym kablem podziemnym. Kabel ten stanowi swego rodzaju kondensator, którego okładkami są oba przewody (obie żyły); niech jego pojemność wynosi $C = 2{,}53$ µF. Przypuśćmy, że indukcja własna przewodów i uzwojeń generatora wynosi $L = 1$ henr. Mimo że kabel jest na końcach otwarty, to jednak w obwodzie tym płynie prąd poprzez pojemność kabla, jak przez zwykły kondensator. Obliczmy natężenie tego prądu zakładając, że opór omowy połowy linii wynosi $R =$ około 5 Ω, a częstotliwość $f = 50\ \mathrm{s}^{-1}$:

$$i_s = \frac{U_s}{\sqrt{R^2+\left(2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC}\right)^2}} = \frac{3000}{\sqrt{5^2+(314-1258)^2}} = \text{około } 3\text{ A}.$$

A teraz przypuśćmy, że częstotliwość f wzrosła do $100\ \mathrm{s}^{-1}$. Wtedy prąd ma natężenie

$$i_s = \frac{3000}{\sqrt{5^2+(628-629)^2}} = \text{około } 600\text{ A}.$$

Z powyższego widzimy, że rezonans występuje w pobliżu częstotliwości $f = 100\ \mathrm{s}^{-1}$, ponieważ dla tej częstotliwości $2\pi fL \cong \frac{1}{2\pi fC}$. Zjawisko występowania tak silnego prądu bardzo niebezpiecznego dla sieci, nosi nazwę ***przetężenia.*** W naszym przykładzie nie występuje ono wprawdzie dla częstotliwości zasadniczej $50\ \mathrm{s}^{-1}$, lecz dla częstotliwości dwukrotnie większej. Grozi to jednak również zaburzeniami w sieci, ponieważ częstotliwości zasadniczej towarzyszą zazwyczaj częstotliwości harmoniczne. Napięcie, które wówczas powstaje między „okładkami kondensatora", tzn. między żyłami kabla, bywa olbrzymie i nazywa się *przepięciem.* W naszym przykładzie wyniesie ono

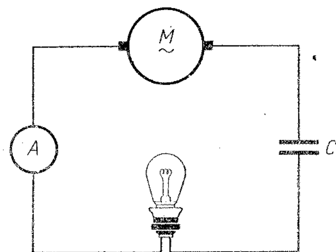
$$E = \frac{i_s}{2\pi fC} \cong 2\pi fLi_s = 628\cdot 600\text{ V} = \text{około } 377\text{ kV}.$$

Przy takim przepięciu izolacja kabla zostałaby uszkodzona, powstałoby zwarcie, stopienie kabla itp.

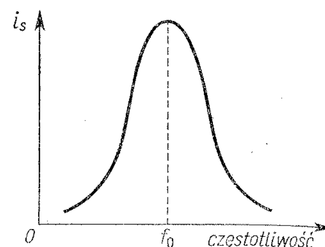
Paradoksalne doświadczenie. Już doświadczenie z rys. 4.76, w którym wykazaliśmy, że przy pewnej pojemności żarówka świeci najsilniej, natomiast przy większej lub mniejszej pojemności — słabiej, było dowodem istnienia rezonansu. Można je wykonać jeszcze innym sposobem, jeśli się rozporządza generatorem prądu przemiennego, choćby np. maszynką magnetoelektryczną z aparatu telefonicznego dawnego typu (służącą do uruchamiania dzwonka).

W obwód tego generatora (rys. 4.78) włączamy żarówkę, amperomierz i kondensator techniczny; indukcyjność własną stanowi uzwojenie generatora. Generator obracamy silnikiem elektrycznym, zwiększając stopniowo za pomocą opornika prędkość jego obrotów. Żarówka, która początkowo nie świeci, rozjaśnia się przy wzrastającej częstotliwości obrotów (a więc i częstotliwości prądu). Przy pewnej częstotliwości (rezonansowej) amperomierz wskazuje najsilniejszy prąd, żarówka świeci najjaśniej. Przy jeszcze większej

częstotliwości, chociaż wytwarzana siła elektromotoryczna jest większa, prąd słabnie i żarówka gaśnie. Zależność natężenia prądu i_s od częstotliwości przedstawia krzywa na rys. 4.79; nosi ona nazwę *krzywej rezonansu*.



Rys. 4.78. Rezonans elektryczny. M — maszynka magnetoelektryczna (od telefonu); A — amperomierz, C — kondensator ok. 5—8 μF, żarówka 4V pobierająca normalnie 0,2 A



Rys. 4.79. Krzywa rezonansu; przy częstotliwości f_0 prądu zasilającego obwód jest w rezonansie

E. Drgania elektryczne

*§ 4.45. **Obwód drgań.** Wyobraźmy sobie, że obwód elektryczny (jak na rys. 4.77) zawiera pojemność C i indukcję własną L, przy czym jego opór omowy jest znikomy. Przez obwód ten przepuśćmy prąd przemienny o okresie

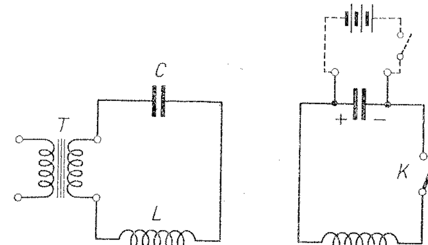
$$T = 2\pi\sqrt{LC},$$

np. z transformatora T (rys. 4.80a). Przypuśćmy na chwilę, że opór omowy R całego obwodu = 0, co oznacza, że w obwodzie nie ma strat energii. Wówczas prąd nie wytwarza w obwodzie ciepła i, raz wzbudzony, trwałby wiecznie; płynąłby z jednej okładki kondensatora na drugą i z powrotem, nie zmieniając amplitudy natężenia. Zjawisko to nosi nazwę *drgań elektrycznych*. Dla istnienia drgań elektrycznych transformator T w obwodzie nie jest wcale potrzebny. Można go usunąć; powstaje wtedy obwód drgań wyobrażony na rys. 4.80b. Aby wzniecić drgania, wystarczy naładować kondensator z baterii, po czym odłączywszy go od baterii zamknąć klucz K. Ponieważ zgodnie z założeniem opór obwodu = 0, przeto w obwodzie będzie płynął prąd przemienny od jednej płyty do drugiej i z powrotem, o nie zmniejszającej się amplitudzie i o okresie $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

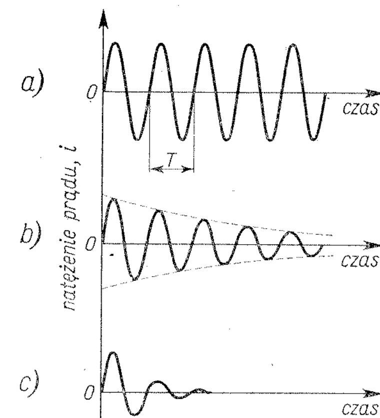
Wypadek taki ilustruje wykres na rys. 4.81a. Mówimy, że w obwodzie odbywają się *drgania elektryczne nietłumione*. Ale w rzeczywistości w każdym obwodzie istnieje opór, choćby niewielki. Sprawia on, że energia prądu drgającego zamienia się na ciepło; wskutek tego amplituda drgań stopniowo maleje do zera, szybciej lub wolniej, zależnie od wielkości oporu. W tym wypadku mamy *drgania elektryczne tłumione* (rys. 4.81b i c). Słuszność powyższych wywodów potwierdzimy doświadczeniami opisanymi w następnym paragrafie.

Zrozumiałą jest rzeczą, że stopień tłumienia drgań elektrycznych zależy od współczynnika przepięcia Q, który wprowadziliśmy w poprzednim paragrafie [wzór (4.56)].

Im współczynnik Q jest większy, tym tłumienie jest mniejsze; wówczas krzywa rezonansu jest smuklejsza. Zatem selektywność aparatów radiowych zależy w dużej mierze od współczynnika Q jego obwodów rezonansowych. Dlatego współczynnik Q nazywa się *dobrocią obwodu drgającego.*



Rys. 4.80. a) Obwód drgań sprzężony z transformatorem T. b) Obwód drgający najprostszy: po naładowaniu kondensatora i zamknięciu klucza K odbywają się drgania elektryczne



Rys. 4.81. Wykresy drgań elektrycznych: a) nietłumionych ($R = 0$), b) tłumionych słabo (małe R), c) tłumionych silnie (duże R)

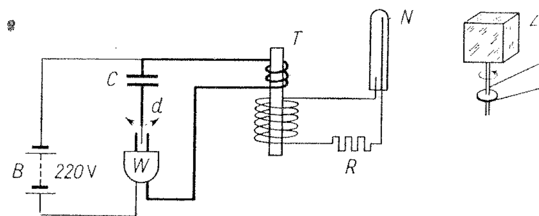
§ 4.46. **Doświadczalne stwierdzenie drgań elektrycznych.** Utwórzmy „obwód drgań" z kondensatora i cewki, którą może być np. pierwotne uzwojenie transformatora (rys. 4.82). Kondensator C ładujemy z baterii B dotknąwszy drucikiem d lewego pręcika wtyczki W. Następnie, dotknąwszy drucikiem d prawego pręcika wtyczki rozładowujemy kondensator C przez pierwotne uzwojenie transformatora T. Jak wykazać, że w obwodzie $CdWTC$ odbywają się drgania elektryczne, że kondensator bynajmniej nie rozładował się aperiodycznie? Sposób jest niezmiernie prosty: w obwodzie wtórnym transformatora umieszczamy lampkę neonową N, która rozbłyska za każdym przerzuceniem drucika d z lewego pręcika na prawy. Ale te błyśnięcia nie są tak proste, jakby się na oko zdawało. Oglądajmy je w zwierciadle wirującym Z, a ujrzymy, że każde błyśnięcie lampki neonowej składa się z wielu błyśnięć.

A więc rozładowanie kondensatora C nie jest aperiodyczne, lecz drgające, zgodnie z rozważaniami poprzednich paragrafów.

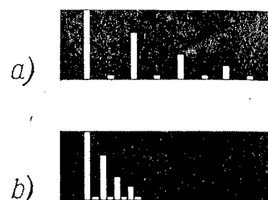
Szczególnie efektownie wypada to doświadczenie, jeśli użyjemy lampki neonowej, w postaci długiej rurki, której jedna elektroda ma postać długiego pręcika, a drugą elektrodę stanowi krótki drucik. Gdy długi pręcik jest katodą, pokrywa się warstwą świecącą na tym większej długości, im silniejszy prąd przepływa przez lampkę; prąd o natężeniu kilku mA wystarcza, aby całą katodę pokryć warstwą świecącą. Gdy pręcik ten staje się anodą, pozostaje ciemny, natomiast słabo świeci druga krótka elektroda. Lampki tego typu nie mają tak jak inne oporu wbudowanego w cokole: dlatego należy dołączać szeregowo do lampki wysokoomowy opór R. Obraz, jaki przy użyciu tej lampki ujrzymy w zwierciadle wirującym, przedstawia rys. 4.83a. Długie prążki świetlne — to świecenie pręcika, natomiast małe plamki świetlne — to świecenie drugiej elektrody. Obraz ten mówi nam nie tylko, że wyładowanie

kondensatora C ma charakter periodyczny; mówi nam jeszcze więcej: że amplituda drgań maleje, czyli że drgania są tłumione.

W opisanym doświadczeniu pożądane jest zastosowanie transformatora w postaci jednej szpuli zawierającej obydwa uzwojenia, z której rdzeń żelazny można łatwo wysuwać. Po wyjęciu rdzenia współczynnik indukcji własnej znacznie się zmniejsza. Obraz, jaki ujrzymy wówczas w zwierciadle wirującym (przy tej samej szybkości obrotów co poprzednio), przedstawia rys. 4.83b; świadczy on o tym, że okres drgań elektrycznych zmniejszył się. Podobny skutek będzie miało zmniejszenie pojemności w obwodzie drgań.



Rys. 4.82. Doświadczenie stwierdzające charakter periodyczny rozładowania kondensatora. C — kondensator blokowy 2—12 μF; T — transformator (uzwojenie pierwotne ok. 400 zwojów drutu o średnicy 0,5 mm, uzwojenie wtórne ok. 3000 zwojów). N — lampka neonowa osłonięta czarnym papierem ze szczeliną. R — opór ok. 0,1 MΩ



Rys. 4.83. Obraz lampki neonowej z rys. 4.82 oglądany w zwierciadle wirującym. a) Cewka z rdzeniem (duże L, dłuższy okres); b) cewka bez rdzenia (mniejsze L, krótszy okres)

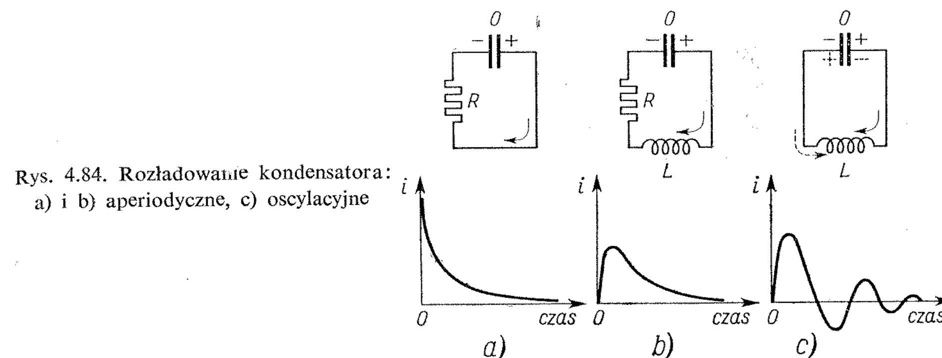
Oscylacyjny charakter rozładowania kondensatora przez cewkę można pokazać na ekranie lampy oscyloskopowej. Jest to metoda bardzo piękna i przekonywająca; objaśniona jednak będzie dopiero w drugiej części tej książki.

***§ 4.47. Mechanizm rozładowania kondensatora.** a) Jeżeli naładowany kondensator rozładowujemy przez wielki opór, przebieg zjawiska jest niezmiernie prosty: ładunek elektryczny przepływa z jednej okładki na drugą aż do wyrównania potencjałów; prąd płynący w obwodzie jest początkowo silny, potem coraz słabszy i wreszcie znika (rys. 4.84a). Zjawisko to znane jest nam z § 2.2—2.8.

b) Nieco odmienny przebieg będzie miało zjawisko, jeśli w obwodzie umieścimy cewkę L pozostawiając w nim wielki opór R (rys. 4.84b). Prąd rozładowania nie od razu będzie miał największe natężenie. Jego natężenie wzrasta od 0 do maksimum w czasie tym większym, im większy będzie współczynnik indukcji własnej L cewki. Dzieje się to dzięki zjawisku indukcji własnej: w cewce powstaje siła elektromotoryczna indukcji, przeciwstawiająca się wzrastaniu prądu rozładowania. W dalszym przebiegu tego zjawiska prąd rozładowania słabnie; powstaje tedy znów siła elektromotoryczna indukcji własnej, która czas trwania prądu rozładowania przedłuża.

c) Zupełnie inaczej odbędzie się zjawisko rozładowania kondensatora, jeśli opór R znacznie zmniejszymy, a jeszcze lepiej, jeśli usuniemy go z obwodu (rys. 4.84c). Wówczas szybkość rozładowania kondensatora będzie większa. Ale również szybciej będzie się zmieniał strumień indukcji magnetycznej wewnątrz cewki, a zatem większą będzie indukował w niej siłę elektromotoryczną indukcji własnej. Gdy prąd rozładowania słabnie,

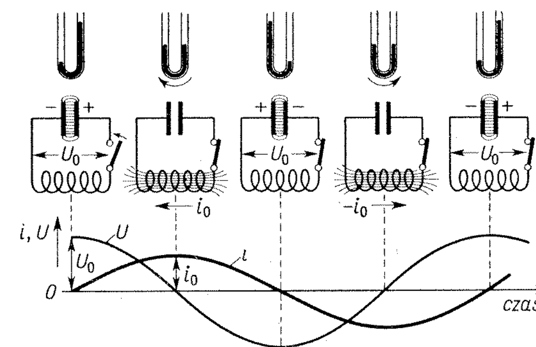
to siła ta, jak wiemy, podtrzymuje, przedłuża istnienie prądu, bowiem przy zanikającym prądzie działa ona właśnie w kierunku prądu (por. § 4.8). Przy dostatecznie małym oporze w obwodzie (czyli przy dostatecznie dużej nagłości zmian prądu w cewce) siła elektromotoryczna indukcji własnej może być tak znaczna, może tak znacznie przedłużyć prąd rozładowania kondensatora, że prąd ten nie tylko rozładuje kondensator, ale płynąc



Rys. 4.84. Rozładowanie kondensatora: a) i b) aperiodyczne, c) oscylacyjne

dalej naładuje go do napięcia przeciwnie skierowanego. Po naładowaniu kondensatora nastąpi oczywiście nowe rozładowanie. Ale to nowe rozładowanie dzięki indukcji własnej będzie znów tak znacznie przedłużone, że naładuje ponownie kondensator. Potem nastąpi nowe rozładowanie itd. Taki jest mechanizm *drgań elektrycznych.*

Drgania elektryczne raz wzbudzone nie będą trwały wiecznie; przeciwnie — zanikną. A to dlatego, że obwód mimo usunięcia zeń specjalnego oporu R ma jednak pewien opór



Rys. 4.85. Cykl obrazków „kinematograficznych" (co $^1/_4$ okresu), ilustrujących drgania wody i drgania elektryczne. Poniżej wykres napięcia i natężenia prądu podczas drgań

własny, zresztą niewielki, dzięki czemu prąd w obwodzie wydzielać będzie energię cieplną. Amplituda drgań będzie więc malała aż do zaniku. Takie drgania *tłumione*, czyli *zanikające*, wyobraża wykres na rys. 4.84c).

Opisany tu mechanizm drgań elektrycznych ilustruje cykl obrazków na rys. 4.85. Widzimy, jak energia elektryczna nagromadzona początkowo w kondensatorze ($U = U_0 =$ maksimum, $i = 0$) odpływa z kondensatora i przechodzi do cewki jako ener-

gia pola magnetycznego ($U = 0$, $i = i_0$ = maksimum), z kolei energia ta wypływa z cewki i wraca znów do kondensatora jako energia pola elektrycznego itd. Jednocześnie widzimy, że różnica faz prądu i napięcia między płytami kondensatora lub między końcami cewki wynosi 90°.

Jeżeli przypomnimy sobie nasze porównanie prądu elektrycznego do prądu wody, a napięcia do różnicy poziomów (por. § 1.43), to drgania elektryczne porównać możemy do drgań wody np. w rurce w kształcie litery *U*. Rozumiemy, że takie wahanie się poziomu wody odbywa się dzięki bezwładności wody. Fałszywy jednak byłby wniosek, że ładunki elektryczne (elektrony) objawiają tu swoją bezwładność. Bowiem owe pozory bezwładności zawdzięcza prąd elektryczny jedynie zjawisku indukcji własnej. (Jednak mimo to fizykom udało się stwierdzić, że elektrony mają pewną zresztą niezwykle małą, bezwładność, czyli masę.)

Zależność okresu *T* drgań elektrycznych od pojemności *C* i współczynnika indukcji własnej *L* wyraża słynny wzór W. Thomsona (późniejszego Lorda Kelvina, 1852), który wyprowadziliśmy w § 4.44:

$$T = 2\pi\sqrt{L\ C}\,.$$
$$\text{(s)} \qquad \text{(H) (F)}$$

Ze wzoru tego nietrudno wyprowadzić wniosek, że jeśli *L* i *C* będą miały bardzo małe wartości, to okres drgań będzie bardzo krótki, czyli częstotliwość drgań będzie bardzo wielka.

Przykład liczbowy. Obwód drgań złożony jest z butelki lejdejskiej o pojemności $C = 1000$ cm i z kilku zwojów drutu (bez rdzenia) o współczynniku indukcji własnej $L = (1/4)\cdot 10^5$ cm. Okres drgań wynosi

$$T = 6{,}28\sqrt{\frac{1}{4}\cdot 10^5\cdot 10^{-9}\ \text{H}\cdot 1000\cdot\frac{1}{9}\cdot 10^{-11}\ \text{F}} = 1{,}05\cdot 10^{-6}\ \text{s}\,.$$

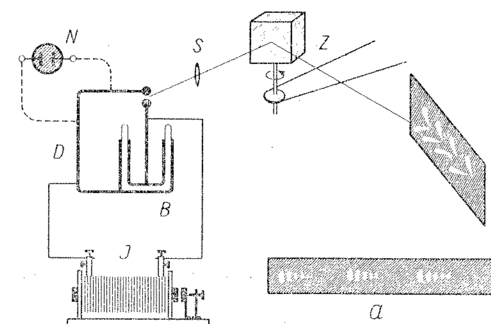
Częstotliwość tych drgań wynosi

$$f = \frac{1}{T} = \text{około } 10^6\ \text{Hz} = 1\ \text{MHz}\,.$$

Drgania o tak wielkiej częstotliwości, jak przytoczone w powyższym przykładzie, odgrywają wielką rolę w radiotechnice. Nazywają się *drganiami* (albo prądami) *wielkiej częstotliwości*. Zrealizowaniem ich zajmiemy się w następnym paragrafie.

*§ **4.48. Drgania wielkiej częstotliwości. Doświadczenie Feddersena.** Butelkę lejdejską *B* (rys. 4.86) ładujemy za pomocą cewki indukcyjnej *I*. Do zewnętrznej okładki butelki dołączony jest gruby drut *D* z kulką na końcu. Kulka ta wraz z drugą kulką, osadzoną na pręciku butelki, tworzy iskiernik. Między kulkami tego iskiernika przeskakują iskry z częstotliwością równą częstotliwości przerywań młoteczka induktora. Iskry te widzimy oddzielnie, jeśli je oglądać w zwierciadle wirującym *Z*, obracanym powoli. Obracajmy jednak zwierciadło coraz prędzej. Poszczególne iskry będą się początkowo rozszerzały, aż wreszcie przy dostatecznie wielkiej prędkości dostrzeżemy, że każda iskra składa się z grupy oddzielnych iskierek. Fakt ten dowodzi, że poszczególne jednorazowe wyładowanie składa się z szeregu wyładowań. Jeśli przerwa iskrowa będzie duża (około 1 mm), grupy iskierek będą nieliczne, będą się składały z 2—3 oddzielnych iskierek; jest to objaw silnego tłumienia, spowodowanego znacznym oporem dość dużej przerwy iskrowej. Jeśli natomiast przerwa iskrowa będzie bardzo mała (ułamek mm), wówczas grupy będą się składały z kilkunastu iskierek; jest to objaw słabszego tłumienia.

Doświadczenie w powyższej formie przekonuje nas tylko o tym, że rozładowanie kondensatora jest zjawiskiem periodycznym, że się składa z szeregu rozładowań następujących szybko po sobie. Ale nie przekonuje nas o tym, że kolejne rozładowania odbywają się w przeciwnych kierunkach. Przekonał się o tym Feddersen (1857), który opisane tu doświadczenie pierwszy obmyślił i obraz iskry sfotografował, rzucając go za pomocą soczewki *S* na kliszę *K* (rys. 4.86). Okazało się, że iskra nie świeci jednakowo wzdłuż całej swej długości: najmocniej świeci w pobliżu jednej z elektrod (anody). Otóż ta najmocniej świecąca część iskry występowała na fotografii przy obu kulkach na przemian. Było to istotnie dowodem tego, że prąd rozładowania płynął rzeczywiście raz w jedną, raz w drugą stronę.

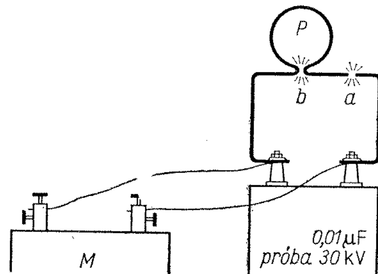


Rys. 4.86. Doświadczenie Feddersena: w zwierciadle wirującym widać, że każda iskra składa się z szeregu iskierek (a). Uzupełnienie doświadczenia: w lampce neonowej *N* świecą obie elektrody

Ponieważ doświadczenie Feddersena trudno jest wykonać w całości, a więc z fotografią, uzupełnijmy nasze doświadczenie z rys. 4.86 pewną próbą, która przekona nas o tym, że prąd w obwodzie drgań rzeczywiście zmienia kierunek. Dołączmy do dwóch różnych punktów drutu *D* elektrody lampki neonowej. Lampka świeci, co dowodzi, że między tymi punktami panuje dość duża różnica potencjałów (> 100 V), wywołana przepływem prądu rozładowania kondensatora. Ale świecą obie elektrody lampki, co znów oznacza, że każda z elektrod staje się (oczywiście kolejno) katodą. A zatem przez drut przepływa prąd zmieniający kierunek. Można również obraz świecącej lampki oglądać w zwierciadle wirującym. Ujrzymy wówczas wstęgę nieciągłą, przerywaną.

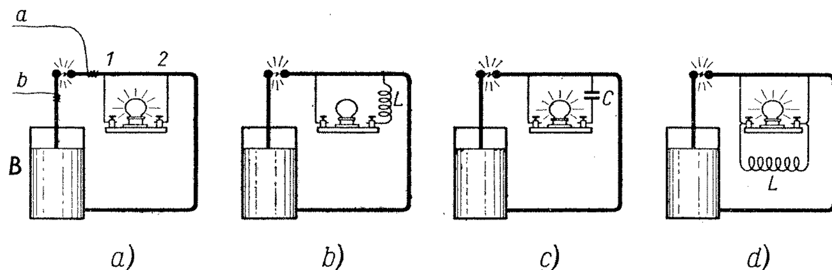
*§ **4.49. Charakterystyczne cechy prądów wielkiej częstotliwości.** Kondensator wysokonapięciowy (0,01 μF) lub dużą butelkę lejdejską ładujemy z multiplikatora napięcia (10 kV) lub z cewki indukcyjnej (rys. 4.87). Podczas rozładowania prąd przechodzi przez pętlę *P* z grubego drutu, której końce zbliżone są do siebie na drobny ułamek milimetra (w *b*). Otóż jednocześnie z iskrą w *a* pojawia się iskra w *b*. Świadczy to o tym, że na końcach pętli wytworzyła się ogromna różnica potencjałów rzędu 1 kV. Ponieważ opór omowy takiego kawałka drutu wynosi nie więcej niż $10^{-3}\ \Omega$, przeto wytworzenie się na jego

końcach napięcia 10^3 V byłoby możliwe tylko wtedy, gdyby przez ten drut płynął prąd o natężeniu $i = \frac{10^3 \text{ V}}{10^{-3} \Omega} = 10^6$ A. Jest to oczywiście nie możliwe; sądzić należy raczej, że opór omowy (10^{-3} Ω) nie jest jedynym oporem, jaki napotyka prąd elektryczny w pętli drutu. Pętla oprócz oporu omowego stawia prądowi przemiennemu, szczególnie o wielkiej częstotliwości (f), dodatkowy opór indukcyjny o wielkości ωL. Przy wielkiej częstotliwości drgań ($f = 10^6$ s^{-1}), nawet kawałek drutu o bardzo małym współczynniku indukcyjności własnej L przedstawia znaczny opór indukcyjny. Dzięki temu prąd rozładowania kondensatora wytwarza na końcach tego drutu znaczne napięcie, równe iloczynowi natężenia prądu i oporu indukcyjnego: $U = \omega Li$. Napięcie to w odpowiednich warunkach (duże ω, duże L) może wywoływać przeskok iskry, jak np. w doświadczeniu na rys. 4.87.



Rys. 4.87. Jednocześnie z iskrą w *a* przebija iskra w *b* (wielki opór indukcyjny pętli *P*)

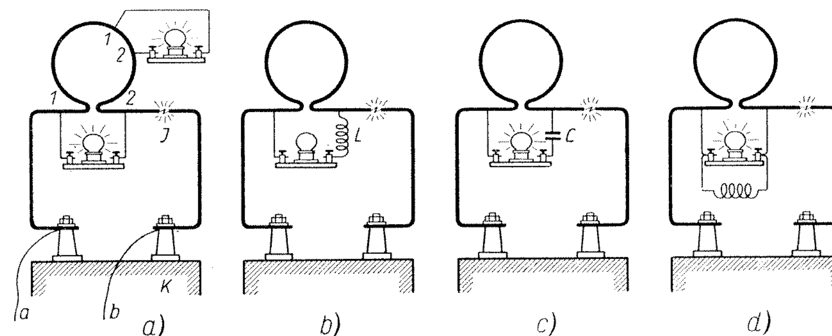
Takie jest wytłumaczenie powyższego zjawiska. Prościej można by wypowiedzieć to w następujący sposób: prąd wielkiej częstotliwości rozgałęziając się na dwie drogi przepływa raczej drogą krótszą, choć o większym oporze omowym (przerwa iskrowa), aniżeli drogą dłuższą, szczególnie zakrzywioną, choć o mniejszym oporze omowym (pętla). Dzieje się tak dlatego, że na dłuższej drodze prąd napotyka większy opór indukcyjny. W doświadczeniu na rys. 4.87 prąd przepływał głównie przez przerwę iskrową *b*, nieomal pomijając pętlę *P*.



Rys. 4.88. Doświadczenie wykazujące osobliwości prądu wysokiej częstotliwości. *B* — butelka lejdejska; *a* i *b* — doprowadzenia do cewki Ruhmkorffa; żarówka od latarki kieszonkowej; $C = 500$ pF

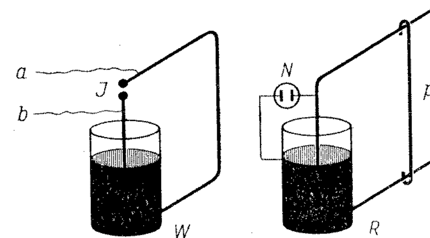
Ta osobliwa właściwość prądów wielkiej częstotliwości polegająca na tym, że nawet niewielka indukcyjność własna (L) stanowi wielki opór indukcyjny ($= \omega L$), jest przyczyną zdumiewających nieraz zjawisk. Poniżej podajemy szereg doświadczeń, które czytelnik z łatwością wytłumaczy opierając się na fakcie, że $\omega L \gg R$.

Przez pałąk z grubego drutu i przez iskiernik J rozładowujemy butelkę lejdejską połączoną z biegunami cewki indukcyjnej (rys. 4.88a, b, c, d); można również użyć do tego celu kondensatora technicznego, połączonego z biegunami multiplikatora napięcia (rys. 4.89a, b, c, d). a) Do dwóch punktów pałąka (1 i *2*) dołączamy małą żarówkę. Żarówka świeci. Punkty *1* i *2* obieramy niezbyt blisko, aby żarówka świeciła jasno, ale też niezbyt daleko, aby żarówka się nie przepaliła. b) W obwód żarówki włączamy dość gruby drut zwinięty w spiralę o kilkunastu zwojach (L). Żarówka gaśnie, mimo że opór drutu jest znikomy. Widzimy, że dla prądów o wielkiej częstotliwości zwykła spiralka, nawet bez rdzenia żelaznego ma tak wielki opór indukcyjny, że stanowi doskonały „dławik". c) W obwód żarówki włączamy kondensator. Żarówka nie przestaje świecić. d) Równolegle do żarówki dołączamy spiralę (L) z grubego drutu. Żarówka świeci nadal, mimo że spirala stanowi dla prądu stałego zwarcie!



Rys. 4.89. To samo doświadczenie, co pokazane na rys. 4.88, lecz z kondensatorem technicznym. *K* — kondensator, jak na rys. 4.87; *a* i *b* — doprowadzenia do multiplikatora napięcia; reszta jw.

***§ 4.50. Rezonans dwóch obwodów drgań.** Utwórzmy obwód drgań *W*, zawierający butelkę lejdejską jako kondensator i pałąk z drutu jako indukcję własną (rys.4.90). W obwodzie znajduje się przerwa iskrowa *J* umożliwiająca ładowanie butelki, np. z cewki indukcyjnej. Kilka razy w ciągu sekundy butelka się ładuje i tyleż razy rozładowuje się przez iskrę. Każde rozładowanie — to szereg oscylacji zanikających. W pobliżu tego



Rys. 4.90. Rezonans dwóch obwodów drgań (*doświadczenie Lodge'a*). *W* — oscylator, połączony drutami *a* i *b* z cewką indukcyjną. *R* — rezonator

obwodu zwanego *wibratorem* albo *oscylatorem*, w odległości nie większej niż 1 m, ustawiamy drugi podobny obwód R zwany *rezonatorem*. Obwodu tego jednak nie będziemy pobudzali do drgań tak jak oscylatora; toteż przerwa iskrowa jest tu zbyteczna. Pałąk rezonatora jest tak urządzony, że przesuwając pręt p możemy rozmiary pałąka zmieniać; zmieniamy w ten sposób indukcję własną obwodu. Przy pewnym położeniu pręta p lampka neonowa N, dołączona do butelki lejdejskiej rezonatora, zaczyna świecić wskazując w ten sposób, że między okładkami butelki panuje zmienna różnica potencjałów. Fakt, że obie elektrody lampki świecą, jest dowodem, że kondensator ładuje się raz w jednym, raz w drugim kierunku. W obwodzie rezonatora odbywają się więc drgania elektryczne. Wystarczy jednak przesunąć pręt p w jedną lub w drugą stronę, aby drgania znacznie osłabły lub nawet zanikły; lampka wtedy gaśnie.

W powyższym zjawisku widzimy oddziaływanie indukcyjne oscylatora na rezonator: prądy przemienne oscylatora o okresie

$$T_1 = 2\pi\sqrt{L_1 C_1}$$

(L_1 i C_1 — indukcyjność własna i pojemność w obwodzie oscylatora) indukują w obwodzie rezonatora prądy o takim samym okresie T, niezależnie od tego, gdzie ustawimy pręt p. Ale drgania te, zwane *drganiami wymuszonymi*, muszą być bardzo słabe, skoro nie wywołują świecenia lampki neonowej. (Można je uczynić silniejszymi, jeśli znacznie zbliżyć oba obwody do siebie, wtedy lampka neonowa świeci przy rozmaitych położeniach pręta p.) Zauważmy jednak, że rezonator będąc sam obwodem drgań ma pewien własny okres drgań T_2, zależny od jego pojemności C_2 i od indukcyjności własnej L_2

$$T_2 = 2\pi\sqrt{L_2 C_2}\,.$$

Oznacza to, że napięcie elektryczne raz wywołane na okładkach kondensatora nie zniknie momentalnie, lecz zanikać będzie stopniowo w postaci słabo tłumionych (brak przerwy iskrowej) drgań elektrycznych o okresie T_2 (por. § 4.47). Są to tzw. *drgania własne* rezonatora. Osobliwy wypadek zajdzie, gdy okres drgań własnych oscylatora, który jest jednocześnie okresem drgań wymuszonych rezonatora, będzie identyczny z okresem drgań własnych rezonatora: $T_1 = T_2$. Będzie to zachodziło wtedy, gdy $2\pi\sqrt{L_1C_1} = 2\pi\sqrt{L_2C_2}$, czyli gdy

$$L_1 C_1 = L_2 C_2\,. \tag{4.57}$$

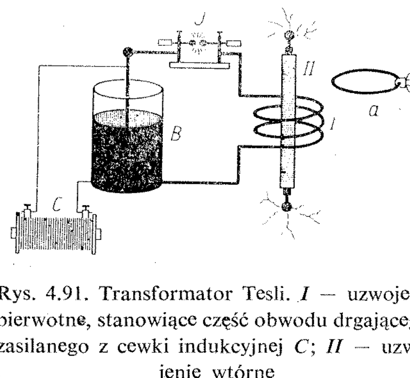
Powyższą równość iloczynów indukcyjności własnej i pojemności osiągamy przez przesuwanie pręta p, czyli przez zmianę indukcyjności własnej L_2 rezonatora. (Można też oczywiście osiągnąć ją przez zmianę pojemności C_1 lub C_2, należałoby tylko zastosować odpowiednio regulowane kondensatory.) Otóż w wypadku spełnienia równości (4.57) drgania wymuszone będą rytmicznie podniecały drgania własne rezonatora nie wypadając z taktu. Dzięki temu amplituda drgań w rezonatorze osiągnie niezwykle wielką wartość, jakiej nie mogłyby osiągnąć drgania wymuszone, nie będące zgodne w okresie z drganiami własnymi. Ten wypadek „rozhuśtania" drgań w rezonatorze występuje wtedy, gdy oba obwody *dostrojone są do rezonansu*, czyli spełniają równość (4.57). Zjawisko to przypomina rezonans dwóch wahadeł lub dwóch kamertonów.

*§ 4.51. Transformator Tesli.

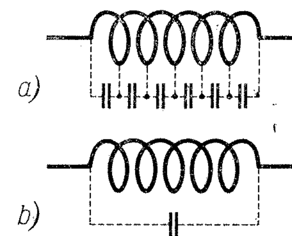
Wiemy, że prąd przemienny płynąc w jakimś obwodzie (pierwotnym) wywołuje w sąsiednim obwodzie (wtórnym) siłę elektromotoryczną indukcji. Jest ona tym większa, im większa jest szybkość zmian strumienia indukcji magnetycznej $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, przechodzącego przez obwód wtórny. Aby ta szybkość była większa, stosuje się w transformatorach zwykłych (na prąd o częstotliwości 50 Hz) rdzeń żelazny. W tych więc transformatorach obwody pierwotny i wtórny są „sprzężone" ze sobą za pomocą rdzenia.

Inaczej rzecz się będzie miała, jeśli obwód pierwotny będzie obwodem drgającym o wielkiej częstotliwości. Wówczas szybkość zmian strumienia indukcji jest tak wielka, że w obwodzie wtórnym, nawet bez pomocy rdzenia żelaznego, indukują się ogromne siły elektromotoryczne, szczególnie, jeśli obwód wtórny będzie w rezonansie z obwodem pierwotnym. Wprowadzenie rdzenia żelaznego więcej by przeszkodziło (straty z powodu histerezy, prądów Foucaulta itp.) aniżeli pomogło. Zatem sprzężenie obu obwodów bez rdzenia, nawet dość luźne (tzn. takie, które cechuje stosunkowo mały współczynnik indukcji wzajemnej M, por. § 4.6), wywołuje w obwodzie wtórnym znaczne siły elektromotoryczne, a przy małym oporze uzwojenia — znaczne prądy indukcyjne. I to jest jeszcze jedna osobliwość prądów wielkiej częstotliwości.

Na tej zasadzie zbudował Tesla (1890) transformator prądów wielkiej częstotliwości (rys. 4.91). Obwód drgający składał się z butelki lejdejskiej B (jednej lub więcej), iskiernika J i kilku zwojów grubego drutu, stanowiących uzwojenie pierwotne (I) właściwego



Rys. 4.91. Transformator Tesli. I — uzwojenie pierwotne, stanowiące część obwodu drgającego, zasilanego z cewki indukcyjnej C; II — uzwojenie wtórne



Rys. 4.92. Każda cewka ma pewną pojemność własną symbolicznie oznaczoną jako kondensator. Pojemności między zwojami (a) składają się na pojemność całkowitą cewki (b)

transformatora. Obwód drgający może być zasilany z cewki indukcyjnej C lub z innego źródła prądu o wysokim napięciu. Obwód wtórny transformatora (II) jest to rura izolacyjna, na której nawinięta jest bardzo duża liczba zwojów cienkiego drutu w jednej tylko warstwie. Końce tego uzwojenia doprowadzone są do zacisków o zaokrąglonych kształtach. Drgania w obwodzie pierwotnym wywołują w uzwojeniu wtórnym napięcie przekraczające nieraz 100 kV. Składają się na to dwie przyczyny: wielka liczba zwojów cewki wtórnej i rezonans między obu obwodami.

Co do rezonansu, dodać należy pewne wyjaśnienie, gdyż w obwodzie wtórnym nie ma kondensatora. Czy obwód ten jest więc obwodem drgającym? Zauważmy, że sąsiadujące ze sobą zwoje cewki tworzą swego rodzaju kondensator, którego „okładki" zwarte są drutem cewki. Cała cewka ma więc pewną pojemność, tak jakby do niej przyłączony został równolegle szereg kondensatorów. Ilustruje to rys. 4.92. Widzimy więc, że cewka mająca indukcyjność własną i pojemność — ma swój własny okres drgań. Do tego okresu musi być dostrojony obwód drgający, zawierający uzwojenie pierwotne. Można to osiągnąć przez dobranie odpowiedniej butelki lejdejskiej lub też odpowiedniej ich liczby.

Prądy o wielkiej częstotliwości, jakie powstają w cewce wtórnej transformatora Tesli, wytwarzają na jej końcach wysokie szybkoprzemienne napięcie, które jest przyczyną zdumiewających efektów. Z biegunów cewki wytryskują snopy cienkich syczących iskier; rurki próżniowe nawet bez elektrod, napełnione rozrzedzonymi gazami świecą, gdy zbliżyć je do cewki. A co najdziwniejsze — prąd o tak wielkiej częstotliwości mimo wielkiego napięcia jest zupełnie nieszkodliwy dla człowieka. Można bezkarnie zbliżyć rękę do cewki wtórnej: iskry biją do ręki i odczuwa się tylko lekkie „ukłucia" pochodzące od cieplnego działania iskry. Tego ostatniego z łatwością można uniknąć, jeśli iskry będą biły do kawałka metalu trzymanego w ręce. Nie należy jednak zbliżać ręki do obwodu pierwotnego, mimo że w nim płyną również nieszkodliwe prądy o tej samej wielkiej częstotliwości. A to dlatego, że można zostać porażonym prądem małej częstotliwości, pochodzącym bezpośrednio od cewki indukcyjnej.

Oto jeszcze jedna osobliwa właściwość prądów wysokiej częstotliwości, o której tylko wspomnimy w paru słowach. Wiemy, że prąd stały płynąc w przewodniku jest równomiernie rozłożony w całym jego przekroju poprzecznym. Innymi słowy „gęstość" prądu, tzn. natężenie przypadające na jednostkę pola poprzecznego przekroju drutu, jest stałe. Inaczej rzecz się ma, gdy prąd jest przemienny. Wskutek zjawiska indukcyjności własnej, która, jak wiemy, występuje nawet w prostym kawałku drutu, gęstość prądu jest mniejsza wewnątrz drutu, a większa — bliżej jego powierzchni. Dla zwykłego prądu przemiennego (50 Hz) różnica ta jest bardzo niewielka, ale dla prądów wielkiej częstotliwości różnica gęstości prądu staje się tak wielka, że prąd płynie tylko w warstewce powierzchniowej przewodnika, natomiast wewnątrz przewodnika prąd nie płynie.

Dzięki tej właściwości prądy wielkiej częstotliwości przechodząc przez ciało człowieka płyną po powierzchni naskórka, nie powodując rozkładu krwi.

Również dzięki „powierzchniowemu" przewodzeniu opór omowy kawałka prostego drutu mierzonego dla prądów wielkiej częstotliwości, jest kilka do kilkudziesięciu razy większy od oporu tego samego kawałka drutu dla prądu stałego czy przemiennego technicznego (50 s^{-1}). Dlatego do przewodzenia prądów wielkiej częstotliwości można stosować, zamiast przewodników pełnych, rurki; stosuje się też często przewodniki miedziane o powierzchni srebrzonej albo przewodniki złożone z wielu odizolowanych żył (w celu zwiększenia powierzchni).

Jeśli do cewki pierwotnej transformatora Tesli zbliżymy zamiast cewki wtórnej pojedynczą pętlę z drutu zawierającą żarówkę (*a* na rys. 4.91), to w pętli tej wywołane zostaną drgania wymuszone. Już z odległości kilkunastu cm żarówka jasno świeci. Świadczy to o tym, jak łatwo zachodzi indukcja nawet przy luźnym sprzężeniu obwodów. Z prądami powstałymi w obwodzie *a*, dadzą się powtórzyć wszystkie doświadczenia przedstawione na rys. 4.88 i 4.89, ilustrujące niezwykłe właściwości prądów wielkiej częstotliwości.

F. Zastosowanie liczb zespolonych w teorii prądów przemiennych

§ 4.52. Amplitudy natężenia prądu i napięcia jako wektory.

1. Prąd płynie przez opornik. W tym wypadku (rys. 4.93), jak już wiemy z § 4.24, natężenie prądu i napięcie na końcach opornika są w zgodnej fazie:

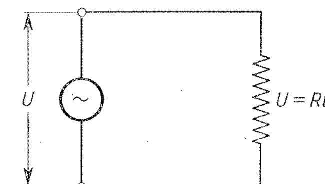
$$i = i_0 \sin \omega t, \tag{4.58a}$$

$$U = U_0 \sin \omega t, \tag{4.58b}$$

gdzie

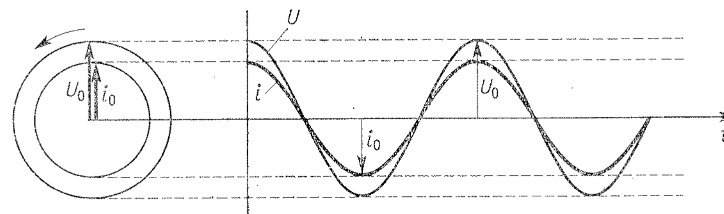
$$U_0 = R i_0. \tag{4.58c}$$

Rys. 4.94 pokazuje przebieg natężenia i napięcia w czasie. Rzędne obu tych sinusoid i i U są rzutami obracającego się promienia koła o długości i_0 lub U_0 na oś rzędnych.



Rys. 4.93. Prąd przemienny przepływa przez oporność. Z lewej strony symbol generatora prądu przemiennego. Wytwarza on napięcie U (mierzone pod obciążeniem)

Obie amplitudy i_0 i U_0 mogą być uważane za wartości skalarne wektorów $\mathbf{i}_0$ i $\mathbf{U}_0$, które obracają się dokoła swojego początku (środka koła) z prędkością kołową ω. Oba te wektory mają ten sam kierunek i zwrot: mówimy, że są w zgodnej fazie.



Rys. 4.94. Napięcie i natężenie prądu mają zgodną fazę

2. Prąd płynie przez cewkę. Jeżeli cewka jest bezoporowa (ściśle: ma znikomy opór), wówczas prąd

$$i = i_0 \sin \omega t \tag{4.59a}$$

wytwarza w jej uzwojeniach siłę przeciwelektromotoryczną indukcji własnej:

$$E = -L\frac{di}{dt} = -\omega L i_0 \cos \omega t = -\omega L i_0 \sin(90° - \omega t) = -\omega L i_0 \sin(90° + \omega t).$$

Wzdłuż zamkniętego obwodu zawierającego generator i cewkę (rys. 4.95) istnieją dwie siły elektromotoryczne: siła elektromotoryczna generatora (w czasie pracy równa

napięciu na zaciskach U) i siła przeciwelektromotoryczna E; ich suma równa się zeru:

$$U+E=0.$$

Stąd wynika od razu

$$U=-E=\omega L\, i_0 \sin(\omega t+90°),$$

albo inaczej

$$U=U_0 \sin(\omega t+90°), \tag{4.59b}$$

gdzie

$$U_0=\omega L i_0. \tag{4.59c}$$

Widzimy więc, że w wypadku, gdy w obwodzie istnieje tylko indukcyjność, wektor amplitudy napięcia $\mathbf{U}_0$ ma wartość $\omega L i_0$ i wyprzedza w fazie wektor amplitudy prądu $\mathbf{i}_0$ o kąt 90°. Stosunki te przedstawia rys. 4.96. Wynik ten jest zgodny z § 4.29 dla wypadku $R=0$.

3. Prąd płynie przez kondensator. W tym wypadku, przedstawionym na rys. 4.97, prąd

$$i=i_0 \sin\omega t \tag{4.60a}$$

płynie w obwodzie ładującym i rozładowującym kondensator. W każdej chwili ma on jakiś ładunek e określający napięcie U panujące na jego końcach (por. § 4.42):

$$U=\frac{e}{C}=\frac{1}{C}\int i\,dt=\frac{i_0}{C}\int\limits_{T/4}^{t}\sin\omega t\,dt=-\frac{i_0}{\omega C}\cos\omega t=-\frac{i_0}{\omega C}\sin(90°-\omega t)=$$

$$=\frac{i_0}{\omega C}\sin(\omega t-90°).$$

Inaczej:

$$U=U_0\sin(\omega t-90°), \tag{4.60b}$$

gdzie

$$U_0=\frac{i_0}{\omega C}. \tag{4.60c}$$

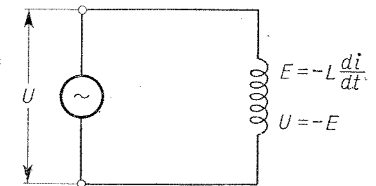
Z powyższych wzorów widzimy, że amplituda napięcia U_0 jest wektorem, który ma wartość $i_0/\omega C$ i opóźnia się w fazie za wektorem prądu o 90°. Przedstawione jest to na rys. 4.98.

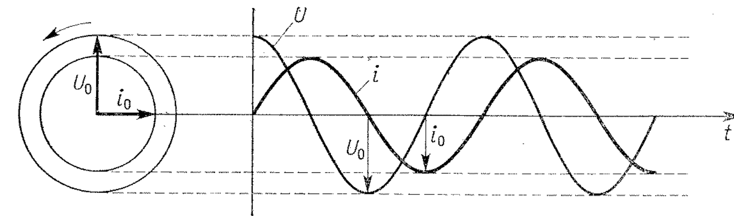
4. Prąd płynie przez opornik, cewkę i kondensator, połączone szeregowo. Przez wszystkie wymienione elementy: oporowy, indukcyjny i pojemnościowy płynie ten sam prąd

$$i=i_0\sin\omega t \tag{4.61a}$$

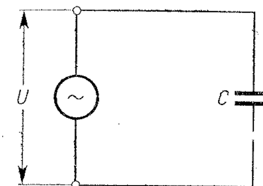
(rys. 4.99), gdyż elementy połączone są w szereg. Na końcach każdego z nich wytwarza się napięcie, obliczone przez nas w punktach 1—3. Amplitudy tych napięć są wektorami, których wartość wyrażają wzory (4.58c), (4.59c) i (4.60c), zaś położenie względem wektora $\mathbf{i}_0$ określa różnica faz φ pomiędzy fazą napięcia a fazą prądu, która wynosi 0, +90°

Rys. 4.95. Prąd przemienny przepływa przez indukcyjność (bezoporową). Wytwarza ono siłę przeciwelektromotoryczną E. Jeśli w obwodzie nie ma oporności, $U=-E$

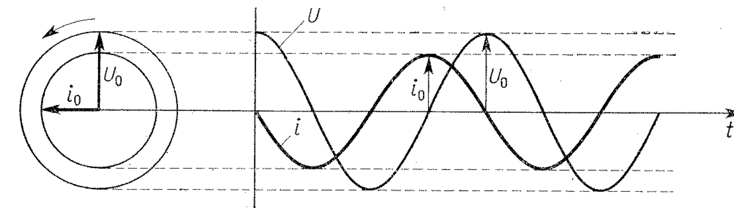




Rys. 4.96. Napięcie wyprzedza w fazie natężenie prądu o 90°

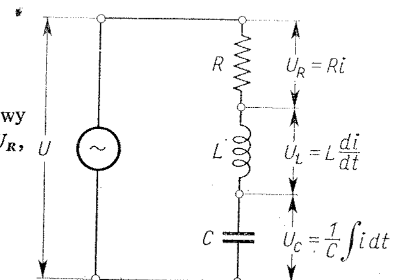


Rys. 4.97. Prąd przemiennny przepływa przez pojemność. Wobec braku w obwodzie oporności i indukcyjności, na okładkach panuje napięcie generatora U



Rys. 4.98. Napięcie opóźnia się w fazie za natężeniem prądu o 90°

Rys. 4.99. Prąd przemienny przepływa przez układ szeregowy RLC, wytwarzając na każdym z elementów napięcia: U_R, U_L, U_C



lub $-90°$. Oznaczając amplitudy napięć panujących na poszczególnych elementach przez $\mathbf{U}_{0R}$, $\mathbf{U}_{0L}$ i $\mathbf{U}_{0C}$, mamy:

$$U_{0R} = |\mathbf{U}_{0R}| = Ri_0, \ \varphi = 0 \text{ (napięcie jest w fazie z prądem)},$$

$$U_{0L} = |\mathbf{U}_{0L}| = \omega L i_0, \ \varphi = 90° \text{ (napięcie wyprzedza prąd o 90°)},$$

$$U_{0C} = |\mathbf{U}_{0C}| = \frac{1}{\omega C} i_0, \ \varphi = -90° \text{ (napięcie opóźnia się względem prądu o 90°)}.$$

Stosunki te przedstawia rys. 4.100. Od razu widać, że wektor amplitudy napięcia $\mathbf{U}_0$ na końcach całego układu szeregowego *RLC* jest sumą wektorową amplitudy napięcia na poszczególnych elementach:

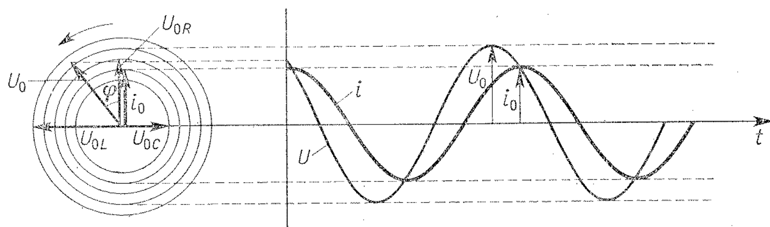
$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}_{0R} + \mathbf{U}_{0L} + \mathbf{U}_{0C}. \tag{4.61b}$$

Dodawanie to ilustruje rys. 4.101. Z rysunku tego od razu wynika

$$U_0 = \sqrt{U_{0R}^2 + (U_{0L} - U_{0C})^2} = i_0 \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \tag{4.61c}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{U_{0L} - U_{0C}}{U_R} = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}. \tag{4.61d}$$

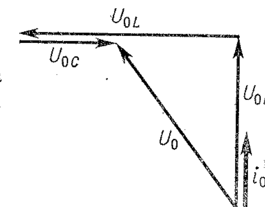
Jest to, oczywiście, zgodne z wynikami § 4.43. A zatem: jeśli prąd przemienny $i = i_0 \sin \omega t$ o amplitudzie i_0 przechodzi przez układ szeregowy *RLC*, to na końcach tego układu wytwarza napięcie $U = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$ o amplitudzie U_0 wyrażonej wzorem (4.61c) i o kącie fazowym φ, którego tangens wyraża wzór (4.61d).



Rys. 4.100. W danym przykładzie napięcie na końcach układu *RLC* wyprzedza natężenie prądu o kąt φ. Przy mniejszej indukcyjności lub mniejszej pojemności (większej oporności pojemnościowej) napięcie może spóźniać się za natężeniem

Oczywiście równanie prądu i napięcia można wyrazić nie tylko za pomocą funkcji sinus, lecz również za pomocą funkcji cosinus. Wyniki otrzymamy te same. Jedyna różnica polegać będzie na tym, że sinusoidy na naszych rysunkach przesuną się o ćwierć okresu: Tam, gdzie mamy wartość rzędnej 0, będzie maximum i odwrotnie. Istotny jest wynik, jaki otrzymujemy dla wartości amplitudy U_0 oraz dla wartości φ, określających wektor wypadkowy $\mathbf{U}_0$: natomiast nieistotne jest, czy my ten wektor rzutujemy na oś y (stosując funkcję sinus), czy na oś x (stosując funkcję cosinus).

Wektorowa interpretacja amplitudy natężenia i napięcia w technice prądów przemiennych została ulepszona i uproszczona przez zastosowanie rachunku liczb zespolonych. Tym więc liczbom poświęcimy następne paragrafy.



Rys. 4.101. Wektorowe dodawanie amplitud napięć panujących na elementach *R*, *L* i *C*. Podobne dodawanie wektorowe stosuje się dla zawad poszczególnych elementów (jeśli połączone są szeregowo!)

§ 4.53. Liczby zespolone. Nieskończenie wielki jest zbiór wszystkich liczb całkowitych, dodatnich i ujemnych. Możemy je jednak ustawić w jednym szeregu i ponumerować: 1, -1, 2, -2, 3, -3, ... itd. Dlatego mówimy, że jest to zbiór *przeliczalny*. Jeszcze bardziej liczny niż przeliczalny wydaje się zbiór wszystkich liczb *wymiernych*, tzn. liczb postaci $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi; bowiem wartości licznika m jest nieskończenie wiele, a do każdej z nich można wybrać nieskończenie wiele wartości mianownika n. Jednak okazuje się, że wszystkie liczby wymierne $\frac{m}{n}$ można uszeregować według rosnącej sumy $m+n$ i w ten sposób ponumerować je. Zatem zbiór liczb wymiernych jest przeliczalny, tzn. że jest tej samej mocy, co i zbiór liczb całkowitych.

Jeżeli wszystkie liczby wymierne ułożymy na linii prostej, czyli na osi liczbowej, to na najdrobniejszym nawet odcinku tej osi znajdzie się nieskończenie wiele liczb wymiernych. Ale poza tymi liczbami znajdują się jeszcze inne liczby, które nie dadzą się przedstawić jako ułamki $\frac{m}{n}$; należą do nich pierwiastki różnych stopni z różnych liczb, logarytmy, takie liczby jak π, e i ich funkcje itd. Zbiór tych liczb nazywa się zbiorem liczb *niewymiernych* i wraz z liczbami wymiernymi tworzy zbiór liczb *rzeczywistych*. Liczby rzeczywiste zawarte nawet w najmniejszym odcinku osi liczbowej stanowią zbiór *nieprzeliczalny*. Gdziekolwiek na osi liczbowej wybierzemy punkt, odpowiada on jakiejś określonej liczbie rzeczywistej. Nie ma tam luk, zbiór liczb rzeczywistych jest „wszędzie gęsty"; żaden nowy rodzaj liczb już się na osi liczbowej nie pomieści.

Nie znajdziemy jednak w zbiorze liczb rzeczywistych takiej liczby, która podniesiona do kwadratu dałaby liczbę ujemną. Inaczej: pierwiastek kwadratowy z liczby ujemnej nie należy do zbioru liczb rzeczywistych. Nie możemy jednak o takich liczbach powiedzieć, że nie istnieją; $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$ istnieją, lecz w innym zbiorze liczb aniżeli zbiór liczb rzeczywistych. Mają bowiem te liczby zupełnie ściśle ustaloną definicję, np.: $\sqrt{-2}$ jest to taka liczba, która pomnożona przez siebie daje -2. Liczby takie nazywają się liczbami *urojonymi*, a zbiór ich nazywa się zbiorem liczb urojonych.

Zbiór liczb urojonych jest tak samo nieprzeliczalny, jak zbiór liczb rzeczywistych, mianowicie jest mocy zbioru punktów na linii. Jako reprezentację zbioru liczb urojonych obieramy więc również oś liczbową, zwaną osią urojoną. Rysujemy ją prostopadle do

osi rzeczywistej w tej samej co ona płaszczyźnie (rys. 4.102). Tak jak wzdłuż osi rzeczywistej odkładamy skalę jednostek liczb rzeczywistych, tak wzdłuż osi urojonej odkładamy skalę jednostek liczb urojonych. Jednostką liczb rzeczywistych jest 1, zaś jednostką liczb urojonych jest $\sqrt{-1}$. Tę ostatnią w matematyce oznacza się literą i: $\sqrt{-1} = i$. Ponieważ w fizyce i technice (elektrotechnice, radiotechnice, elektronice) symbol ten tradycyjnie oznacza natężenie prądu, przeto do oznaczenia jednostki urojonej stosuje się literę j: $\sqrt{-1} = j$. Z definicji jednostki urojonej mamy:

$$j^2 = -1.$$

Obie osie, rzeczywista i urojona, tworzą nowy rodzaj płaszczyzny, która różni się zasadniczo od płaszczyzny w przestrzeni zwykłej. Bowiem w kierunku osi odciętych długość mierzy się jednostkami zwykłymi, rzeczywistymi, zaś w kierunku osi rzędnych — jednostkami urojonymi. Płaszczyznę tę nazywamy płaszczyzną *zespoloną*. Każdemu punktowi Z na tej płaszczyźnie odpowiada para współrzędnych: odcięta x (x jednostek rzeczywistych) i rzędna yj (y jednostek urojonych). Mówimy, że każdemu punktowi płaszczyzny zespolonej odpowiada *liczba zespolona* z:

$$z = x + yj, \tag{4.62}$$

gdzie x i y są dowolnymi liczbami rzeczywistymi; x nazywa się częścią rzeczywistą liczby zespolonej z, zaś yj — jej częścią urojoną. Z definicji liczby zespolonej oraz z jej reprezentacji geometrycznej wynika, że **OZ** traktować można jako wektor, którego składowa na osi rzeczywistej jest **x**, zaś składowa na osi urojonej **y**. Wartość skalarna, czyli długość tego wektora,

$$|z| \equiv |\mathbf{OZ}| \equiv \varrho = \sqrt{x^2+y^2}, \tag{4.63a}$$

nazywa się *modułem* liczby zespolonej z. Kąt, jaki tworzy wektor **OZ** z osią rzeczywistą, nazywa się *argumentem* liczby zespolonej. Od razu widać, że

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{4.63b}$$

Liczbę zespoloną z określa w zupełności albo para liczb rzeczywistych x i y, albo para liczb rzeczywistych ϱ i φ.

§ 4.54. Działania na liczbach zespolonych. a) Dodawanie i różniczkowanie liczb zespolonych będzie nam potrzebne do obliczania prądów lub napięć w różnych obwodach złożonych z oporności, indukcyjności i pojemności (*RLC*). Oto prosta reguła dodawania: sumę dwóch liczb zespolonych,

$$z_1 = x_1 + y_1 j,$$
$$z_2 = x_2 + y_2 j,$$

otrzymujemy dodając do siebie ich części rzeczywiste i urojone:

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2) j.$$

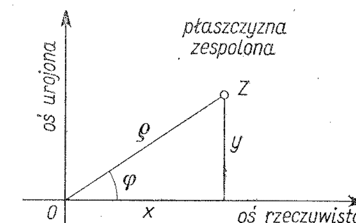
Pochodną liczby zespolonej, $z = x + yj$, otrzymujemy dodając do siebie pochodne części rzeczywistej i urojonej:

$$z' = x' + y' j.$$

b) Liczba zespolona wyrażona przy pomocy funkcji trygonometrycznych. Mnożenie liczb zespolonych. Dzieląc i mnożąc wyrażenie (4.62) przez moduł ϱ liczby zespolonej otrzymamy:

$$z = \varrho\left(\frac{x}{\varrho} + \frac{y}{\varrho} j\right).$$

Z rysunku 4.102 od razu widać, że $\frac{x}{\varrho} = \cos\varphi$, $\frac{y}{\varrho} = \sin\varphi$.



Rys. 4.102. Punkt Z w płaszczyźnie zespolonej reprezentuje liczbę zespoloną $z = x + jy = \varrho(\cos\varphi + j\sin\varphi)$

Zatem

$$z = \varrho(\cos\varphi + j\sin\varphi). \tag{4.64}$$

W tej postaci liczby zespolonej, zwanej postacią *biegunową*, mnożenie liczb zespolonych wygląda niezmiernie prosto. Dwie liczby zespolone:

$$z_1 = \varrho_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1),$$
$$z_2 = \varrho_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2)$$

mnożymy przez siebie, jak dwumiany, pamiętając że $j^2 = -1$. Otrzymujemy

$$z_1 z_2 = \varrho_1\varrho_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + j(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2).$$

Stosując znane wzory trygonometryczne, możemy napisać:

$$z_1 z_2 = \varrho_1\varrho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + j\sin(\varphi_1+\varphi_2)]. \tag{4.65}$$

Jak widzimy, wynik jest niezwykle prosty i zaskakujący: moduł iloczynu dwóch liczb zespolonych jest iloczynem ich modułów, zaś argument — sumą argumentów.

c) Liczby zespolone sprzężone. Dzielenie liczb zespolonych. Dla danej liczby zespolonej $z = x + yj$ liczbą zespoloną sprzężoną nazywamy liczbę $z^* = x - yj$. Od razu widać, że iloczyn liczb zespolonych sprzężonych jest liczbą rzeczywistą równą kwadratowi modułu:

$$zz^* = (x+yj)(x-yj) = x^2+y^2 = \varrho^2.$$

To samo można wyrazić stosując postać biegunową liczb zespolonych sprzężonych:

$$zz^* = \varrho(\cos\varphi + j\sin\varphi)\varrho(\cos\varphi - j\sin\varphi) = \varrho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \varrho^2.$$

Iloraz dwóch liczb zespolonych sprowadzimy do mnożenia dzielnej przez liczbę sprzężoną względem dzielnika, jeśli przez tę ostatnią pomnożymy licznik i mianownik:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\varrho_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)}{\varrho_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2)} \cdot \frac{\cos\varphi_2 - j\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2 - j\sin\varphi_2} =$$

$$= \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2+j(\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2} =$$

$$= \frac{\varrho_1}{\varrho_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+j\sin(\varphi_1-\varphi_2)].$$

Widzimy, że przy dzieleniu liczb zespolonych ich moduły dzielą się, zaś argumenty — odejmują.

d) Liczba zespolona wyrażona przy pomocy funkcji wykładniczej. Wzór Eulera. Funkcja wykładnicza rozwinięta w szereg Maclaurina ma postać:

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots, \tag{4.66}$$

gdzie e jest znaną liczbą przestępną (nie będącą rozwiązaniem żadnego równania algebraicznego), stanowiącą podstawę logarytmów naturalnych. Jej wartość otrzymujemy kładąc $x = 1$:

$$e = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\ldots = 2{,}71828\ldots$$

Rozwinięcie (4.66) ważne jest dla wszystkich x rzeczywistych. Funkcję wykładniczą dla wykładników zespolonych określimy tym samym wzorem (4.66), kładąc zamiast x liczbę zespoloną $z = x+jy$. Niezwykle ważną właściwością funkcji wykładniczej, zarówno dla wykładników rzeczywistych, jak i zespolonych, jest to, że jej pochodna równa jest po prostu wartości samej funkcji:

$$\frac{d}{dz}e^z = e^z.$$

Przekonać się można o tym natychmiast, obliczając pochodną szeregu (4.66), wyraz po wyrazie. Stwierdzimy, że pochodna wyrazu $(n+1)$-ego jest identyczna z wyrazem n-tym pierwotnego szeregu; dlatego szereg (4.66) wcale się nie zmienia wskutek zróżniczkowania.

Napiszmy rozwinięcie funkcji wykładniczej (4.66) dla wykładnika potęgi czysto urojonego jy:

$$e^{jy} = 1+jy+\frac{(jy)^2}{2!}+\frac{(jy)^3}{3!}+\frac{(jy)^4}{4!}+\frac{(jy)^5}{5!}+\ldots$$

Ponieważ $j^2 = -1$, $j^3 = -j$, $j^4 = 1$, $j^5 = j$, ... mamy:

$$e^{jy} = 1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\frac{y^6}{6!}+\ldots+j\left(y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\frac{y^7}{7!}+\ldots\right).$$

Otrzymaliśmy więc dwa szeregi, z których pierwszy jest znanym rozwinięciem funkcji $\cos y$:

$$\cos y = 1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\frac{y^6}{6!}+\ldots,$$

drugi zaś jest znanym rozwinięciem funkcji $\sin y$:

$$\sin y = y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\frac{y^7}{7!}+\ldots.$$

Widzimy zatem, że

$$e^{jy} = \cos y+j\sin y. \tag{4.67}$$

Jest to *wzór Eulera*: e^{jy} jest liczbą zespoloną, której argument równy jest y, zaś moduł $= 1$. W szczególnym wypadku, gdy na y podstawimy wielokrotność $\pi/2$, otrzymamy:

$$e^{(\pi/2)j} = j, \quad e^{\pi j} = -1, \quad e^{(3\pi/2)j} = -j, \quad e^{2\pi j} = 1.$$

Dzięki wzorowi Eulera niezwykle prosto wygląda potęgowanie liczb zespolonych. Oto $(\cos\varphi+j\sin\varphi)^n$ wyraża się jako $(e^{j\varphi})^n = e^{j\varphi n} = \cos n\varphi+\sin n\varphi$. Zatem

$$(\cos\varphi+j\sin\varphi)^n = \cos n\varphi+j\sin n\varphi. \tag{4.68}$$

Jest to *twierdzenie de Moivre'a*.

§ 4.55. Zastosowanie liczb zespolonych do zagadnień prądu przemiennego. Prąd przemienny o częstotliwości kołowej ω możemy przedstawić za pomocą wzoru Eulera (4.67), jeśli podstawimy $y = \omega t$:

$$\mathrm{i} = i_0 e^{j\omega t} = i_0(\cos\omega t+j\sin\omega t). \tag{4.69}$$

Wzór ten odpowiada dokładnie dawnemu obrazowi prądu przemiennego, w którym wektor $\mathbf{i}_0$ obracał się z częstotliwością ω, zaś jego rzut na oś x lub y reprezentował wartość chwilową prądu. W wypadku stosowania reprezentacji zespolonej (4.69) wartość chwilową prądu przedstawia, stosownie do naszego wyboru, albo część rzeczywista wyrażenia (4.69), albo jego część urojona. Wynik rachunku zupełnie od tego nie zależy, możemy więc w dalszym ciągu o tym nie mówić.

Zespoloną lub urojoną reprezentację prądu, napięcia i zawady przedstawiać będziemy zwykłą prostą czcionką, podczas gdy odpowiednie wielkości fizyczne — jak zwykle, czcionką pochyłą.

W obwodach prądu przemiennego spotykamy trzy rodzaje elementów: element oporowy R, element indukcyjny L i element pojemnościowy C. Jakie napięcie powstaje na końcach każdego z tych elementów?

a) Prąd płynie przez opór. Napięcie na jego końcach daje prawo Ohma:

$$\mathrm{U}_R = R\,\mathrm{i} = Ri_0 e^{j\omega t} = U_{0R}e^{j\omega t}, \tag{4.70}$$

gdzie amplituda $U_{0R} = Ri_0$ jest rzeczywista i zgodna w fazie z amplitudą prądu.

b) Prąd płynie przez zwojnicę o indukcyjności L. Napięcie na końcach zwojnicy wyraża się wzorem

$$\mathrm{U}_L = L\frac{di}{dt} = i_0 L\frac{de^{j\omega t}}{dt} = i_0 j\omega L e^{j\omega t} = \mathrm{U}_{0L}e^{j\omega t}, \tag{4.71}$$

gdzie amplituda $\mathrm{U}_{0L} = i_0 j\omega L$ jest urojona.

Widzimy, że aby obliczyć pochodną funkcji $e^{j\omega t}$, należy ją po prostu pomnożyć przez $j\omega$. Amplituda U_{0L} jest urojona, a zatem jej wektor w płaszczyźnie zespolonej jest prostopadły do U_{0R}. Zawada zwojnicy, określona jako

$$X_L = \frac{U_L}{i} = \frac{U_{0L}}{i_0} = j\omega L, \tag{4.71a}$$

jest urojona i w płaszczyźnie zespolonej jest prostopadła do R.

c) Prąd płynie przez kondensator o pojemności C. Napięcie na jego końcach wyraża wzór (stała całkowania nie ma tu znaczenia):

$$U_C = \frac{e}{C} = \frac{1}{C}\int i\,dt = \frac{i_0}{C}\int e^{j\omega t}\,dt = \frac{i_0}{j\omega C}e^{j\omega t} = U_{0C}e^{j\omega t}, \tag{5.72}$$

gdzie amplituda $U_{0C} = \dfrac{i_0}{j\omega C}$ jest urojona.

Jak widać, całkowanie funkcji $e^{j\omega t}$ sprowadza się do podzielenia tej funkcji przez $j\omega$. Ponieważ

$$\frac{1}{j} = \frac{j}{j^2} = -j,$$

przeto amplituda U_{0C} ma przeciwny kierunek do U_{0L}.

Zawada kondensatora,

$$X_C = \frac{U_C}{i} = \frac{U_{0C}}{i_0} = \frac{1}{j\omega C}, \tag{4.72a}$$

jest urojona i w płaszczyźnie zespolonej jest również prostopadła do R, lecz ma zwrot przeciwny do X_L, ponieważ $1/j = -j$.

d) Prąd płynie przez wszystkie trzy elementy R, L, C połączone szeregowo. Napięcie na końcach takiego układu (patrz rys. 4.98) jest sumą napięć panujących na poszczególnych elementach:

$$U = U_R + U_L + U_C = (R + X_L + X_C)i = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)i_0 e^{j\omega t} =$$

$$= \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]i_0 e^{j\omega t}. \tag{4.73}$$

Zawadę całego układu szeregowego RLC określa się jako

$$Z = \frac{U}{i} = \frac{U_0}{i_0}. \tag{4.73a}$$

Wyrażając U za pomocą wyrażeń (4.73) od razu mamy

$$Z = R + X_L + X_C = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} =$$

$$= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \tag{4.73b}$$

Wzór powyższy zawiera w sobie informację i o module zawady, tj. mierzonej wartości zawady, i o argumencie, który jest mierzoną wartością różnicy faz napięcia i prądu:

$$Z = |Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \tag{4.73c}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}. \tag{4.73d}$$

Zawadę zespoloną można ogólnie napisać tak:

$$Z = |Z|(\cos\varphi + j\sin\varphi) = |Z|e^{j\varphi}.$$

Stąd napięcie

$$U = |Z|e^{j\varphi}i_0 e^{j\omega t} = U_0 e^{j\omega t} = Zi_0 e^{j(\omega t+\varphi)},$$

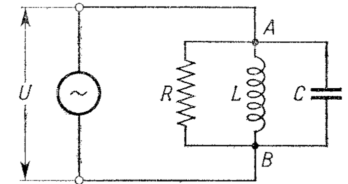
gdzie

$$U_0 = Zi_0 e^{j\varphi}.$$

Widzimy wyraźnie, że zespolona amplituda U_0 daje nam dwie informacje; oznacza ona bowiem to samo, co rzeczywista amplituda Zi_0 wraz z określonym przesunięciem fazowym φ.

Wzór (4.73b) poucza nas, że *zawada szeregowego układu elementów oporowych, indukcyjnych i pojemnościowych, równa jest sumie zawad poszczególnych elementów*. Jest to prawo analogiczne do tego, jakie rządzi zwykłymi oporami omowymi dla stałego prądu (por. § 1.23).

f) Prąd płynie przez wszystkie trzy elementy R, L, C połączone równolegle (rys. 4.103). Amplitudę napięcia na każdym z tych elementów obliczyliśmy już



Rys. 4.103. Prąd przemienny przepływa przez układ równoległy RLC

w punktach a), b) i c). Ale końce tych elementów podłączone są do wspólnych punktów A i B; między nimi panuje napięcie o tej samej amplitudzie i fazie:

$$U = U_R = U_L = U_C = U_0 e^{j\omega t}.$$

Natomiast przez elementy te płyną różne prądy. Zespolona (na ogół) amplituda ich natężenia wyraża się wzorami:

$$i_{0R} = \frac{U_0}{R},$$

$$i_{0L} = \frac{U_0}{j\omega L} = \frac{U_0}{X_L},$$

$$i_{0C} = \frac{U_0}{1/j\omega C} = \frac{U_0}{X_C},$$

gdzie przez X_L i X_C oznaczyliśmy opór indukcyjny i pojemnościowy:

$$X_L = j\omega L, \quad X_C = \frac{1}{j\omega C}. \tag{4.74}$$

Natężenie prądu w całym obwodzie jest sumą natężeń wszystkich prądów, gdyż elementy połączone są równolegle:

Zatem

$$i_0 = U_0\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{X_L} + \frac{1}{X_C}\right),$$

czyli

$$i_0 = U_0\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C\right).$$

Stąd wyznaczamy odwrotność zawady:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{X_L} + \frac{1}{X_C}, \tag{4.75}$$

czyli

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right).$$

Jej moduł wynosi

$$\left|\frac{1}{Z}\right| = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}, \tag{4.76a}$$

zaś argument φ oblicza się ze wzoru

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega C - 1/\omega L}{1/R}. \tag{4.76b}$$

Wzór (4.75) stosuje się do trzech elementów: oporowego, indukcyjnego i pojemnościowego, połączonych równolegle; łatwo da się uogólnić dla dowolnej liczby elementów. Oto jego treść: *odwrotność zawady układu elementów RLC połączonych szeregowo równa jest sumie odwrotności zawad poszczególnych elementów*. I to prawo jest analogiczne do odpowiedniego prawa dla zwykłych oporów w obwodach prądu stałego (patrz § 1.36). Tkwi w tym wielka korzyść stosowania liczb zespolonych w problemach prądu przemiennego. Bowiem każde równanie wyrażone liczbami zespolonymi kryje w sobie dwa równania zawierające wielkości mierzalne: jedno wynika z równości części rzeczywistych, drugie — z równości części urojonych. Pierwsze pozwala wyznaczyć moduł, dający informacje o wartości zawady, drugie pozwoli wyznaczyć argument, dający informacje o stosunkach fazowych.

g) Rezonans szeregowy i równoległy. Zarówno w przypadku obwodu *RLC* szeregowego, jak i równoległego rezonans wystąpi wtedy, gdy w wyrażeniu na zawadę zniknie opór bierny, a pozostanie tylko opór czynny. W obu przypadkach występuje to przy tym samym warunku:

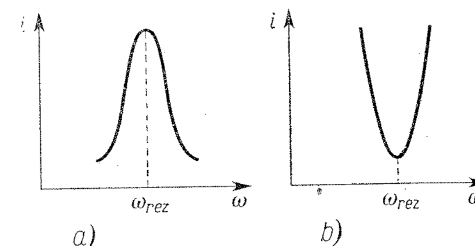
$$\omega^2 LC = 1,$$

czyli

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{4.77}$$

W obu więc przypadkach zawada obwodu, gdy warunek rezonansu jest spełniony, równa jest po prostu oporności omowej R obwodu. Lecz w zachowaniu się obu tych obwodów różnica jest znaczna, bowiem w wypadku obwodu szeregowego opór omowy stanowi minimum, natomiast w wypadku obwodu równoległego opór omowy stanowi maksimum.

Wynika stąd zasadnicza różnica w zachowaniu się tych dwóch obwodów. Gdy mamy do czynienia z rezonansem szeregowym, zawada obwodu w chwili rezonansu jest najmniejsza, równa R, a zatem natężenie prądu ma maksimum (rys. 4.104a). Natomiast w wypadku rezonansu równoległego odwrotność zawady staje się najmniejsza, równa $1/R$, zatem natężenie prądu ma minimum (rys. 4.104b). W tym ostatnim wypadku, w obwodzie LC (patrz rys. 4.103) płyną silne prądy, lecz mają przeciwne fazy: gdy przez L płynie prąd w prawo, to jednocześnie przez C — w lewo. W ten sposób w przewodach doprowadzających A i B prądy te znoszą się i płynie przez nie prąd najsłabszy, tj. tylko taki, jaki przepływa przez R. Natomiast w obwodzie zamkniętym LC płynie prąd drgający, na przemian w jedną i drugą stronę, który w chwili rezonansu osiąga największą wartość, tym większą im odnogi L i C mają mniejsze opory omowe, zresztą nie uwzględnione w naszych rozważaniach.



Rys. 4.104. Przebieg natężenia prądu w obwodzie generatora zasilającego układ *RLC* szeregowy i równoległy. W układzie szeregowym (*a*) natężenie prądu w rezonansie stanowi *maksimum*, natomiast w układzie równoległym (*b*) — *minimum*

Zagadnienia do rozdziału 4

Do części A

*4.1. Ramka kolista o promieniu $r = 10$ cm, na obwodzie której nawinięto $n = 500$ zwojów izolowanego drutu miedzianego, ustawiona jest w płaszczyźnie południka magnetycznego. Ramkę przekręcamy o 90° dookoła osi pionowej. Obliczyć siłę elektromotoryczną E, indukowaną w drucie w czasie tego obrotu trwającego $t = 0{,}1$ s, zakładając, że strumień magnetyczny przechodzący przez ramkę zmieniał się z prędkością stałą. Składowa pozioma $h = 0{,}2$ Oe. Opisane urządzenie nosi nazwę „induktora ziemskiego Webera".

Odpowiedź. $|E| = 10^{-8}\,\frac{\pi r^2 hn}{t} = 0{,}00314$ V.

***4.2.** Końce uzwojenia powyższego induktora ziemskiego (zagadnienie 4.1) połączono z galwanometrem o bardzo małym oporze w porównaniu z oporem R induktora. Jaki prąd wskaże galwanometr w czasie wspomnianego obrotu? Średnica drutu induktora $d = 0{,}3$ mm.

Odpowiedź. $i = \frac{E}{R} = \frac{10^{-8}\pi rhd^2}{8\varrho t} = 41{,}6$ μA.

***4.3.** W polu magnetycznym jednorodnym o natężeniu $H = 300$ Oe przesuwamy pręt metalowy o długości $l = 10$ cm ruchem jednostajnym, prostopadłym do linii sił, z prędkością $v = 10$ cm/s. Obliczyć siłę elektromotoryczną E indukowaną w pręcie.

Odpowiedź. $E = 10^{-8}\,Hlv = 0{,}3$ mV.

***4.4.** W poprzednim doświadczeniu drut przesuwany jest wzdłuż gołych prętów i stale z nimi kontaktuje (patrz rys. 4.1). Do końców tych prętów dołączony jest galwanometr wskazówkowy, o oporze $R = 48\ \Omega$ i o czułości $c = 2{,}5\cdot 10^{-6}$ A na podziałkę. Jakie wychylenie α wskaże galwanometr w czasie przesuwania drutu po prętach z prędkością $v = 10$ cm/s? Odległość prętów $l = 8$ cm. Opór prętów i drutu jest znikomy.

Odpowiedź. $\alpha = \frac{10^{-8}Hlv}{Rc} = 2$ podziałki.

4.5. W polu magnetycznym o natężeniu $H = 30\,000$ Oe, wytworzonym między biegunami silnego elektromagnesu, umieszczamy prostopadle do linii sił małą cewkę w postaci krążka o promieniu $r = 0{,}5$ cm, zawierającą $n = 100$ zwojów. Końce cewki łączymy z galwanometrem; opór cewki i galwanometru razem wynosi $R = 60\ \Omega$. Cewkę tę szybkim ruchem usuwamy z pola. a) Obliczyć siłę elektromotoryczną w cewce, w założeniu, że strumień zanikał jednostajnie w ciągu $t = 0{,}3$ s. b) Obliczyć ładunek, jaki przepłynął przez galwanometr.

Odpowiedź. $|E| = \frac{10^{-8}\pi r^2 Hn}{t} = 78{,}5$ mV;

$$|e| = \frac{10^{-8}\pi r^2 Hn}{R} = 0{,}39 \text{ mC}.$$

4.6. Między biegunami elektromagnesu ($H = 30\,000$ Oe), prostopadle do linii sił, umieszczono pierścień miedziany o promieniu $r = 0{,}5$ cm. Jaki ładunek elektryczny przepłynie w pierścieniu w czasie wyłączenia prądu w elektromagnesie, jeżeli opór pierścienia $R = 1{,}5\cdot 10^{-4}\ \Omega$? Czy pierścień ogrzeje się? Od czego to zależy?

Odpowiedź. $|e| = \frac{10^{-8}\pi r^2 H}{R} = 1{,}57$ C; tak; przyrost temperatury pierścienia zależy od czasu znikania pola.

4.7. Ile ciepła wydzieli się w pierścieniu z poprzedniego zadania, jeśli czas zanikania prądu w elektromagnesie wynosi $t = 1$ s?

Odpowiedź. $Q = 0{,}24\frac{10^{-16}\pi^2 r^4 H^2}{Rt} = 0{,}89\cdot 10^{-4}$ cal.

***4.8.** (P). Igła magnesowa zawieszona na nici wykonuje wahania dookoła położenia równowagi, bardzo słabo tłumione. Stwierdzić za pomocą odpowiednich pomiarów, że tłumienie wahań zwiększa się, jeśli tuż pod igłą umieścić płytkę miedzianą. Dlaczego?

***4.9.** (P). Igła magnesowa zawieszona na nici znajduje się w spoczynku. Pod igłą umieszczamy krążek miedziany i wprawiamy go za pomocą wirówki w szybki obrót dookoła osi pionowej. Igła wychyla się w kierunku obrotu krążka. Dlaczego?

***4.10.** (P). Na nici zawieszamy krążek miedziany tak, że jego płaszczyzna jest pozioma. Pod krążkiem, na pionowej osi wirówki, umieszczamy magnes podkowiasty, którego bieguny są skierowane ku górze i zbliżone do dolnej powierzchni krążka. Magnes wprawiamy w ruch obrotowy. Krążek zaczyna podążać za magnesem. Dlaczego magnes, który, gdy jest w spoczynku, nie działa na krążek miedziany, pociąga go, gdy jest w ruchu?

4.11. Dwie płaskie cewki o jednakowych powierzchniach i o współczynnikach indukcyjności własnej L_1 i L_2 kładziemy jedną na drugą, tak iż możemy uważać, że cały strumień magnetyczny wytworzony przez jedną przechodzi przez drugą. Udowodnić, że współczynnik indukcyjności wzajemnej obu tych cewek wynosi $M = \sqrt{L_1L_2}$. (Na ogół zawsze współczynnik indukcyjności wzajemnej M jest mniejszy od $\sqrt{L_1L_2}$. Piszemy, że $M = k\sqrt{L_1L_2}$ i k nazywamy *stopniem sprzężenia*. Im cewki są dalej od siebie, tym k jest mniejsze).

Odpowiedź. a) Cewkę *1* traktujemy jako pierwotną, cewkę *2* — jako wtórną. Ze wzoru (4.6): $\Phi_1 = L_1 i_1$, stąd $H = \frac{L_1}{Sn_1} i_1$ (S — pole cewki, n_1 — ilość zwojów); $\Phi_2 = HSn_2 = L_1\frac{n_2}{n_1}i_1$; ze wzoru (4.4) $\Phi_2 = Mi_1$, więc $M = L_1\frac{n_2}{n_1}$; b) Cewkę *1* traktujemy jako wtórną, cewkę *2* — jako pierwotną. Analogiczny rachunek daje: $M = L_2\frac{n_1}{n_2}$. Stąd $M^2 = L_1L_2$, czyli $M = \sqrt{L_1L_2}$.

***4.12.** Ile zwojów należy nawinąć na rurce tekturowej o promieniu $r = 1$ cm i o długości $l = 10$ cm, aby współczynnik indukcyjności własnej tak sporządzonej cewki wyniósł $L_0 = 0{,}004$ henra ($4\cdot 10^6$ cm)?

Odpowiedź. $n = \frac{\sqrt{L_0 l}}{2\pi r} = 1007$ zwojów (L_0 — w jednostkach CGS).

***4.13.** Przez powyższą (patrz zagadnienie 4.12) cewkę przepuszczamy prąd elektryczny o natężeniu a) $i = 0{,}08$ A, b) $i = 0{,}008$ A. Obliczyć natężenie pola magnetycznego H wewnątrz cewki.

Odpowiedź. $H = \frac{4\pi ni}{l}$; a) $H = 10{,}1$ Oe; b) $H = 1{,}01$ Oe.

***4.14.** Do wnętrza tej cewki (patrz zagadnienie 4.12) wprowadzamy rdzeń z miękkiego żelaza. Obliczyć przybliżoną wartość współczynnika indukcyjności własnej w wypadkach a) i b) (por. zagadnienie 4.13), korzystając z wartości przenikalności magnetycznej żelaza, zawartych w tablicy 32. Pominąć działanie rozmagnesowujące końców rdzenia

Odpowiedź. $L = \mu L_0$; a) $L = 0{,}72$ henra; b) 5,8 henra.

***4.15.** Dwa solenoidy ustawione są osiami równolegle do siebie. Jeden z nich obracamy o 90° tak, że osie solenoidów są teraz prostopadłe do siebie. Jak zmienił się współczynnik indukcyjności wzajemnej i dlaczego?

Odpowiedź. Zmalał praktycznie do zera, gdyż $\Phi = 0$.

***4.16.** Jeżeli w obwodzie prądu znajduje się dość duża indukcyjność, prąd po włączeniu „narasta" mniej lub więcej powoli, od zera do największej wartości. To narastanie może trwać ułamek sekundy (i wtedy jest zazwyczaj niedostrzegalne), ale przy większych cewkach o większym współczynniku indukcyjności własnej, może dochodzić do kilkunastu sekund. Prąd w olbrzymim elektromagnesie w Bellevue (patrz rys. 3.48) ustala się dopiero po kilku minutach. Wytłumaczyć to zjawisko.

***4.17.** (P). Zjawisko powolnego „narastania" prądu przy włączaniu (por. zagadnienie 4.16) można bliżej zbadać stosując, jako indukcyjność własną, uzwojenie dość dużego elektromagnesu (E, rys. 4.105), którego cewki zawierają około 2000 zwojów grubego drutu (o średnicy około 2 mm). W obwód tego elektromagnesu włączamy amperomierz A, akumulator B (2 wolty) i wyłącznik W. Po włączeniu prąd narasta od 0 do maksimum (kilka dziesiątych ampera), przy czym narastanie to trwa około 10 sekund. Ilustruje to wykres *I* na rys. 4.106. Jeśli prąd w uzwojeniu elektromagnesu wyłączymy otwierając wyłącznik W, wówczas nie znika on od razu, lecz płynie przez opór R' (kilka omów), który musimy uprzednio dołączyć, aby umożliwić mu drogę w obwodzie. Prąd stale słabnie, lecz da się jeszcze obserwować przez kilkanaście sekund. Nietrudno zbadać zależność jego od czasu; ilustruje ją krzywa *II* na rys. 4.106.

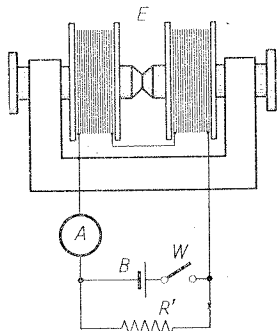
4.18. W zjawisku z zagadnienia 4.17 obliczyć natężenie prądu i w obwodzie, po czasie t od chwili puszczenia prądu; innymi słowy, znaleźć równanie krzywej narastania prądu (*I*, na rys. 4.106). Współczynnik indukcyjności własnej L uznać za stały.

Odpowiedź. Oznaczenia: R — opór uzwojenia, r — opór wewnętrzny akumulatora, E — jego siła elektromotoryczna. Z uogólnionego prawa Ohma: $E - L\frac{di}{dt} = (R+r)i$; stąd $\frac{-(R+r)\,di}{E-(R+r)i} =$

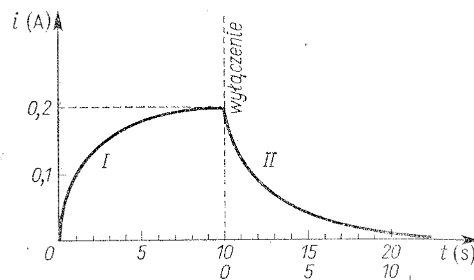
$=-\frac{R+r}{L}dt$. Po scałkowaniu (względem t od 0 do t i względem i od 0 do i) otrzymujemy: $\ln\frac{E-(R+r)i}{E}=-\frac{R+r}{L}t$. Stąd poszukiwane równanie

$$i=\frac{E}{R+r}\left(1-e^{-\frac{R+r}{L}t}\right).$$

4.19. Analogicznie do poprzedniego zagadnienia znaleźć równanie krzywej zanikania prądu po wyłączeniu (*II*, rys. 4.106).



Rys. 4.105. Po włączeniu prądu do elektromagnesu — prąd narasta powoli; po wyłączeniu prądu — prąd płynie jeszcze pewien czas przez opór R' i amperomierz A

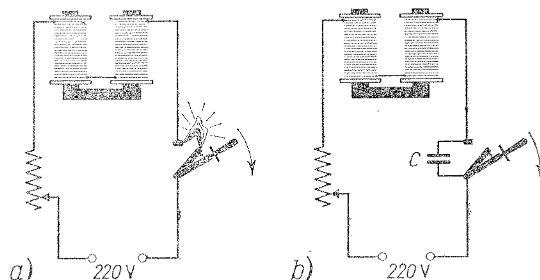


Rys. 4.106. I — krzywa narastania prądu w czasie, II — krzywa znikania prądu po wyłączeniu

Odpowiedź. Wychodzimy z tego samego równania co w zagadnieniu poprzednim, kładąc $E=0$ oraz R' zamiast r: $-L\frac{di}{dt}=(R+R')\,i$. Stąd $\frac{di}{i}=-\frac{R+R'}{L}dt$. Po scałkowaniu względem t od 0 do t i względem i od i_0 (natężenie prądu w chwili wyłączania) do i, otrzymamy $\ln\frac{i}{i_0}=-\frac{R+R'}{L}t$. Stąd poszukiwane równanie

$$i=i_0\,e^{-\frac{R+R'}{L}t}.$$

*4.20. (P) a) Elektromagnes zasilamy z sieci prądu stałego 220 V przez opornik (rys. 4.107a). Przy wyłączaniu prądu powstaje silny łuk elektryczny. b) Równolegle do biegunów wyłącznika dołączamy kondensator C o pojemności około 1 μF (rys. 4.107b). Przy wyłączaniu prądu nie ma ani śladu łuku elektrycznego. Odtworzyć te zjawiska i wytłumaczyć je.



Rys. 4.107. Przy wyłączaniu prądu w obwodzie zawierającym samoindukcję powstaje silny łuk elektryczny (*a*), który można usunąć przez dołączenie kondensatora do zacisków wyłącznika (*b*)

***4.21.** (P). Przez elektromagnes, którego bieguny zwieramy zworą żelazną (jak na przykład na rys. 3.44) puszczamy przez chwilę prąd elektryczny kilku amperów, po czym elektromagnes odłączamy od źródła prądu i do jego zwojów dołączamy małą żarówkę elektryczną. W chwili oderwania zwory od biegunów żarówka rozbłyska. Późniejsze zbliżanie i oddalanie zwory nie powoduje już zaświecenia się żarówki. Odtworzyć i wytłumaczyć to zjawisko. (Należy wziąć pod uwagę pozostałość magnetyczną żelaza w zamkniętym rdzeniu oraz działanie rozmagnesowujące otwartych biegunów.)

Do części B

4.22. Twornik prądnicy zawiera $n=500$ przewodników czynnych. Przez jego przekrój prostopadły do linii sił przechodzi strumień indukcji wynoszący 2,3 miliona „linii sił". Oznacza to, że $\Phi=2{,}3\cdot10^6$ Oe·cm^2 $=2{,}3\cdot10^6$ Mx $=0{,}023$ Wb. Obliczyć siłę elektromotoryczną prądnicy przy częstotliwości obrotów $N=2400$ na minutę.

Odpowiedź. $E=Nn\Phi=40\ \mathrm{s^{-1}}\cdot500\cdot0{,}023\ \mathrm{Wb}=460$ V.

4.23. Prądnica powyższa dostarcza prądu o natężeniu $i=40$ A. Jakie napięcie panuje na jej zaciskach, skoro opór twornika (mierzony między szczotkami) wynosi $r=0{,}5\ \Omega$? Ile wynosi jej moc?

Odpowiedź. $U=E-ri=440$ V; $M=Nni\Phi=18{,}4$ kW.

4.24. Jaką moc w KM musi mieć silnik poruszający powyższą prądnicę? Na wszystkie straty energii w transmisji i w prądnicy położyć 20%.

Odpowiedź. $M=1{,}2\cdot Nni\Phi=22{,}08$ kW $=30{,}0$ KM.

4.25. Jaka moc Q (w watach i w $\frac{\mathrm{cal}}{\mathrm{s}}$) rozprasza się w tworniku powyższej prądnicy w postaci ciepła Joule'a?

Odpowiedź. $Q=ri^2=800\ \mathrm{W}=192\ \frac{\mathrm{cal}}{\mathrm{s}}$.

4.26. Prądnica obracana przez silnik spalinowy ładuje baterię akumulatorów, z którą połączona jest bezpośrednio, bez automatycznych wyłączników. W pewnej chwili silnik spalinowy przestaje działać i prądnica zatrzymuje się. Opisać dokładnie, z zastosowaniem rysunku schematycznego obwodu (twornik i elektromagnesy prądnicy, bateria) to, co dalej nastąpi.

Odpowiedź. W rezultacie, prądnica jako motor uruchomi silnik spalinowy i zespół zacznie znów normalną pracę.

***4.27.** Silnik elektryczny obraca tokarkę. W pewnej chwili nóż zawadził o metal i tokarka nagle została zahamowana. Opisać możliwe skutki.

Do części C

4.28. (P). Wyznaczyć częstotliwość prądu przemiennego metodą pobudzenia struny do drgań (patrz na przykład rys. 4.37) i zmierzenia częstotliwości jej drgań (np. metodą Quinckego).

***4.29.** (P). Aparat do elektrolizy wody dołączamy przez opornik do sieci prądu przemiennego. Stwierdzić, że nad obydwiema elektrodami wydziela się gaz piorunujący ($2H_2+O_2$).

4.30. Napisać równanie napięcia panującego między przewodami sieci prądu przemiennego, jeśli wiadomo, że napięcie skuteczne wynosi 110 V, a częstotliwość 50 okresów na sekundę.

Odpowiedź. $U=155{,}5\sin(100\,\pi t)$.

4.31. Równanie napięcia sieci prądu przemiennego jest $U=169{,}7\sin(314\,t)$. Określić napięcie skuteczne U_s, częstotliwość f i liczbę n zmian kierunku prądu w ciągu sekundy.

Odpowiedź. $U_s=\frac{U_0}{\sqrt{2}}=120$ V; $f=\frac{314}{2\pi}=50\ \mathrm{s^{-1}}$; $n=100\ \mathrm{s^{-1}}$.

4.32. Do sieci prądu przemiennego ($U_s = 120$ V, $f = 50$ s^{-1}) dołączono piecyk o oporze wynoszącym (na gorąco) $R = 15\ \Omega$. Obliczyć natężenie skuteczne i_s prądu oraz moc M_s piecyka; napisać równanie prądu.

Odpowiedź. $i_s = \frac{U_s}{R} = 8$A; $M_s = \frac{U_s^2}{R} = 0{,}96$ kW; $i = 11{,}3 \sin(100\pi t)$.

4.33. Cewka bez rdzenia ma współczynnik indukcji własnej $L = 0{,}1$ H i opór omowy $R = 10\ \Omega$. Obliczyć a) jej opór indukcyjny Z' oraz b) jej zawadę Z dla prądu przemiennego normalnego, tj. o częstotliwości 50 s^{-1}.

Odpowiedź. $Z' = 2\pi f\, L = 31{,}4\ \Omega$; $Z = \sqrt{R^2+Z'^2} = 32{,}96\ \Omega$.

4.34. Powyższą cewkę dołączamy do sieci prądu przemiennego ($U_s = 220$ V, $f = 50$ s^{-1}). Obliczyć: a) natężenie skuteczne prądu i_s, b) natężenie szczytowe i_0, c) różnicę faz φ napięcia i natężenia, d) moc M_s wydzielaną w cewce. Napisać równanie natężenia i napięcia.

Odpowiedź. $i_s = \frac{U_s}{\sqrt{R^2+4\pi^2 f^2 L^2}} = 6{,}67$ A; $i_0 = 9{,}43$ A; $\varphi = \text{arctg}\, \frac{2\pi f L}{R} = 72°20'$; $M_s = U_s i_s \cos\varphi = 445$W ; $i = 9{,}43 \sin(314{,}16t)$; $U = 311 \sin(314{,}16t+1{,}262)$.

4.35. Dla porównania odpowiedzieć na pytania a) i d) z zagadnienia 4.34 w wypadku, gdyby cewkę dołączono do sieci prądu stałego 220 V.

Odpowiedź. $i = \frac{U}{R} = 22$ A; $M = U_i = 4{,}84$ kW .

4.36. Na rurze tekturowej nawinięto jedną warstwę izolowanego drutu miedzianego o średnicy $d = 1$ mm. Utworzyła się w ten sposób cewka, o promieniu $r = 6$ cm i długości $l = 0{,}55$ m, zawierająca $n = 500$ zwojów drutu.

Obliczyć: a) opór omowy R cewki, b) jej współczynnik indukcyjności własnej L, c) jej opór indukcyjny Z' dla prądu o częstotliwości $f = 50$ s^{-1}, d) jej zawadę Z.

Odpowiedź. $R = \frac{8rn\varrho}{d^2} = 4{,}08\ \Omega$; $L = \mu_0 \frac{\pi n^2 r^2}{l}$, gdzie $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{A}\cdot\text{m}}$; stąd $L = 6{,}45$ mH ; $Z' = \frac{8\pi^3 n^2 r^2}{l} = 2{,}03\ \Omega$; $Z = \sqrt{R^2+Z'^2} = 4{,}56\ \Omega$.

4.37. Obliczyć, dla jakiej częstotliwości prądu f różnica faz napięcia i prądu w powyższej cewce ($L = 6{,}45 \cdot 10^{-3}$ H) będzie wynosiła $\varphi = 45°$.

Odpowiedź. $f = \frac{R \,\text{tg}\, \varphi}{2\pi L} = 100{,}7$ s^{-1} .

4.38. Przy jakiej częstotliwości prądu f powyższa cewka będzie miała opór indukcyjny o olbrzymiej wartości $Z' = 10^5\ \Omega$?

Odpowiedź. $f = \frac{Z'}{2\pi L} = 2{,}47 \cdot 10^6$ s^{-1} $= 2{,}47$ MHz.

***4.39.** Transformator, którego pierwotne uzwojenie zawiera $n_1 = 500$ zwojów, dołączamy do sieci prądu przemiennego o napięciu $U_{s1} = 220$ V. Jakie napięcie U_{s2} otrzymuje się na końcach cewki wtórnej zawierającej $n_2 = 23\,000$ zwojów? Ile wynosi napięcie szczytowe U_{02} po stronie wtórnej?

Odpowiedź. $U_{s2} = U_{s1} \frac{n_2}{n_1}$ 10,1 kV; $U_{02} = U_{s2}\sqrt{2} = 14{,}3$ kV.

4.40. Wtórny obwód transformatora przyłączonego do sieci jest nieobciążony. a) Ile wynosi $\cos\varphi$ w obwodzie pierwotnym (jeśli pominiemy straty)? b) Jak się zmieni $\cos\varphi$ po obciążeniu transformatora?

Odpowiedź. a) $\cos\varphi = 0$; b) $\cos\varphi > 0$.

***4.41.** Narysować schemat transformatora dzwonkowego z oznaczeniem ilości zwojów, wiedząc, że po stronie pierwotnej ma 1500 zwojów i że służy do transformowania prądu o napięciu 220 V na prąd o napięciu 3, 5 i 8 V, przy czym te ostatnie napięcia odprowadza się z trzech zacisków znajdujących się po stronie wtórnej.

4.42. Transformator do zasilania radioodbiornika ma po stronie pierwotnej 3 zaciski: *1*, *2* i *3*, z których *1* i *2* służą do zasilenia transformatora z sieci 120 V, a *1* i *3* — z sieci 220 V, przy czym te ostatnie prowadzą do końców cewki pierwotnej (zacisk *2* dołączony jest do cewki pierwotnej w punkcie, który ją dzieli w stosunku 120 : 220). Transformator ten ma 3 uzwojenia wtórne: a) uzwojenie dostarczające prądu do żarzenia lampy prostowniczej o napięciu 4 V, b) uzwojenie do żarzenia lamp katodowych o napięciu 6,3 V, c) uzwojenie dostarczające prądu anodowego o napięciu 250 V. Narysować schemat tego transformatora z podaniem liczby zwojów wiedząc, że uzwojenie a) zawiera 20 zwojów.

4.43. Sieć prądu trójfazowego ma przewód zerowy. Wiedząc, że napięcie fazowe (tj. napięcie między przewodem zerowym a jakimkolwiek innym przewodem sieci) wynosi $u_s = 220$ V, obliczyć napięcie międzyprzewodowe U_s (tj. napięcie między dowolnymi dwoma przewodami sieci, z pominięciem przewodu zerowego).

Odpowiedź. $U_s = \sqrt{3}\, u_s = 380{,}6$ V.

4.44. Napięcie międzyprzewodowe sieci prądu trójfazowego wynosi $U_s = 220$ V. Ile wynosi napięcie fazowe (tzn. napięcie między dowolnym przewodem sieci a punktem zerowym lub ziemią, jeśli punkt zerowy jest uziemiony)?

Odpowiedź. $u_s = \frac{U_s}{\sqrt{3}} = 127$ V.

Do części D

4.45. Kondensator o pojemności 5 μF, którego okładki i doprowadzenia mają opór praktycznie zerowy, dołączono do sieci prądu przemiennego o napięciu $U_s = 220$ V i o częstotliwości $f = 50$ Hz. Obliczyć a) opór pojemnościowy Z tego kondensatora, b) natężenie i_s prądu przezeń płynącego, c) wartość szczytową natężenia tego prądu, d) różnicę faz napięcia i natężenia. Napisać równania natężenia i napięcia.

Odpowiedź. $Z = \frac{1}{2\pi f C} = 637\ \Omega$; $i_s = \frac{U_s}{Z} = 0{,}346$ A; $i_0 = 0{,}489$ A; $\varphi = 90°$; $i = 0{,}489 \sin(314{,}16\, t)$; $U = 311 \sin\left(314{,}16\, t - \frac{\pi}{2}\right)$.

4.46. Do powyższego kondensatora dołączono szeregowo opór omowy $R = 400\ \Omega$. Obliczyć zawadę Z tego układu oraz różnicę faz φ między prądem a napięciem panującym na końcowych zaciskach układu.

Odpowiedź. $Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{4\pi^2 f^2 C^2}} = 752{,}2\ \Omega$; $\varphi = -\text{arctg}\, \frac{1}{2\pi f C R} = -\text{arctg}\, 1{,}5925 = -57°52'$ (znak — oznacza, że napięcie opóźnia się względem prądu; por. równanie w zagadnieniu 4.45).

4.47. Cewkę o znikomo małym oporze i o współczynniku indukcyjności własnej $L = 0{,}1$ H (bez rdzenia) połączono szeregowo z kondensatorem o pojemności $C = 5$ μF. Obliczyć: a) opór indukcyjny Z_L samej cewki, b) opór pojemnościowy Z_C kondensatora, c) opór pozorny Z całego układu. Częstotliwość prądu przemiennego $f = 50$ s^{-1}.

Odpowiedź. $Z_L = 2\pi f L = 31{,}4\ \Omega$: $Z_C = \frac{1}{2\pi f C} = 637\ \Omega$; $Z = |Z_L - Z_C| = 605{,}6\ \Omega$ [por. równanie (4.46) dla $R = 0$].

4.48. Przy jakiej częstotliwości f prądu opór układu powyższego stałby się $= 0$, tzn. przy jakiej częstotliwości wystąpi rezonans?

Odpowiedź. $2\pi f L = \frac{1}{2\pi f C}$, stąd $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 225{,}2$ s^{-1}.

4.49. Przy jakiej częstotliwości f opór pojemnościowy kondensatora, mającego pojemność $C = 1$ μF, wynosić będzie a) 1000 Ω, b) 1 Ω, c) 0,001 Ω?

Odpowiedź. $f = \frac{1}{2\pi C Z}$; a) $f = 159$ Hz; b) $f = 1{,}59 \cdot 10^5$ Hz, c) $f = 159$ MHz .

Do części E

*__4.50.__ Cewka bez rdzenia, złożona z kilkuset zwojów grubego drutu, mająca współczynnik indukcyjności własnej $L = 5\cdot 10^6$ cm, dołączona została równolegle do kondensatora o pojemności $C = 2\cdot 10^5$ cm. Obliczyć okres i częstotliwość drgań własnych tego układu.

Odpowiedź. $T = 2\pi\sqrt{LC} = 6{,}28\sqrt{\frac{5\cdot 10^6}{10^9}\cdot\frac{2\cdot 10^5}{9\cdot 10^{11}}}$ s $= 2{,}093\cdot 10^{-4}$ s; $f = 4778$ Hz.

4.51. Jak wielką indukcyjność należy dołączyć do baterii kondensatorów o pojemności $C = 100\ \mu$F, aby okres drgań tego obwodu wynosił 1 s?

Odpowiedź. $L = \frac{T^2}{4\pi^2 C} = 253\ H.$

4.52. Z grubego drutu wyginamy pętlę w kształcie niemal zamkniętego koła o średnicy około 20 cm, przypominającą kształtem literę Ω. Pętla taka ma współczynnik indukcyjności własnej równy około 600 cm. Dla jakiej częstotliwości prądu opór indukcyjny tej pętli wyniesie $Z = 37{,}7\ \Omega$?

Odpowiedź. $f = \frac{Z}{2\pi L} = \frac{37{,}7\cdot 10^9}{2\cdot 3{,}14\cdot 600}\ \text{s}^{-1} = 10$ MHz.

4.53. Niech przez tę pętlę przejdzie krótkotrwały prąd o wyżej obliczonej częstotliwości i natężeniu szczytowym $i_0 = 10\,000$ A. Jakie napięcie wytworzy się na końcach pętli? Jaki będzie skutek?

Odpowiedź. $U_0 = Zi_0 = 377$ kV. Zanim napięcie dojdzie do tak wysokiej wartości, przeskoczy między końcami pętli iskra, przez którą będzie dalej płynął prąd z pominięciem pętli.

4.54. Przepisy „P.N.E." (Polskie Normy Elektryczne) o instalacjach piorunochronowych nakazują, aby linka uziemiająca pręt lub inne części metalowe dachu, w które łatwo może uderzyć piorun, prowadziła możliwie prostą drogą do ziemi, bez silniejszych zakrzywień. Biorąc pod uwagę, że piorun jest wyładowaniem krótkotrwałym i że natężenie prądu dochodzić może do 10^5 A, uzasadnić celowowść tego przepisu. (W czasie burz nieraz obserwowano, że piorun, uderzywszy w odgromnik, opuszczał linkę i inną drogą zdążał ku ziemi).

Do części F

4.55. Kondensator (C) i opornik (R) połączone są szeregowo (rys. 4.108). Obliczyć impedancję zespoloną Z tego układu, jej moduł $|Z| = Z$ i argument φ.

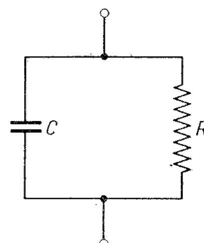
Odpowiedź. $\mathrm{Z} = R + \frac{1}{j\omega C} = R - j\frac{1}{\omega C}$, $Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$, $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{\omega RC}$.

4.56. Kondensator i opornik połączone są równolegle (rys. 4.109). Obliczyć impedancję zespoloną Z tego układu, jej moduł $|Z| = Z$ i argument φ.

Odpowiedź. $\frac{1}{\mathrm{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\mathrm{X}_C} = \frac{1}{R} + j\omega C$, $\mathrm{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2}\left(\frac{1}{R} - j\omega C\right)$, $Z = |\mathrm{Z}| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2}}$, $\operatorname{tg}\varphi = -\omega RC$.



Rys. 4.108. Obwód RC szeregowy



Rys. 4.109. Obwód RC równoległy

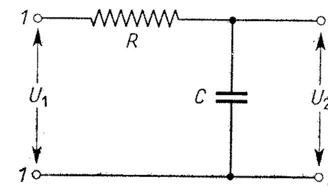
4.57. Filtr dolnoprzepustowy wyobraża rys. 4.110. Do pary zacisków *1* przykłada się napięcie wejściowe U_1, zaś na zaciskach *2* otrzymuje się napięcie wyjściowe (albo przepuszczone przez filtr) U_2. Pomijając stosunki fazowe obliczyć wartość U_2/U_1. Sporządzić wykres U_2/U_1 w funkcji ω.

Odpowiedź. $\frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{C}}{\sqrt{(\omega R)^2 + \left(\frac{1}{C}\right)^2}}$.

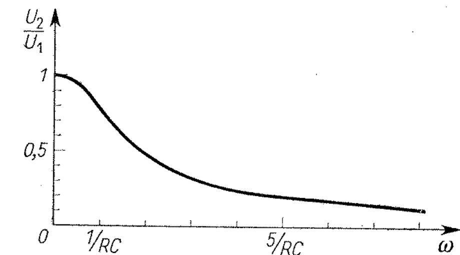
Sporządzamy tabelkę, stosując dla zmiennej niezależnej ω następującą skalę:

$\omega =$	0	$\frac{0{,}1}{RC}$	$\frac{0{,}5}{RC}$	$\frac{1}{RC}$	$\frac{2}{RC}$	$\frac{5}{RC}$	$\frac{10}{RC}$	∞
U_2/U_1	1	0,995	0,894	0,707	0,447	0,196	0,0995	0

Wykres przedstawia rys. 4.111.



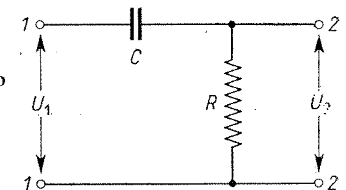
Rys. 4.110. Filtr dolnoprzepustowy (por. rys. 4.108). Jest to szczególny przypadek czwórnika, rys. 4.114



Rys. 4.111. Charakterystyka napięciowa filtru dolnoprzepustowego z rys. 4.110

4.58. Filtr górnoprzepustowy wyobraża rys. 4.112. Znając wartość oporu pojemnościowego kondensatora $\left(\frac{1}{\omega C}\right)$ od razu można przewidzieć, że napięcie U_2, zebrane w tym wypadku z zacisków opornika, będzie bardzo niskie dla małych częstotliwości, natomiast wysokie dla wielkich częstotliwości. Potwierdzić to rachunkiem obliczając U_2/U_1 i sporządzając wykres, jak w zagadnieniu poprzednim.

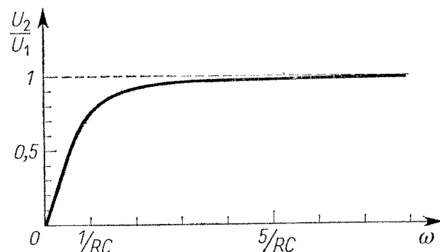
Odpowiedź. $\frac{U_2}{U_1} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$.



Rys. 4.112. Filtr górnoprzepustowy (por. rys. 4.108). Jest to szczególny przypadek czwórnika, rys. 4.114

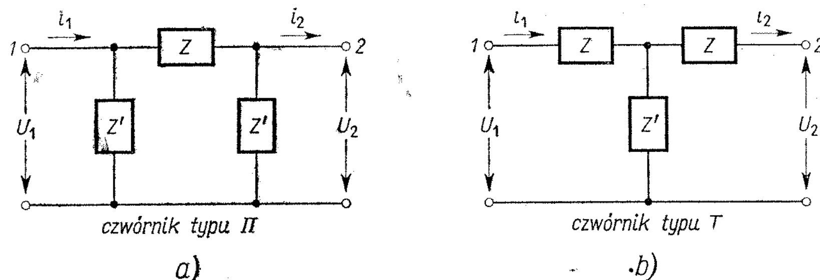
Tabelka do wykresu (rys. 4.113):

$\omega =$	0	$\frac{0,1}{RC}$	$\frac{0,5}{RC}$	$\frac{1}{RC}$	$\frac{2}{RC}$	$\frac{5}{RC}$	$\frac{10}{RC}$	∞
U_2/U_1	0	0,0995	0,447	0,707	0,894	0,981	0,995	1



Rys. 4.113. Charakterystyka napięciowa filtru górnoprzepustowego z rys. 4.112

Uwaga. W filtrach przepuszczających pewien określony zakres częstotliwości stosuje się bardziej złożone układy RC lub RL, lub RLC. Dwa podstawowe rodzaje filtrów przedstawia rys. 4.114. Obliczenia dla tych filtrów znajdzie czytelnik w podręcznikach z zakresu techniki prądów szybkozmiennych.

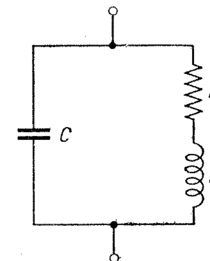


Rys. 4.114. Filtr jest szczególnym przypadkiem tzw. czwórnika (układu mającego dwa zaciski wejściowe i dwa wyjściowe). Podstawowe dwa typy czwórników (Π i T) przedstawiają schematy a) i b)

4.59. Obwód przedstawiony na rys. 4.115 zasilany jest prądem przemiennym. Obliczyć jego zawadę zespoloną Z i podać częstotliwość, przy której nastąpi rezonans (tzn. przy której zawada będzie rzeczywista).

Odpowiedź.
$$Z = \frac{1}{\frac{1}{R+j\omega L}+j\omega C} = \frac{\frac{R}{\omega^2 C^2} - j\frac{1}{\omega C}\left(R^2+\omega^2 L^2 - \frac{L}{C}\right)}{R^2+\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Dla częstotliwości rezonansowej $\omega = \omega_0$ znika część urojona: $R^2+\omega_0^2 L^2 - \frac{L}{C} = 0$, stąd $\omega_0 =$
$$= \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1-R^2\frac{C}{L}}.$$



Rys. 4.115. Obwód LC, w którym cewka ma opór omowy R; do zacisków obwodu dołączony jest generator prądu przemiennego, nie zaznaczony na rysunku

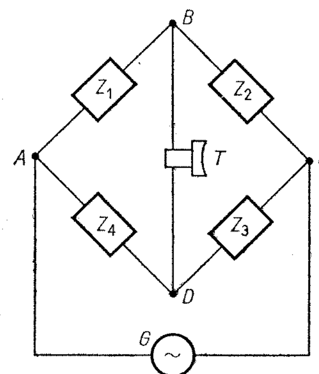
4.60. Pokazać, że wzór otrzymany w zagadnieniu 4.56 (rys. 4.109) jest szczególnym przypadkiem rozwiązania zagadnienia poprzedniego dla $L = 0$. Obliczyć wartość zawady Z oraz różnicę faz φ; podać jej znaczenie fizyczne; sporządzić diagram, analogiczny do diagramu z rys. 4.101.

Odpowiedź. $\frac{1}{Z} = \frac{1}{R}+\frac{1}{X_c}$; $Z = \frac{R(1-j\omega RC)}{1+(\omega RC)^2}$; $Z = \frac{R}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$; $\varphi = \operatorname{arc\,tg}(-\omega RC)$, gdzie φ jest kątem, o jaki napięcie spóźnia się w fazie w odniesieniu do prądu (gdy $R = \infty$, $\varphi = -90°$).

4.61. Rys. 4.116 przedstawia mostek pomiarowy dla prądu przemiennego, analogiczny do mostka Wheatstone'a (por. rys. 1.54b), zawierający cztery dowolne zawady: Z_1, Z_2, Z_3 i Z_4. Mostek jest zrównoważony, gdy w przekątni BD nie płynie prąd; sprawdzamy to zazwyczaj za pomocą słuchawki telefonicznej. Udowodnić, że dla mostka zrównoważonego słuszny jest związek:

$$Z_1 Z_3 = Z_2 Z_4. \tag{4.78}$$

Dobierając trzy zawady w ten sposób, by w przekątni BD nie płynął prąd, możemy znając ich wartość wyznaczyć zawadę czwartą. Na tej zasadzie oparte mostki służą do pomiarów oporu, indukcyjności i pojemności.



Rys. 4.116. Schemat mostka pomiarowego na prąd przemienny $Z_1 \ldots Z_4$ — zawady, z których jedna ma być zmierzona; G — generator; T — słuchawka telefoniczna

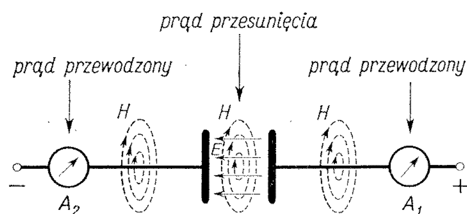
Odpowiedź. Należy zastosować wzory wyrażające prawo Ohma i prawo Kirchhoffa dla prądu przemiennego, analogicznie jak to zrobiliśmy dla prądu stałego w § 1.40.

Rozdział 5

FALE ELEKTROMAGNETYCZNE

A. Pierwsze równanie Maxwella

***§ 5.1. Zmiana pola elektrycznego wywołuje powstanie pola magnetycznego.** Przypuśćmy, że obwód elektryczny przerwaliśmy w jednym miejscu i włączyliśmy tam kondensator (rys. 5.1). Oczywiście w obwodzie tym nie będzie mógł już płynąć prąd elektryczny stały. Ale będzie mógł płynąć prąd chwilowy, np. podczas ładowania kondensatora.

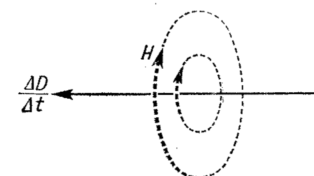


Rys. 5.1. Podczas ładowania kondensatora wytwarzają się linie sił pola magnetycznego, nie tylko dookoła prądu przewodzonego, lecz również wewnątrz kondensatora

Gdy jednak kondensator zostanie naładowany — prąd przestanie płynąć. Ten krótkotrwały prąd (tzw. ładujący) obserwowaliśmy już w doświadczeniach omówionych w §§ 2.1—2.3. Na rysunku 5.1 wskazują go dwa amperomierze A_1 i A_2, włączone przed i za kondensatorem. Skoro prąd d o p ł y w a do kondensatora i o d p ł y w a z kondensatora, to zjawisko to odbywa się tak, jak gdyby prąd p r z e p ł y w a ł również przez kondensator. Każdemu zapewne nasuwa się tu chęć zaprzeczenia: tak nie jest, gdyż wiemy dobrze, że prąd przez kondensator (przez dielektryki, przez próżnię) nie płynie. Jest to słuszne ale tylko do pewnego stopnia, z doświadczenia bowiem wiemy, że przez kondensator nie może płynąć prąd s t a ł y, t r w a ł y. Ale nie możemy na tej podstawie twierdzić, że przez kondensator nie płynie prąd w tych chwilach, gdy właśnie oba amperomierze A_1 i A_2 wskazują przepływ prądu.

Jak się przekonać o tym, czy w procesie ładowania kondensatora zjawisko odbywa się tylko tak, jak gdyby przez niego płynął prąd, czy też przez kondensator naprawdę prąd przepłynął? Istnieje na to sprawdzian; jest nim pole magnetyczne prądu. Przed kondensatorem i za kondensatorem wytwarzają się linie sił pola magnetycznego (rys. 5.1); otaczają one zawsze płynący prąd. Jeśli więc wytwarzają się także wewnątrz kondensatora, gdzie nie ma przewodnika z prądem, to powiemy, że przez kondensator płynie prąd elektryczny, który wprawdzie nie polega na przepływaniu elektronów, tak jak prąd w drucie, ma jednak właściwość wytwarzania pola magnetycznego.

Otóż liczne i bardzo pomysłowe doświadczenia przekonały fizyków, że istotnie dielektryk wewnątrz kondensatora, choćby najdoskonalszy, staje się źródłem linii magnetycznych, ale tylko wtedy, gdy kondensator ładuje się lub rozładowuje; innymi słowy wtedy, gdy wektor pola elektrycznego **D** wewnątrz dielektryka zwiększa swoje natężenie lub zmniejsza. Gdy **D** się zwiększa ($\Delta\mathbf{D}/\Delta t > 0$), tzn. gdy kondensator ładuje się, wytwarzają się linie o takim kierunku, jak na rys. 5.2, czyli o takim samym, jak dookoła zwykłego prądu w drucie (reguła kierunkowa śruby). Natomiast gdy **D** się zmniejsza ($\Delta\mathbf{D}/\Delta t < 0$), tzn. gdy kondensator rozładowuje się, kierunek linii jest przeciwny, a więc znów taki sam jak dookoła prądu rozładowania, płynącego w drutach połączonych



Rys. 5.2. Pole elektryczne **D** zmieniając natężenie wytwarza wirowe pole magnetyczne **H**

z kondensatorem. Możemy więc powiedzieć, że *pojawieniu się czy narastaniu pola elektrycznego towarzyszy tworzenie się wirowego pola magnetycznego; podobnie słabnięciu czy zanikaniu pola elektrycznego towarzyszy również wirowe pole magnetyczne, lecz przeciwnie skierowane niż poprzednie.*

Zatem narastanie lub ubywanie pola elektrycznego w dielektryku równoważne jest przepływaniu prądu elektrycznego, którego kierunek zgodny jest z kierunkiem wektora $\Delta\mathbf{D}/\Delta t$, tzn. zgodny jest z kierunkiem przyrostu $\Delta\mathbf{D}$ wektora **D**, a zatem zgodny jest z kierunkiem samego wektora **D**, gdy ten rośnie, lub jest mu przeciwny, gdy ten maleje. Prąd elektryczny płynący w dielektryku, dla odróżnienia od prądu przewodzonego (w drucie), został nazwany *prądem przesunięcia*, ponieważ polega na drobnym zresztą przesunięciu się elektronów pod wpływem pola elektrycznego E (patrz rys. 2.107). W dielektryku, jak wiemy, nie ma elektronów swobodnych, więc pole E nie może spowodować ich przepływu trwałego, może jednak wywołać chwilowe przesunięcie elektronów, nie wychodzące poza granice atomu.

Istnienie prądu przesunięcia przewidział M a x w e l l już około r. 1873, zanim je doświadczalnie stwierdzono. W przewidywaniach swoich Maxwell poszedł jeszcze dalej: przypuścił on mianowicie, że każda zmiana wektora **D** ($\Delta\mathbf{D}/\Delta t$), nawet jeśli odbywa się w doskonałej próżni ($\Delta\mathbf{D}_0/\Delta t$), wytwarza dookoła tego wektora wirowe pole magnetyczne. Zatem według Maxwella prąd przesunięcia istnieje nawet w próżni. Z takich założeń wyciągnął on drogą rozważań matematycznych wnioski tak śmiałe, że przyjęto je początkowo z nieufnością.

Przewidział on mianowicie istnienie fal elektromagnetycznych, a nawet określił ich prędkość. Dopiero w kilkanaście lat później (1888) doświadczenia Hertza potwierdziły w zupełności genialną koncepcję Maxwella.

§ 5.2. Czy potrzebna jest hipoteza o istnieniu „eteru kosmicznego"? Prąd przesunięcia wytwarzający się w dielektryku polega na przesunięciu się ładunków dielektryka, czyli na jego spolaryzowaniu (por. § 2.53). Fizycy ubiegłego stulecia sądzili, że prąd przesu-

nięcia może istnieć jedynie w jakimś ośrodku. Skoro więc istnieje w doskonałej próżni, to znaczy, że próżnię wypełnia jakiś niematerialny ośrodek; nazwano go „eterem kosmicznym".

Weźmy pod uwagę, że każde naczynie po wypompowaniu zeń powietrza musiałoby wypełniać eter, sądzimy więc, że musiał się w nim znajdować również przed wypompowaniem powietrza. Eter wypełniałby zatem wszelką przestrzeń, nawet zajętą przez materię. Ta okoliczność sprawiła fizykom wiele kłopotu. Powstało bowiem pytanie: czy materia będąc w ruchu unosi ze sobą eter, czy też przez niego przenika. Różne doświadczenia dały na to różną odpowiedź: jedne, że eter jest unoszony przez materię, inne — że nie. Ostatecznie teoria względności przekonała wszystkich, że jedynym wyjściem z kłopotu, który sprawił eter, jest porzucenie niefortunnej koncepcji o jego istnieniu.

§ **5.3. Gęstość prądu przesunięcia.** Niechaj w dielektryku lub w próżni panuje pole elektryczne E. Indukcję w tym polu wyraża wzór (2.11a) (§ 2.36); napiszmy go w postaci wektorowej:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}. \tag{5.1}$$

Stały współczynnik skalarny ε oznacza, że we wszystkich kierunkach ośrodek ma te same właściwości dielektryczne i że wektory indukcji i pola są zgodnie skierowane. Ośrodki takie nazywają się *izotropowe*. Ośrodkami izotropowymi są gazy i ciecze, a także niektóre ciała stałe, jak np. szkło. Ośrodkami *anizotropowymi*, które w różnych kierunkach mają różne właściwości (np. różne wartości ε) są niektóre kryształy. Przypomnijmy sobie, że miarą wektora indukcji $\mathbf{D}$ jest stosunek ładunku q indukowanego na „płytce próbnej", umieszczonej — w celu wykonania pomiaru — prostopadle do linii pola, do wielkości jej powierzchni S:

$$D = \frac{q}{S}$$

[por. § 2.29, wzór (2.9)]. Niech w ciągu czasu Δt natężenie pola zmieni się w pewnym kierunku o $\Delta\mathbf{E}$. Wówczas indukcja $\mathbf{D}$ zmieni się o

$$\Delta\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \Delta\mathbf{E}.$$

Zmiana ta sprawi, że w tym samym kierunku przesunie się ładunek Δq, przy czym

$$\Delta D = \frac{\Delta q}{S}. \tag{5.2}$$

Podzieliwszy to równanie przez czas Δt mamy

$$\frac{\Delta D}{\Delta t} = \frac{1}{S}\frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

Ale $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ jest to natężenie prądu i, jaki przepłynął przez powierzchnię S w dielektryku wskutek przesunięcia się elektronów (rys. 5.3), pod wpływem zmiany pola elektrycznego ΔE. Za Maxwellem zakładamy, że nawet w próżni przepływa prąd przesunięcia $\frac{\Delta D_0}{\Delta t}$

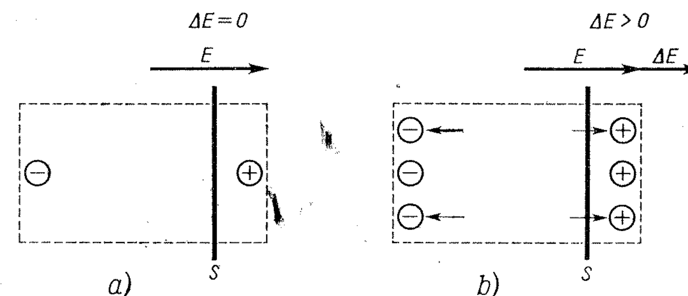
gdziekolwiek pojawi się zmiana pola elektrycznego $\Delta\mathbf{E}$. Słuszność tej hipotezy potwierdzają doświadczenia, zgodne z wynikami tej teorii. A więc przez powierzchnię S w dielektryku przepływa prąd przesunięcia

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} = S\frac{\Delta D}{\Delta t} = S\varepsilon_0\varepsilon\frac{\Delta E}{\Delta t}. \tag{5.3}$$

Natężenie prądu przesunięcia w próżni otrzymamy podstawiając $\varepsilon = 1$:

$$i = S\frac{\Delta D_0}{\Delta t} = S\varepsilon_0\frac{\Delta E}{\Delta t}.$$

S jest to element powierzchniowy w ośrodku (dielektryku lub próżni), prostopadły do kierunku $\Delta\mathbf{E}$. Jeśli jest on wystarczająco mały, wówczas natężenie prądu przesunięcia jest na całym elemencie powierzchni stałe. Stosunek $\frac{i}{S}$ jest miarą *gęstości prądu przesunięcia*.



Rys. 5.3. Istota prądu przesunięcia w ośrodku dielektrycznym. S — powierzchnia prostopadła do przyrostu pola elektrycznego $\Delta\mathbf{E}$ (w przekroju płaszczyzną rysunku); linią przerywaną zaznaczony pomyślany element objętościowy ośrodka. a) W polu elektrycznym $\mathbf{E}$ element jest spolaryzowany. b) Gdy pole powiększa się o $\Delta\mathbf{E}$, indukcja powiększa się, skutkiem czego przez powierzchnię S przepływają przesunięte ładunki; jest to prąd przesunięcia

Ponieważ prąd przesunięcia ma kierunek przyrostu (w ogóle zmiany) pola $\mathbf{E}$ zatem, podobnie jak $\Delta\mathbf{E}$, jest wektorem. Gęstość prądu przesunięcia wyrazi się przeto wzorem

$$\frac{\Delta\mathbf{D}}{\Delta t} = \varepsilon_0\varepsilon\frac{\Delta\mathbf{E}}{\Delta t}. \tag{5.4}$$

Przechodząc do granicy dla $\Delta t \to 0$ piszemy:

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \varepsilon_0\varepsilon\frac{d\mathbf{E}}{dt}. \tag{5.4a}$$

Pochodną wektora względem czasu oznacza się często kropką umieszczoną nad wektorem. W tak uproszczonej symbolice gęstość prądu przesunięcia przybiera postać

$$\dot{\mathbf{D}} = \varepsilon_0\varepsilon\dot{\mathbf{E}}. \tag{5.4b}$$

Jeśli wektory pola, **E** i **D**, zależą od współrzędnych przestrzennych (np. kartezjańskich: x, y, z), wówczas pod pochodną względem czasu należy rozumieć pochodną cząstkową:

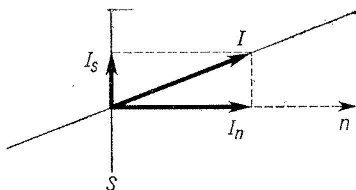
$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

§ **5.4. Natężenie prądu przewodzonego i prądu przesunięcia.** Jeśli ośrodek, w którym wytwarzamy pole elektryczne, nie jest doskonałym izolatorem, lecz w pewnym stopniu przewodzi prąd, wówczas w ośrodku tym stale płynie prąd przewodzony, niezależnie od prądu przesunięcia. Dla prądu przewodzonego określamy pojęcie gęstości prądu za pomocą tego samego stosunku $\frac{i}{S}$:

$$I = \frac{i}{S}. \tag{5.5}$$

Od razu widać z tego wzoru, że gęstość prądu mierzy się w A/m².

Jeśli powierzchnię S, przez którą przepływa prąd, wybierzemy nie prostopadłą do kierunku prądu, to wektor **I** można rozłożyć na dwie składowe: normalną i styczną do



Rys. 5.4. Rozkład wektora gęstości prądu **I** na składową styczną $\mathbf{I}_s$ i normalną $\mathbf{I}_n$ do powierzchni S

powierzchni (rys. 5.4). Ponieważ składowa styczna $\mathbf{I}_s$ nie przyczynia się do natężenia prądu płynącego przez powierzchnię S, pozostanie w tym względzie czynna jedynie składowa normalna $\mathbf{I}_n$. Zatem natężenie prądu będzie

$$i = I_n S. \tag{5.6}$$

Gdy natężenie prądu w różnych miejscach powierzchni S jest różne, należy powierzchnię podzielić siatką współrzędnych na wiele elementów ΔS; natężenie prądu płynącego przez każdy z tych elementów będzie

$$\Delta i = I_n \Delta S.$$

Przechodząc do granicy dla $\Delta S \to 0$, napiszemy symbolicznie

$$di = I_n dS$$

i zsumujemy di, czyli scałkujemy $I_n\, dS$, na całą powierzchnię S:

$$i = \iint I_n dS. \tag{5.6a}$$

Symbol podwójnej całki oznacza całkowanie rozciągnięte na powierzchnię S.

Dokładnie to samo rozumowanie odnosi się do prądu przesunięcia, zatem wzór (5.6a) można do tego prądu zastosować. Otrzymamy na natężenie prądu przesunięcia wyrażenie:

$$i = \iint \dot{D}_n dS, \tag{5.6b}$$

gdzie D_n oznacza składową normalną wektora indukcji, czyli przesunięcia, $\dot{D}_n$ oznacza składową normalną gęstości prądu przesunięcia, dS zaś jest elementem powierzchni S, na którą całka podwójna jest rozciągnięta.

§ **5.5. I równanie Maxwella w postaci całkowej.** Jeśli w ośrodku dielektrycznym istnieje stałe pole elektryczne, wówczas w dielektryku tym płynie jedynie prąd przewodzony, którego gęstość zależy od przewodności właściwej ośrodka. Jeśli jednak pole elektryczne zmienia się w czasie, w ośrodku pojawia się prąd przesunięcia. Jak już wiemy z § 5.1, zarówno prąd przewodzony, jak i prąd przesunięcia wytwarzają dookoła siebie pole magnetyczne. Natężenie jego, w układzie jednostek MKSA, jest takie, że siła magnetomotoryczna $\oint \mathbf{H}\, ds = \oint H_s\, ds$ równa jest natężeniu prądu i (patrz §§ 3.16 i 3.17). Całkowanie odbywa się wzdłuż konturu ograniczającego powierzchnię S, przez którą płynie (niekoniecznie prostopadle do niej) długa struga prądowa. Wyrażając to matematycznie przy pomocy wzorów (5.6a) i (5.6b) otrzymamy:

$$\oint H_s ds = \iint I_n dS + \iint \dot{D}_n dS. \tag{5.7}$$

Jest to I *równanie Maxwella w postaci całkowej.* Wszystkie wielkości występujące w tym równaniu wyrażone są w jednostkach MKSA. Poniżej napiszemy te jednostki pod równaniem i sprawdzimy, że istotnie obie strony tego równania mierzy się w amperach:

$$\oint H_s ds \;=\; \iint I_n dS \;+\; \frac{d}{dt} \iint D_n dS. \tag{5.7a}$$

$$\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right)(\mathrm{m}) \quad \left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}\right)(\mathrm{m}^2) \quad \left(\frac{1}{\mathrm{s}}\right)\left(\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}\right)(\mathrm{m}^2)$$

Jeśli ośrodek jest przewodzący, np. stanowi drut lub bryłę metalową, wówczas drugi wyraz po prawej stronie równania (5.7) można pominąć wobec wielkiej wartości wyrazu pierwszego:

$$\oint H_s ds = \iint I_n dS. \tag{5.7b}$$

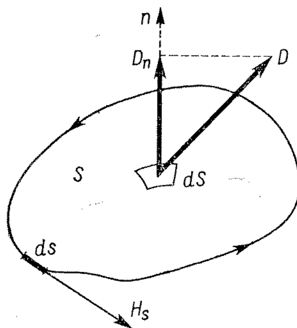
Mamy wówczas do czynienia ze zjawiskiem Oersteda. Jeśli natomiast ośrodek jest idealnym dielektrykiem (tzn. bez dostrzegalnej przewodności), wówczas I równanie Maxwella przybiera postać

$$\oint H_s ds = \iint \dot{D}_n dS. \tag{5.7c}$$

Objaśnia je rys. 5.5, gdzie pokazany jest wzajemny stosunek kierunku normalnej n do kierunku obiegu konturu S, wyrażony, jak łatwo stwierdzić regułą śruby prawoskrętnej. Jeśli wreszcie ośrodek jest próżnią ($\varepsilon = 1$), wówczas indukcja $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ i równanie

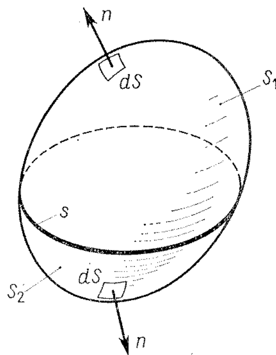
w sposób drastyczny wyraża koncepcję maxwellowską; nawet w próżni prąd przesunięcia, czyli $\varepsilon_0\dot{\mathbf{E}}$, wytwarza pole magnetyczne:

$$\oint H_s ds = \varepsilon_0 \iint \dot{E}_n dS. \tag{5.7d}$$



Rys. 5.5. Objaśnienie do I równania Maxwella w postaci całkowej (5.7c) dla ośrodka dielektrycznego. Gdy składowa normalna wektora indukcji elektrycznej $\mathbf{D}_n$ zmienia się wzdłuż konturu powierzchni S, powstaje siła magnetomotoryczna $\oint H_s ds$. Kierunek $\mathbf{H}_s$ odpowiadający wzrostowi $\mathbf{D}_n$ jest zgodny z kierunkiem obiegu konturu s; wyznacza go reguła śruby prawoskrętnej, posuwającej się wzdłuż normalnej n

§ 5.6. Prąd elektryczny, przewodzony i przesunięcia stanowią razem prąd zamknięty. Z I równania Maxwella wyciągniemy ważny wniosek. Zauważmy, że na konturze s (rys. 5.5) można rozciągnąć kilka różnych powierzchni S. Dla dwóch różnych powierz-



Rys. 5.6. Dwie powierzchnie S_1 i S_2 rozpięte na konturze s. dS — elementy powierzchni S_1 i S_2, n — normalne zewnętrzne do tych elementów

chni S_1 i S_2 napiszemy równanie (5.7), obierając normalną n w kierunku *na zewnątrz* objętości τ, jaką obie powierzchnie S_1 i S_2 zamykają (rys. 5.6). Będziemy mieli

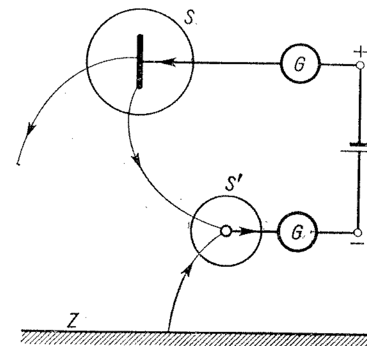
$$\oint H_s ds = \iint_{S_1} I_n dS + \iint_{S_1} \dot{D}_n dS,$$

$$-\oint H_s ds = \iint_{S_2} I_n dS + \iint_{S_2} \dot{D}_n dS.$$

Wskaźniki S_1 i S_2 pod podwójnymi całkami oznaczają, na jaką powierzchnię rozciągnięte są całki. Dodając te równania do siebie i oznaczając przez $\oint\oint$ całkę powierzchniową rozciągniętą na całą powierzchnię S_1+S_2 zamykającą objętość τ, otrzymamy:

$$\oint\oint I_n dS + \oint\oint \dot{D}_n dS = 0. \tag{5.8}$$

Związek ten wyraża, że prąd przewodzony i prąd przesunięcia stanowią razem prąd zamknięty. Nie może się bowiem zdarzyć, żeby prąd elektryczny skończył się w pewnym miejscu, np. na końcu przewodu lub na płycie kondensatora. Bo jeśli się zdarzy, że prąd przewodzony dochodzi do płyty kondensatora, to z tej samej płyty, w miarę gdy E rośnie,



Rys. 5.7. Do obszaru zamkniętego powierzchnią S i zawierającego płytę kondensatora lub jakikolwiek inny przewodnik, *wpływa* prąd przewodzony (w chwili ładowania płyty lub innego przewodnika). Dokładnie taki sam prąd przesunięcia *wypływa* z tegoż obszaru poprzez powierzchnię S. Podobne twierdzenie można wypowiedzieć dla powierzchni S zamykającej kulkę połączoną z ujemnym biegunem źródła prądu

płynie dalej prąd przesunięcia do drugiej płyty kondensatora (rys. 5.1), albo jeśli jej nie ma, do ziemi lub do otaczających przedmiotów z nią połączonych (rys. 5.7).

§ 5.7. Zasada zachowania ładunku. Równanie dodatkowe. Jeśli do pewnej objętości dielektryka τ wpływa prąd przewodzony, lecz z objętości tej jako prąd przewodzony nie odpływa, wówczas w objętości τ gromadzi się ładunek elektryczny. Oznaczmy gęstość, z jaką ładunek ten jest rozmieszczony w różnych elementach $d\tau$ tej objętości przez $\varrho(x, y, z)$. Wówczas cały ładunek elektryczny zawarty w objętości τ wyrazi się jako suma wszystkich ładunków $\varrho d\tau$. Sumowanie to, gdy $d\tau \to 0$, wyraża całka objętościowa, czyli potrójna, rozciągnięta na całą objętość τ: $\iiint \varrho d\tau$. Jeśli prąd przewodzony wypływa z tej objętości, zmniejsza ładunek, który już się w niej znajduje o $\frac{d}{dt}\iiint \varrho\, d\tau$ na jednostkę czasu. Wielkość $-\frac{d}{dt}\iiint \varrho d\tau$ jest dokładnie równa ładunkowi, który wypłynął z prądem w ciągu jednostki czasu. Stąd wynika równanie:

$$\oint\oint I_n dS = -\frac{d}{dt}\iiint \varrho d\tau, \tag{5.9}$$

wyrażające *zasadę zachowania ładunku elektrycznego.*

Jeśli całkę lewostronną tego równania podstawimy do równania (5.8), otrzymamy:

$$\frac{d}{dt}\left(\oint\oint D_n dS - \iiint \varrho\, d\tau\right) = 0,$$

co oznacza, że funkcja w nawiasie ma wartość stałą:

$$\oint\oint D_n dS - \iiint \varrho\, d\tau = \text{const}.$$

Jeśli ośrodek jest niespolaryzowany ($\mathbf{D} = 0$) i nienaelektryzowany ($\varrho = 0$), wartość stałej równa jest zeru i zerem musi pozostać dla $\mathbf{D}$ i ϱ różnych od zera. Stąd otrzymujemy ważne równanie *dodatkowe* do I równania Maxwella:

$$\oint\oint D_n dS = \iiint \varrho\, d\tau \tag{5.10}$$

(jest to twierdzenie Gaussa, por. Aneks, A12, str. 427).

Równanie to mówi, że całkowity strumień indukcji elektrycznej, przechodzący przez zamkniętą powłokę, równy jest ładunkowi elektrycznemu zawartemu wewnątrz powłoki. Jeśli ośrodek jest nienaelektryzowany, a więc wolny od swobodnych ładunków ($\varrho = 0$), wówczas, mimo że ośrodek może być spolaryzowany, całkowity strumień indukcji przez dowolną zamkniętą powierzchnię równy jest zeru:

$$\oint\!\!\oint D_n\, dS = 0\,. \tag{5.10a}$$

Jeśli strumień indukcji wchodzi do jakiejś zamkniętej powłoki, to strumień indukcji o takiej samej wartości musi ją opuścić.

§ **5.8. I równanie Maxwella w postaci różniczkowej.** I równanie Maxwella w postaci całkowej (5.7) stosuje się tylko do wypadku wąskiej i długiej strugi prądu. Rozciągnijmy więc całki prawostronne na bardzo mały element powierzchni ΔS, na którym I_n i D_n nie zmieniają się już w zależności od współrzędnych przestrzennych. Otrzymamy:

$$\oint H_s\, ds = I_n \Delta S + \dot{D}_n \Delta S\,. \tag{5.11}$$

Podzieliwszy obie strony tego równania przez ΔS, mamy:

$$\frac{\oint H_s\, ds}{\Delta S} = I_n + \dot{D}_n\,.$$

Przechodząc do granicy, gdy $\Delta S \to 0$, otrzymamy po lewej stronie wyrażenie, będące definicją składowej normalnej (do powierzchni ΔS) wektora, zwanego rotacją H, czyli $\mathrm{rot}_n \mathbf{H}$:

$$\mathrm{rot}_n \mathbf{H} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint H_s\, ds}{\Delta S}\,; \tag{5.12}$$

jest to więc granica, gdy $\Delta S \to 0$, stosunku siły magnetomotorycznej do powierzchni ΔS, przez którą prąd przepływa. Równanie (5.11) przybiera zatem postać:

$$\mathrm{rot}_n \mathbf{H} = I_n + \dot{D}_n\,.$$

Ponieważ równanie to stosuje się dla dowolnej powierzchni ΔS, a więc dla dowolnego kierunku normalnej n, możemy przeto napisać je w postaci wektorowej:

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{H} = \mathbf{I} + \dot{\mathbf{D}}\,. \tag{5.13}$$

Jest to I *równanie Maxwella w postaci różniczkowej*. Wyraża ono fundamentalną prawdę: rotacja pola magnetycznego, jaką wytwarza nieskończenie wąska struga prądu, równa jest gęstości prądu przewodzonego i prądu przesunięcia. Dla doskonałego dielektryka I równanie Maxwella na postać:

$$\mathit{rot}\, \mathbf{H} = \dot{\mathbf{D}} \tag{5.14}$$

albo

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \dot{\mathbf{E}}, \tag{5.14a}$$

zaś dla próżni:

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{H} = \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}\,. \tag{5.14b}$$

Dostrzegamy w tym równaniu śmiałą koncepcję Maxwella: wektor szybkości, z jaką się zmienia wektor pola elektrycznego $\left(\dot{\mathbf{E}} \equiv \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)$, równy jest rotacji pola magnetycznego, które dzięki zmianie pola elektrycznego powstaje. Dla przewodnika I równanie Maxwella ma postać

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{H} = \mathbf{I}\,. \tag{5.15}$$

Ponieważ $I = \frac{i}{S}$, gdzie S oznacza przekrój poprzeczny strugi prądu, zaś $i = \frac{U}{R} = \frac{US}{\varrho l}$, przeto $I = \frac{U}{\varrho l}$. Ale $\frac{U}{l}$ jest to natężenie pola elektrycznego, które panuje w przewodniku wytwarzając prąd: $\frac{U}{l} = E$, zatem $I = \frac{1}{\varrho} E$. Odwrotność oporności właściwej nazywamy przewodnictwem właściwym i oznaczamy literą $\varkappa$: $\frac{1}{\varrho} = \varkappa$. W ciele izotropowym kierunek prądu jest zgodny z kierunkiem pola elektrycznego, zatem związek $I = \varkappa E$ możemy napisać wektorowo:

$$\mathbf{I} = \varkappa \mathbf{E}\,. \tag{5.15a}$$

Dla przewodnika I równanie Maxwella przybiera postać:

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{H} = \varkappa \mathbf{E}\,. \tag{5.15b}$$

§ **5.9. Równanie dodatkowe wyrażone przy pomocy operatora div.** Podobnie, jak zastosowaliśmy I równanie Maxwella do nieskończenie małego elementu powierzchni ΔS, zastosujemy równanie dodatkowe do nieskończenie małego elementu objętości $\Delta\tau$. Element ten ma być tak mały, aby wewnątrz niego ϱ można było uważać praktycznie za niezależne od współrzędnych. Równanie (5.10) przybierze postać:

$$\oint\!\!\oint D_n\, dS = \varrho \Delta\tau\,,$$

albo

$$\frac{\oint\!\!\oint D_n\, dS}{\Delta\tau} = \varrho\,.$$

Gdy $\Delta\tau \to 0$, lewa strona tego równania dąży do granicy, która nosi nazwę *dywergencji wektora* **D** (tzn. „rozbieżności” wektora **D**, którego strumień przechodzi przez powierzchnię S, ograniczającą element objętościowy $\Delta\tau$); oznacza się ją symbolem div **D**:

$$\mathrm{div}\, \mathbf{D} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\oint\!\!\oint D_n\, dS}{\Delta\tau}\,. \tag{5.16}$$

Przy takiej definicji mamy:

$$\mathrm{div}\, \mathbf{D} = \varrho\,. \tag{5.17}$$

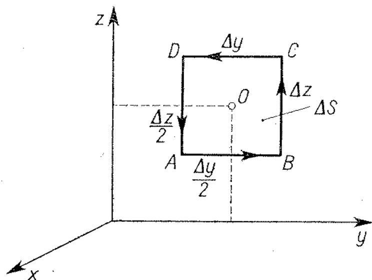
Dla ośrodka spolaryzowanego, lecz nienaelektryzowanego mamy:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0\,. \tag{5.17a}$$

Jak z powyższej definicji wynika, div **D** jest skalarem.

W obu ostatnich paragrafach poznaliśmy dwie operacje matematyczne, rot i div, określone wzorami (5.12) i (5.16). Symbole rot i div, które stosuje się do jakiegoś wektora (tutaj do wektora pola magnetycznego **H**) nazywają się *operatorami*. Mówimy, że operator działa na dany wektor lub daną funkcję. Symbole pochodnych $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{d}{dx}$ itp. są to też operatory działające na jakąś funkcję. Działanie to zapisuje się *symbolicznie* jako mnożenie operatora przez funkcję, na którą operator działa. Z definicji operatorów rot i div wynika, że są to operatory różniczkowe, które dadzą się wyrazić za pomocą pochodnych wektorów, na które działają. Pierwszy z nich jest wektorem, drugi — skalarem. W następnych dwóch paragrafach zajmiemy się wyrażeniem tych operatorów w postaci różniczkowej.

§ 5.10. Różniczkowa postać operatora rot. Operator rot wyrazimy we współrzędnych prostokątnych Kartezjusza. Rys. 5.8 przedstawia sytuację, w której element powierzchniowy ΔS jest małym prostokątem $ABCD$ leżącym w płaszczyźnie yz układu współrzędnych (x, y, z). Boki jego o długości Δy i Δz są równoległe do osi y i z. Dodatnim



Rys. 5.8. Prostokątny kontur $ABCDA$ służący do obliczenia $\text{rot}_x\mathbf{H}$ w układzie Kartezjusza

kierunkiem obiegu wzdłuż konturu jest kierunek $ABCDA$, zatem normalna do elementu ΔS ma kierunek dodatni osi x. Obliczmy więc składową wzdłuż osi x rotacji dowolnego wektora **H**, nie uwidocznionego na rysunku. Zgodnie ze wzorem (5.12), mamy:

$$\text{rot}_x \mathbf{H} = \lim_{\Delta y,\, \Delta z \to 0} \frac{\oint H_s\, ds}{\Delta y\, \Delta z}\,.$$

Obliczmy teraz $\oint H_s\, ds$. Wzdłuż boków AB i CD składową styczną wektora **H** jest H_y, natomiast wzdłuż boków BC i DA składową styczną wektora **H** jest H_z. Obie składowe H_y i H_z są funkcjami współrzędnych y i z. Jeśli ich wartości H_y i H_z odnoszą się do środkowego punktu 0 (x, y) prostokąta ΔS, to wzdłuż boków tego prostokąta wartości składowych wektora **H** będą nieco różne. Mianowicie składowa H_y, gdy przejdziemy ze środka prostokąta na bok AB, przesuwając się o $\frac{\Delta z}{2}$, zmieni się o $\frac{\partial H_y}{\partial z}\left(-\frac{\Delta z}{2}\right)$, natomiast gdy przejdziemy na bok CD, zmieni się o $\frac{\partial H_y}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}$. Podobnie składowa H_z: na boku BC będzie

miała wartość powiększoną o $\frac{\partial H_z}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}$, zaś na boku DA — o tyle samo pomniejszoną. W rezultacie całka liniowa wzdłuż konturu zamkniętego wyrazi się wzorem:

$$\oint H_s\, ds = \int_A^B H_s\, ds + \int_B^C H_s\, ds + \int_C^D H_s\, ds + \int_D^A H_s\, ds = \left(H_y - \frac{\partial H_y}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta y + \left(H_z + \frac{\partial H_z}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta z +$$
$$-\left(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta y - \left(H_z - \frac{\partial H_z}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta z = -\frac{\partial H_y}{\partial z}\Delta z \Delta y + \frac{\partial H_z}{\partial y}\Delta y\, \Delta z\,,$$

zatem

$$\text{rot}_x \mathbf{H} = \lim_{\Delta y \Delta z \to 0} \frac{\oint H_s\, ds}{\Delta y\, \Delta z} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\,.$$

Podobnie znajdziemy składowe y i z rotacji:

$$\text{rot}_y \mathbf{H} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\,,$$
$$\text{rot}_z \mathbf{H} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\,.$$

Obliczyliśmy więc trzy składowe wektora rot **H**. Każdy wektor **A**, którego składowe są A_x, A_y, A_z, można przedstawić, jako sumę wektorową jego wektorów składowych. Oznaczając więc wektory jednostkowe wzdłuż osi x, y i z jako **i**, **j**, **k** możemy napisać: $\mathbf{A} = \mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z$. W ten ogólnie przyjęty sposób wyrazimy rot **H**:

$$\text{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right). \tag{5.18}$$

Łatwiej nam będzie zapamiętać ten wzór, jeśli posłużymy się pojęciem iloczynu wektorowego dwóch wektorów. Jeśli dane są dwa wektory **A** i **B**:

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z\,,$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{i}B_x + \mathbf{j}B_y + \mathbf{k}B_z\,,$$

wówczas iloczyn wektorowy $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ jest to wektor, którego składowe znajdziemy z wyznacznika (por. Aneks, A 4, str. 425):

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} =$$
$$= \mathbf{i}(A_y B_z - A_z B_y) + \mathbf{j}(A_z B_x - A_x B_z) + \mathbf{k}(A_x B_y - A_y B_x)\,.$$

Porównując wzór ten ze wzorem (5.18) spostrzeżemy, że rot **H** da się przedstawić w postaci iloczynu wektorowego symbolicznego wektora o składowych $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ i $\frac{\partial}{\partial z}$ oraz wektora **H**. Ten symboliczny wektor nazywa się *operatorem nabla* i oznacza się symbolem „nabla" ∇:

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\,. \tag{5.19}$$

Jeśli pomnożymy go wektorowo przez wektor **H**:

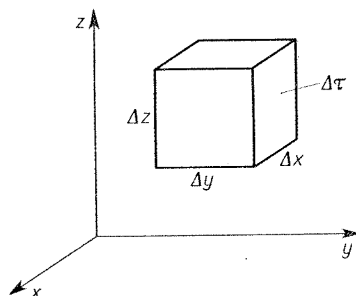
$$\mathbf{H} = \mathbf{i}H_x + \mathbf{j}H_y + \mathbf{k}H_z,$$

otrzymamy rot **H**:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}, \qquad (5.20)$$

a to, jak łatwo sprawdzić, jest identyczne ze wzorem (5.18).

§ 5.11. Różniczkowa postać operatora div. Zastosujemy definicję operatora div (5.16) do elementarnej objętości $\Delta\tau$ mającej postać prostopadłościanu o krawędziach Δx, Δy, Δz (rys. 5.9). Jeśli element $\Delta\tau$ znajdzie się w polu wektora **D**, to przez wszystkie powierzchnie ograniczające go przepływa strumień wektora **D**. Strumień ten, w myśl definicji (5.16), wynosi $\oint\oint D_n\,dS$. Obliczymy go w następujący sposób. Przez obie ściany prostopadłe do osi x, każda o powierzchni $\Delta y \Delta z$, przepływają strumienie o przeciwnych znakach, gdyż jeden z nich płynie przeciw normalnej, drugi — w kierunku normalnej. Jedynie w wypadku pola jednorodnego strumienie te są sobie równe. Na ogół jednak tak nie jest. Jeśli składowa normalna na jednej ścianie ma wartość D_x, to na drugiej ścianie wartość jej wynosi $D_x + \frac{\partial D_x}{\partial x}\Delta x$. Przyrost składowej x indukcji **D** na odcinku Δx wynosi $\frac{\partial D_x}{\partial x}\Delta x$ (przyrost ten może być, oczywiście, zarówno dodatni, jak i ujemny). Przyrost strumienia wektora **D** wyniesie zatem



Rys. 5.9. Prostopadłościan, jako element objętości $\Delta\tau = \Delta x \Delta y \Delta z$, służący do obliczenia div **D** w układzie Kartezjusza

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z.$$

Podobnie obliczymy, że wzdłuż osi y przyrost strumienia wektora **D** wyniesie

$$\frac{\partial D_y}{\partial y}\Delta y\,\Delta z\,\Delta x,$$

zaś wzdłuż osi z:

$$\frac{\partial D_z}{\partial z}\Delta z\,\Delta x\,\Delta y.$$

Suma tych przyrostów strumienia będzie całkowitym strumieniem wektora **D**, wypływającym z elementu objętości $\Delta\tau = \Delta x\,\Delta y\,\Delta z$. Wynosi ona

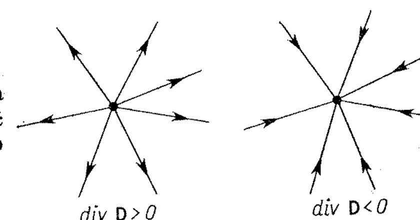
$$\left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\Delta x\,\Delta y\,\Delta z.$$

Podzielona przez $\Delta\tau$ daje wyrażenie od $\Delta\tau$ niezależne. Zgodnie z definicją (5.16) mamy więc:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}. \qquad (5.21)$$

Załóżmy, że div $\mathbf{D} = 0$. W tym przypadku pole może być na ogół niejednorodne, lecz w rozważanym elemencie objętościowym nieskończenie małym $d\tau$ nie ma *źródła* pola wektora **D**. Jeśli natomiast div $\mathbf{D} \neq 0$, wówczas w elemencie objętościowym $d\tau$ istnieje

Rys. 5.10. Linie pola wektora **D** w wypadku źródła dodatniego i ujemnego. Na to pole może nakładać się inne pole bezźródłowe; nie zmieni to wartości div **D**



źródło pola wektora **D**. Źródło to jest dodatnie, jeśli div $\mathbf{D} > 0$ — wtedy linie pola wypływają z elementu $d\tau$, albo jest ujemne, jeśli div $\mathbf{D} < 0$ — wtedy linie sił wpływają do elementu $d\tau$ (rys. 5.10). Równanie (5.17)

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \varrho(x, y, z)$$

oznacza, że w przestrzeni znajdują się źródła wektora **D** rozmieszczone z gęstością $\varrho(x, y, z)$, będącą funkcją współrzędnych przestrzennych.

Jak widać ze wzoru (5.21), operator div można wyrazić za pomocą operatora nabla (5.19). Przypomnijmy sobie, że iloczyn skalarny dwóch wektorów,

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z,$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{i}B_x + \mathbf{j}B_y + \mathbf{k}B_z,$$

jest skalarem, którego wartość wynosi (por. Aneks, A 3, str. 425)

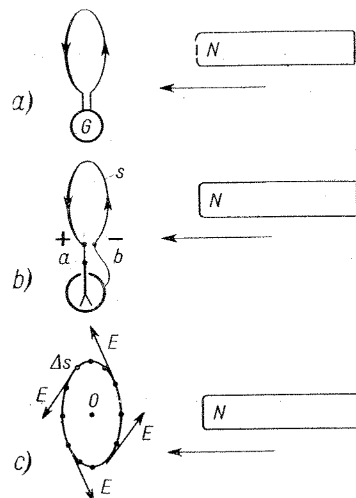
$$\mathbf{AB} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z.$$

Od razu więc widać, że operator div jest iloczynem skalarnym operatora nabla i danego wektora:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \nabla\mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}. \qquad (5.22)$$

B. Drugie równanie Maxwella

***§ 5.12. Zmiana pola magnetycznego wywołuje powstanie pola elektrycznego.** Najprostszym chyba doświadczeniem z dziedziny indukcji magnetoelektrycznej jest doświadczenie, w którym biegun magnesu zbliża się do zwoju drutu lub od niego oddala (rys. 5.11a). W zwoju powstaje wówczas prąd indukcyjny. Jest on objawem tego, że na końcach zwoju *ab* wytwarza się różnica potencjałów $U_a - U_b$ (rys. 5.11b); nazywa się ona siłą elektromotoryczną indukcji (w rozdziale 4 oznaczaliśmy ją literą *E*, obecnie poniechamy tego, gdyż literą tą oznaczamy natężenie pola elektrycznego). Prawo indukcji wykryte przez Faradaya głosi, że siła elektromotoryczna indukcji jest równa szybkości zmiany strumienia indukcji $\Delta\Phi/\Delta t$ [por. wzór (4.1), § 4.2]; nie zależy ona zupełnie od



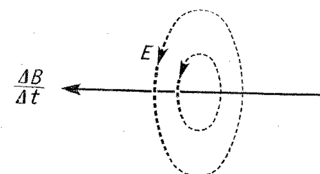
Rys. 5.11. Zmiana natężenia pola magnetycznego wywołuje powstanie a) prądu elektrycznego, b) różnicy potencjałów, c) wirowego pola elektrycznego. Do doświadczenia wyobrażonego na rys. b) stosować można elektrometr nitkowy w połączeniu heterostatycznym (rys. 2.100)

żadnych właściwości przewodnika, w którym wywołuje prąd; w szczególności nie zależy od jego oporu. Jeśli opór obwodu rośnie nieograniczenie, to chociaż natężenie prądu indukcyjnego zbliża się do zera, siła elektromotoryczna pozostaje jednak ta sama, o czym przekonać nas może dostatecznie czuły elektrometr (rys. 5.11b).

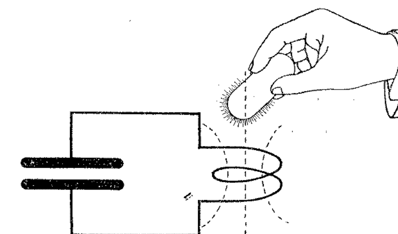
Wyobraźmy sobie, że obwód *s* został podzielony na bardzo wiele małych odcinków Δs (rys. 5.11c). Różnica potencjałów między punktami *a* i *b* jest sumą napięć na poszczególnych odcinkach; napięcie zaś na każdym odcinku wynosi $E_s \Delta s$, gdzie E_s jest składową styczną natężenia pola elektrycznego *E* panującego w miejscu, gdzie jest odcinek Δs. Zatem siła elektromotoryczna indukcji $= \Sigma(E_s \Delta s)$, albo jeśli $\Delta s \to 0$, wyraża się całką rozciągniętą na cały obwód zamknięty: $\oint E_s\, ds$. Maxwell zrozumiał pierwszy, że istotą indukcji magnetoelektrycznej jest wytwarzanie wirowego pola elektrycznego *E*, które jeśli trafi na przewodnik, wywołuje zjawisko wtórne, mianowicie przesuwa w nim elektrony wytwarzając na jego końcach różnicę potencjałów; w przypadku gdy przewodnik tworzy obwód zamknięty, pole elektryczne wywołuje w nim ciągły wirowy przepływ elektronów, a więc prąd. Przewodnik nie jest więc w zjawisku indukcji niczym istotnym,

ułatwia jedynie jego obserwację. Chociaż opór przewodnika może dążyć do nieskończoności, to jednak $\oint E_s\, ds$, a zatem i natężenie *E* wytworzonego pola elektrycznego pozostaje to samo, byle tylko szybkość zmiany strumienia wektora magnetycznego pozostała niezmieniona. Maxwell przypuszczał, że i w doskonałej próżni ruch magnesu jak na rys. 5.11c wywołuje powstanie wirowego pola elektrycznego. Doniosłe konsekwencje jego teorii (fale elektromagnetyczne — por. § 5.18), potwierdzone doświadczalnie przez Hertza, przemawiają za słusznością jego poglądów.

Ruch magnesu uwidoczniony na rys. 5.11 nie jest w tym zjawisku rzeczą istotną. Istotna jest zmiana strumienia indukcji magnetycznej. Gdy zbliżamy biegun magnesu do punktu *O*, wówczas w tym miejscu rośnie wektor magnetyczny **B**. Wzrost **B** wywołuje zatem powstanie wiru wektora elektrycznego **E** o kierunku znanym już z poprzednich doświadczeń, a wyznaczonym za pomocą reguły Lenza. Ten sam kierunek wygodniej może będzie określać za pomocą reguły „śruby lewoskrętnej", którą ilustruje rys. 5.12; jeśli śrubę o gwincie lewoskrętnym wkręcać wzdłuż kierunku przyrostu wektora magne-



Rys. 5.12. Pole magnetyczne **B** zmieniając natężenie wytwarza wirowe pole elektryczne, którego kierunek określa reguła śruby lewoskrętnej



Rys. 5.13. W szybkoprzemiennym polu magnetycznym wytwarza się pole elektryczne, które powoduje jarzenie się gazu w rurce próżniowej

tycznego, to kierunek jej obrotu wskazuje kierunek linii sił pola elektrycznego. Reasumując to możemy powiedzieć analogicznie do tego, co powiedzieliśmy w paragrafie poprzednim: *pojawianiu się czy narastaniu pola magnetycznego towarzyszy tworzenie się wirowego pola elektrycznego*; *podobnie słabnięciu czy zanikaniu pola magnetycznego towarzyszy również wirowe pole elektryczne, lecz przeciwnie skierowane niż poprzednie.*

Prawo indukcji, które wyraża wzór (4.1) (§ 4.2), możemy obecnie napisać w postaci uogólnionej przez Maxwella

$$\oint E_s\, ds = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \tag{5.23}$$

Widzimy stąd, że im szybciej zmienia się strumień indukcji magnetycznej Φ, a zatem i wektor **H**, tym silniejsze wytworzy dookoła pole elektryczne. Przy dość szybkich zmianach **H** pole elektryczne może dojść do takiej wartości, że będzie w stanie zjonizować gaz w rurze próżniowej. Do obwodu, w którym odbywają się drgania elektryczne o częstotliwości około 10^8 Hz, zbliżamy neonówkę zwykłą lub nawet rurkę neonową bezelektrodową. Gaz w rurze jarzy się. Pokazuje to schematycznie rys. 5.13; do praktycznego zrealizowania takiego obwodu można zastosować transformator Tesli (rys. 4.91), z którego usuwamy uzwojenie wtórne. Zamiast uzwojenia wtórnego zbliżamy rurkę lub

bańkę z rozrzedzonym neonem, w którym powstaje pole elektryczne wirowe i pobudza gaz do świecenia.

§ 5.13. II równanie Maxwella w postaci całkowej. W prawie indukcji Faradaya, które wyraziliśmy wzorem (5.23), lewa strona oznacza siłę elektromotoryczną indukcji, powstającą wzdłuż konturu zamkniętego s, przez który przechodzi strumień indukcji magnetycznej Φ, zmieniający się w czasie. Ściśle mówiąc strumień Φ przechodzi przez dowolną powierzchnię S rozpiętą na konturze s. Przez każdy element dS powierzchni S przechodzi strumień $B_n\, dS$; wobec tego strumień przechodzący przez całą powierzchnię S wyrazi się jako całka powierzchniowa

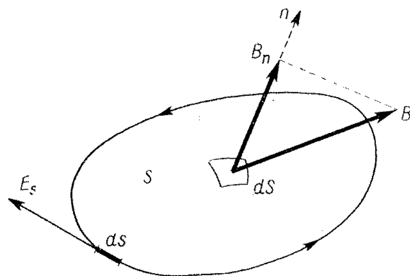
$$\Phi = \iint B_n dS,$$

rozciągnięta na powierzchnię S. Wzór (5.23), wyrażający uogólnione prawo Faradaya, przybierze zatem postać (po przejściu do granicy $\Delta t \to 0$):

$$\oint E_s dS = -\frac{d}{dt} \iint B_n \quad dS. \tag{5.24}$$

$$\left(\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right)(\mathrm{m}) \quad \left(\frac{1}{\mathrm{s}}\right) \left(\frac{\mathrm{V \cdot s}}{\mathrm{m}^2}\right)(\mathrm{m}^2)$$

Jest to II *równanie Maxwella w postaci całkowej*. Pod równaniem wypisane są jednostki w układzie MKSA. Widzimy, że obie strony równania wyrażone są w woltach.



Rys. 5.14. Objaśnienie do II równania Maxwella w postaci całkowej. Gdy składowa normalna wektora indukcji magnetycznej $\mathbf{B}_n$ zmienia się, wzdłuż konturu s powierzchni S powstaje siła elektromotoryczna — $\oint E\ ds$. Kierunek $\mathbf{E}_s$, odpowiadający wzrostowi $\mathbf{B}_n$, jest niezgodny z kierunkiem obiegu konturu s, który wyznacza reguła śruby prawoskrętnej przesuwającej się wzdłuż normalnej n. (Por. rys. 5.5, a także rys. 5.2 z rys. 5.12)

Należy podkreślić, że konturowi s powierzchni S przypisuje się dodatni kierunek obiegu określony w ten sposób, by śruba prawoskrętna, wkręcana zgodnie z kierunkiem obiegu, posuwała się wzdłuż dodatniego kierunku normalnej. Pokazuje to rys. 5.14. Znak minus w II równaniu Maxwella oznacza, że wektor $\mathbf{E}$ ma składową styczną $\mathbf{E}_s$ skierowaną w stronę przeciwną do obiegu krzywej s (por. rys. 5.12).

§ 5.14. Równanie dodatkowe do II równania Maxwella. Porównując drugie równanie Maxwella z pierwszym, spostrzeżemy brak symetrii: w równaniu drugim brak wyrazu odpowiadającego wyrazowi z prądem przewodzonym, jaki występuje w równaniu pierwszym. Pochodzi to stąd, że nie istnieje prąd magnetyczny przewodzony; brak jest bowiem swobodnych ładunków magnetycznych, nie ma zatem przewodników prądu magnetycznego. Dla ośrodka dielektrycznego i dla próżni oba równania Maxwella są dokładnie symetryczne.

Z tej samej przyczyny pojawi się niesymetria w równaniach dodatkowych do obu równań Maxwella. Jeśli bowiem przeprowadzimy dokładnie to samo rozumowanie dla

drugiego równania Maxwella, jakie przeprowadziliśmy w § 5.7 dla pierwszego równania, uzyskamy w wyniku równania analogiczne do równania (5.10), w którym po prawej stronie jest zero:

$$\oint\!\!\oint B_n dS = 0. \tag{5.25}$$

Równanie to głosi, że strumień indukcji magnetycznej, przechodzący przez powierzchnię zamkniętą zawsze jest równy zeru. Nie ma bowiem biegunów magnetycznych odosobnionych, są tylko *dipole magnetyczne.*

Równanie (5.25) jest dokładnie analogiczne do równania (5.10a), które stosuje się do dielektryków nienaelektryzowanych, a więc pozbawionych wolnych ładunków elektrycznych, lecz zawierających jedynie *dipole elektryczne.*

§ 5.15. II równanie Maxwella w postaci różniczkowej. Zupełnie tak samo jak w § 5.8, możemy równaniu (5.24) nadać postać różniczkową. Całkę powierzchniową tego równania należy rozciągnąć na tak mały element ΔS, aby wektor $\mathbf{B}_n$ we wszystkich punktach tego elementu był stały. Możemy tedy napisać:

$$\oint E_s ds = -\dot{B}_n \Delta S$$

albo

$$\frac{\oint E_s ds}{\Delta S} = -\dot{B}_n;$$

kropka oznacza teraz pochodną cząstkową względem czasu, gdyż wektor $\mathbf{B}_n$ zależy nie tylko od czasu, lecz i od współrzędnych. Gdy przejdziemy do granicy dla $\Delta S \to 0$, lewa strona przechodzi w składową normalną rotacji:

$$\mathrm{rot}_n \mathbf{E} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint E_s ds}{\Delta S}. \tag{5.26}$$

Zatem *II równanie Maxwella* przybiera postać *różniczkową* i wektorową:

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}, \tag{5.27}$$

gdzie

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}. \tag{5.28}$$

§ 5.16. Równanie dodatkowe w postaci operatorowej i różniczkowej. Równanie dodatkowe (5.25) przedstawimy przy pomocy różniczkowego operatora div. Dzieląc lewą stronę tego równania przez objętość elementu $\Delta\tau$, zamkniętego powierzchnią S i przechodząc do granicy $\Delta\tau \to 0$, otrzymamy wyrażenie na div $\mathbf{B}$:

$$\mathrm{div}\, \mathbf{B} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\oint\!\!\oint B_n dS}{\Delta\tau}. \tag{5.29}$$

Równanie dodatkowe (5.25) ma więc postać

$$\mathrm{div}\, \mathbf{B} = 0. \tag{5.30}$$

Głosi ono, że pole magnetyczne nie ma źródeł, tj. punktów, z których linie wektorów **B**, a zatem i **H** wychodzą, lub do których wchodzą. Linie te są bez początków i bez końca: pole magnetyczne jest wirowe.

Natomiast pole elektryczne jest tylko wtedy wirowe, gdy powstaje jako skutek zmiany **B** w czasie [patrz równanie (5.27)], natomiast jest źródłowe, jeśli wynika z obecności ładunków elektrycznych w ośrodku: div $\mathbf{D} = \varrho$ [patrz równanie (5.17)]. Stosując wyrażenie różniczkowe (5.19) dla operatora nabla możemy div **B** napisać w formie wyraźnie różniczkowej:

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = \nabla\mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}. \tag{5.31}$$

Zatem równanie dodatkowe (5.30) ma postać

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \tag{5.32}$$

§ 5.17. Równania Maxwella dla ośrodka dielektrycznego. Niechaj ośrodek będzie dielektryczny i nienaelektryzowany ($\varrho = 0$). Oba równania Maxwella wraz z równaniami dodatkowymi przybierają, jak już mówiliśmy w § 5.14, postać zupełnie symetryczną:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \dot{\mathbf{D}}, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\dot{\mathbf{B}}, \\ \operatorname{div}\mathbf{D} &= \operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.33}$$

W równaniach Maxwella występują dwie „stałe bezwzględne" ε_0 i μ_0 oraz dwie względne „stałe materiałowe" ε i μ, mianowicie w związkach, które wiążą wektory **D** i **E** oraz **B** i **H**:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}, \\ \mathbf{B} &= \mu_0\mu\mathbf{H}. \end{aligned}\right\} \tag{5.34}$$

Oba te związki stosuje się tylko do ośrodków izotropowych (gazy, ciecze i wiele ciał stałych).

Wartości stałych bezwzględnych, tj. przenikalności elektrycznej i przenikalności magnetycznej próżni, są (patrz §§ 2.34 i 3.25):

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{10^7}{4\pi c^2}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}, \\ \mu_0 &= 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}, \end{aligned}\right\} \tag{5.35}$$

gdzie $c = 3\cdot 10^8$ występuje tu, jako stała bezwymiarowa (lecz wyrażona w m/s jest identyczna z prędkością światła!)

Jeśli ośrodek dielektryczny jest nie tylko izotropowy, ale ponadto jednorodny, tzn. taki, którego przenikalność ε i μ nie zależą od współrzędnych przestrzennych, możemy ε i μ wynieść przed znak różniczkowania względem x, y i z, i otrzymamy:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon\operatorname{div}\mathbf{E},$$
$$\operatorname{div}\mathbf{B} = \mu_0\mu\operatorname{div}\mathbf{H}.$$

W rezultacie równania Maxwella przybierają postać:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\mu_0\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\mathbf{E} &= \operatorname{div}\mathbf{H} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.36}$$

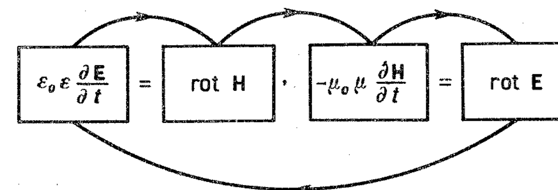
C. Fale elektromagnetyczne

§ 5.18. Konsekwencje teorii Maxwella. Przypatrzmy się równaniom Maxwella dla ośrodka dielektrycznego (izotropowego, jednorodnego i nienaelektryzowanego). Są to równania (5.36). Pierwsze z nich mówi, że wszelka *zmiana* w czasie pola elektrycznego **E** wywołuje rotację pola magnetycznego **H**, czyli wywołuje powstanie wirowego pola magnetycznego. Ale powstanie pola magnetycznego stanowi również zmianę jego natężenia, zaś zmiana ta $\left(\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\right)$, według drugiego równania wywołuje powstanie wirowego pola elektrycznego. Powstanie tego ostatniego stanowi znów *zmianę* **E** $\left(\text{czyli } \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)$, zaś ta, w myśl pierwszego równania wywołuje znów powstanie wirowego pola magnetycznego itd. Widzimy więc, że na podstawie równań Maxwella możemy przewidywać, że jakaś pierwsza zmiana pola **E** lub **H** wywołuje powstanie całego następstwa pól elektrycznych i magnetycznych, rodzących się jedne z drugich w postaci linii wirowych, bez początku i końca, tzn. bez źródeł (div $\mathbf{E}$ = div $\mathbf{H} = 0$).

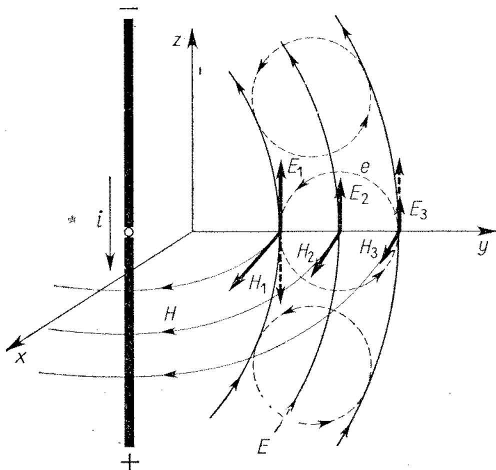
I tak genialna intuicja Maxwella doprowadziła go do ustanowienia jego równań, te zaś — do zrozumienia konieczności istnienia *fali elektromagnetycznej.*

Fala elektromagnetyczna wynika z całą ścisłością matematyczną z równań Maxwella. Stroną matematyczną tego zagadnienia zajmiemy się w części D i E tego rozdziału. Tymczasem omówmy mechanizm powstawania i strukturę fal elektromagnetycznych jakościowo, opierając się zresztą na równaniach Maxwella, a także zajmiemy się doświadczalnym ich wytworzeniem.

§ 5.19. Powstawanie fali elektromagnetycznej. W poprzednim paragrafie omówiliśmy ogólnikowo, jak powstaje fala elektromagnetyczna z pierwotnego „zaburzenia", tzn. z pierwotnej zmiany pola elektrycznego $\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$ lub magnetycznego $\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}$. Dzieje się to na podstawie równań Maxwella według następującego schematu:



Jak wytworzyć pierwsze zaburzenia i co się dzieje potem? Wytworzenie zaburzenia elektrycznego $\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)$ jest niezwykle łatwe. Spotykamy się z nim na każdym kroku. Wystarczy przecież wywołać pole elektryczne, np. elektryzując cokolwiek w jakikolwiek sposób, albo unicestwić pole elektryczne rozładowując jakikolwiek kondensator lub jakiekolwiek naładowane ciało do ziemi, czyli kondensator ciało-ziemia. A więc poczesanie włosów grzebieniem ze sztucznego tworzywa, dotknięcie futra, sukna itp. suchą ręką, potarcie koszuli nylonowej o ciało, zapalenie żarówki elektrycznej, uruchomienie dzwonka elektrycznego, uruchomienie silnika kolektorowego, jakiekolwiek rozładowanie iskrowe — wszystko to daje i powstanie, i zniknięcie pola elektrycznego. Nic tedy dziwnego, że wiele z tych „zaburzeń", jeśli urządzenia nie są zabezpieczone odpowiednimi filtrami, daje trzaski w odbiornikach radiowych.



Rys. 5.15. Narodziny fali elektromagnetycznej w pobliżu dipola iskrowego. Dipol jest w takiej fazie drgań, że prąd ładuje dolny pręt dodatnio. Prąd, a z nim pole magnetyczne, słabnie. Malejący wektor H_2 wywołuje wir pola elektrycznego e, który osłabia pole E_1, wzmacnia pole E_3. Słabnące pole E_1 wywołuje wir pola magnetycznego (nienarysowany), który osłabia pole magnetyczne z lewej strony, wzmacnia z prawej strony. W ten sposób energia pola **E** i **H** oddala się od dipola. Jest to fala elektromagnetyczna

A więc weźmy rozładowanie dwóch ciał naładowanych, jednego dodatnio, drugiego ujemnie, jako źródło pierwotnego zaburzenia. Ciała te mogą mieć zupełnie dowolną postać, ze względu jednak na tok późniejszego wykładu, niech mają postać dwóch prętów (rys. 5.15). Końce ich zbliżone są do siebie. W pewnej chwili przeskakuje między nimi iskra. Oba pręty połączone są obecnie dobrze przewodzącym pomostem (mianowicie zjonizowanym powietrzem). Jak wiemy, rozładowanie jest oscylacyjne: prąd płynie w ciągu bardzo krótkiego czasu raz w jedną, raz w drugą stronę, rozładowując i na przemian ładując kondensator, jaki stanowią oba pręty. W pewnej chwili kondensator rozładowuje się, lecz prąd dzięki indukcyjności płynie nadal, ładując oba pręty do przeciwnych znaków, po czym znów następuje rozładowanie itd. Oba te pręty, gdy połączone są iskrą, przez którą płynie prąd, stanowią dla prądu jeden przewodnik, którego końce ładowane są i rozładowywane na przemian: jest to *dipol elektryczny iskrowy*.

Weźmy pod uwagę pewien określony stan dipola, np. stan, w którym prąd po rozładowaniu dipola płynie nadal ładując dolny pręt dodatnio, górny ujemnie. Stan ten

przedstawiony jest właśnie na rys. 5.15. Oto powstaje pole elektryczne skierowane ku górze, a jednocześnie prostopadle do niego wytwarza się pole magnetyczne otaczające prąd. Z prawej strony rysunku pole magnetyczne skierowane jest ku nam, zaś z lewej — od nas. Gdyby nie wzajemne powiązania między obydwoma polami **E** i **H** (zmiana w czasie jednego powoduje zmianę w przestrzeni drugiego i odwrotnie), oba pola słabłyby szybko wraz z odległością od źródła. Ten fikcyjny stan ukazuje rys. 5.15. Pole elektryczne $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$ miałoby taki przebieg jak na rysunku, gdyby dipol nie ulegał rozładowaniu, zaś pole magnetyczne $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$, $\mathbf{H}_3$ miałoby przedstawiony przebieg, gdyby prąd płynął stale. W rzeczywistości jednak zmieniają się ładunki i prąd.

Rozważmy więc chwilę, gdy prąd płynie ku dolnemu prętowi, ładuje go dodatnio. Prąd początkowo silny, stale słabnie dążąc do zera w chwili naładowania prętów. Pole magnetyczne **H** słabnie w czasie. Wytwarza więc w każdym elemencie powierzchni prostopadłym do **H** wirowe pole elektryczne **e**. Gdy patrzymy na pole rozciągające się z prawej strony dipola, wir pola elektrycznego **e** będzie miał kierunek niezgodny z kierunkiem wskazówek zegara. Osłabia on pole elektryczne dipola w miejscach bliższych dipola ($\mathbf{E}_1$), wzmacnia zaś w miejscach bardziej oddalonych ($\mathbf{E}_3$). Osłabienie pola elektrycznego w czasie wywołuje w płaszczyźnie prostopadłej do dipola wir pola magnetycznego (nie zaznaczony na rysunku); wir ten znów osłabia pole magnetyczne w miejscach bliższych dipola, zaś wzmacnia w miejscach bardziej odległych itd. Oba pola, **E** i **H**, znikają w bliższych obszarach, przenoszą się coraz dalej i dalej. Powstaje fala pola elektrycznego i magnetycznego — *fala elektromagnetyczna* — przenosząca oba pola **E** i **H**, wzajemnie do siebie prostopadle, w kierunku do nich prostopadłym, na zewnątrz dipola, który był źródłem fali.

Z jaką prędkością porusza się fala elektromagnetyczna? Odpowiedź na to pytanie tkwi w równaniach Maxwella: prędkość fali elektromagnetycznej w próżni wynosi c m/s, czyli $3 \cdot 10^8$ m/s, albo 300 000 km/s; jest zatem identyczna z prędkością światła. Zajmiemy się tą sprawą w części E niniejszego rozdziału.

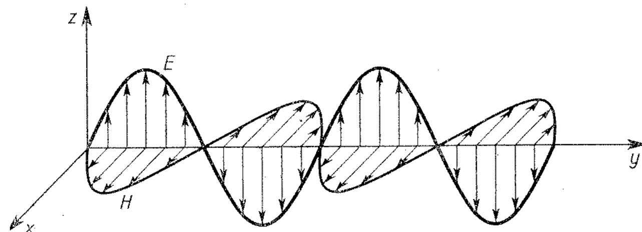
§ 5.20. Periodyczny ciąg fal. Tymczasem wróćmy do rozważanego dipola, którego rozładowanie jest oscylacyjne. Po naładowaniu obu prętów następuje ich rozładowanie i ponowne naładowanie do przeciwnych znaków. Po wzmocnieniu pola elektrycznego i magnetycznego na zewnątrz dipola nastąpi osłabienie i zniknięcie pól w danym miejscu z jednoczesnym przesunięciem się maksimów tych pól dalej od dipola. Następnie pojawią się w danym miejscu przestrzeni pola przeciwnie skierowane, które znów osłabną, a ich maksima przeniosą się dalej i dalej itp. Po pewnym czasie wytworzy się stan fali przedstawiony na rys. 5.16. Rysunek ten pokazuje nie linie sił, jak rys. 5.15, lecz rozkład wektorów pola wzdłuż osi y, prostopadłej do dipola, który ma kierunek osi z. Linie sił wokół dipola przedstawimy w § 5.24.

Rysunek 5.16 przypomina nam, że wektory **E** i **H** są wzajemnie prostopadłe do siebie oraz są prostopadłe do kierunku rozchodzenia się fali. Mówimy, że fala elektromagnetyczna jest *poprzeczna*.

Czy fale elektromagnetyczne przewidziane przez teorię Maxwella rzeczywiście istnieją? A jeśli tak, czy są to fale poprzeczne? Czy ich prędkość równa jest istotnie prędkości światła? Na takie pytania Henryk Hertz odpowiedział pomysłowymi i jakże wów-

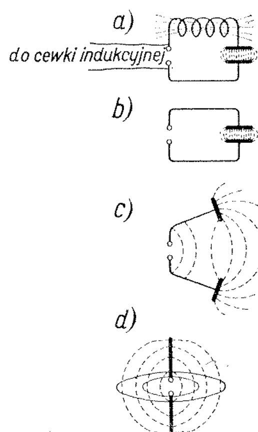
czas trudnymi doświadczeniami, wykonanymi około roku 1888. Wytworzył on fale elektromagnetyczne, zbadał ich właściwości, wytworzył także falę stojącą, zmierzył jej długość, a także prędkość fal i znalazł doskonałą zgodność z teorią Maxwella.

Obecnie zajmiemy się jego słynnymi doświadczeniami. Opiszę je tutaj w nowocześniejszym ujęciu, które będzie znacznie łatwiejsze do wykonania od historycznych doświadczeń Hertza. A gdy zapoznamy się ze zjawiskiem fal elektromagnetycznych od strony doświadczalnej, powrócimy do równań Maxwella i do teorii fal elektromagnetycznych, która już nie będzie dla nas tak bardzo abstrakcyjna.



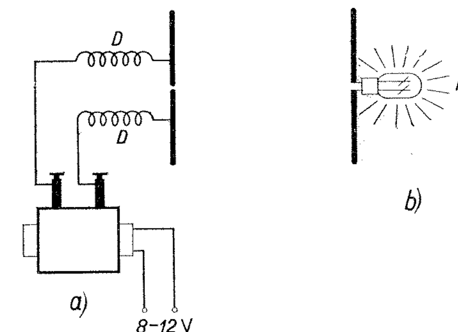
Rys. 5.16. Przebieg wektorów **E** i **H** w fali elektromagnetycznej wzdłuż kierunku rozchodzenia się fali. Stan ten odpowiada jednej chwili. W następnych chwilach obie krzywe przesuwają się razem w prawo. Zwróćmy uwagę na kierunki i zwroty wektorów **E**, **H** i osi *y*. Wynikają one z rys. 5.15

***§ 5.21. Drganie dipola elektrycznego.** W § 4.47 i 4.48 dowiedzieliśmy się, że obwód drgań elektrycznych składa się zasadniczo z kondensatora i cewki. Przypomnijmy sobie przyjrzawszy się rys. 4.85 (§ 4.47), jaki jest mechanizm drgań elektrycznych. Drgania te są tłumione, zanikające (patrz rys. 4.84c). Aby odbywały się stale, trzeba je ustawicznie wytwarzać na nowo. W tym celu umieszczamy w obwodzie iskiernik i dołączamy oba jego końce do cewki Ruhmkorffa jak na rys. 4.86. Podczas gdy w obwodzie odbywają się drgania, pole elektryczne w kondensatorze powstaje i zanika, podobnie jak i pole magnetyczne w cewce. Widzimy, że obwód drgający jest doskonałym źródłem zaburzeń elektrycznych i magnetycznych, z których mogą powstawać fale elektromagnetyczne, przewidziane przez Maxwella!



Rys. 5.17. Przeobrażenie się obwodu drgań zamkniętego w obwód otwarty

Rozumiał to dobrze Hertz i dlatego obwód drgający zastosował jako źródło fal, których istnienie chciał stwierdzić. Ponieważ według teorii Maxwella natężenie pól elektrycznego i magnetycznego, jakie wytwarza pierwotne zaburzenie, jest tym większe, im większa jest szybkość zmian pierwotnego pola, przeto Hertz dążył do tego, aby użyty przez niego obwód drgający miał jak największą częstotliwość. Poza tym duża częstotliwość zapewniała jeszcze inną korzyść, mianowicie małą długość fali, która powinna być niewielka, aby można ją było wygodnie zmierzyć w laboratorium. Aby ten cel osiągnąć, należy w obwodzie drgań zmniejszyć pojemność i indukcyjność do możliwych granic (patrz § 4.45). Wyobraźmy sobie, że zwykły obwód drgań (rys. 5.17a) zostaje pozbawiony cewki, wskutek czego pozostaje w nim tylko stosunkowo bardzo mała indukcyjność pozostałych przewodników (rys. 5.17b). W celu zmniejszenia pojemności oddalamy od siebie płyty kondensatora (rys. 5.17c), a następnie usuwamy je zupełnie (5.17d); pozostaje więc tylko pojemność dwóch prętów. W ten sposób dawny obwód drgający „zamknięty”, dający drgania o częstotliwości rzędu 1 MHz, zamienił się na obwód drgający „otwarty”, którego częstotliwość drgań jest znacznie większa, rzędu 100 MHz. W takim prostym układzie drgającym, jak wyobrażony na rys. 5.17d, poznajemy dipol iskrowy. Częstotliwość drgań dipola zależy od jego pojemności i indukcyjności, a zatem od jego rozmiarów: *im dipol jest mniejszy, tym częstotliwość jego drgań jest większa*. Oprócz tej korzyści dipol elektryczny przedstawia jeszcze jedną korzyść, mianowicie jego pole elektryczne i magnetyczne wypełnia dużą przestrzeń, podczas gdy w obwodzie zamkniętym oba pola są zlokalizowane, zamknięte: elektryczne — między okładkami kondensatora, magnetyczne — między zwojami cewki.

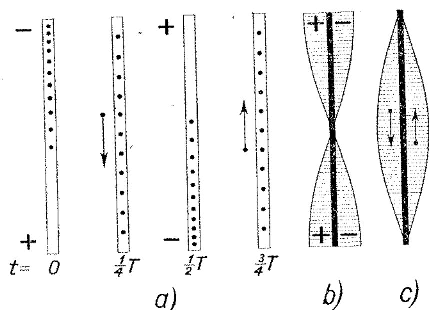


Rys. 5.18. a) Dipol iskrowy nadawczy (oscylator) składa się po prostu z pręta z przerwą iskrową w środku; *DD* — dławiki (kilkadziesiąt zwojów cienkiego drutu) nie przepuszczają prądów szybkoprzemiennych z dipola do przewodów, łączących go z cewką Ruhmkorffa lub z transformatorem; b) dipol iskrowy odbiorczy (rezonator) jest to pręt, w środku którego włączony jest jakikolwiek detektor prądu: tutaj lampka neonowa *N*, na rys. 5.20 — żarówki, a na rys. 5.21 — detektor kryształkowy z galwanometrem

Rysunek 5.18a i 5.20a przedstawiają praktyczne wykonanie i uruchomienie dipola. Jest to tak łatwe i proste, że poza rysunkiem nie wymaga bliższych objaśnień.

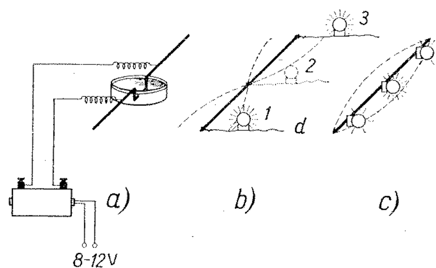
Jak się przekonać, że dipol drga? Najłatwiej za pomocą rezonansu. Rezonatorem musi być drugi taki sam dipol. Wskaźnikiem drgań niechaj będzie lampka neonowa włączona w środku dipola (rys. 5.18b). Gdy dipol-oscylator drga (iskrzy), wówczas w dipolu-rezonatorze lampka neonowaświeci. Świecą jej obie elektrody; jest to fakt, który dowodzi, że drganie elektryczne dipola polega na przepływaniu prądu wzdłuż dipola tam

i z powrotem. Przedstawia to poglądowo rys. 5.19. Ładunki zbierając się na końcach dipola wytwarzają na nich najwyższe potencjały na przemian dodatnie i ujemne. Natomiast najsilniejszy przepływ ładunków jest w środku dipola [patrz wykresy b) i c)]. Pouczają nas o tym dwa doświadczenia wyobrażone na rys. 5.20b i c. W pierwszym z tych doświadczeń małą żarówkę stykamy jednym biegunem z rezonatorem (można też to



Rys. 5.19. a) Poglądowy obraz drgań elektrycznych w dipolu (przerwy iskrowej nie ma); punkty oznaczają elektrony; b) wykres potencjału (węzeł w środku, strzałki na końcach); c) wykres prądu (węzły na końcach, strzałka w środku)

zrobić również z oscylatorem) i przesuwamy wzdłuż niego. Na końcach pręta (*1* i *3*), gdzie potencjał ma najsilniejsze drgania (strzałki potencjału), żarówka jasno świeci: prąd żarzący płynie wtedy od danego punktu pręta przez żarówkę do drucika *d*, który się ładuje i rozładowuje na przemian (jest to równoznaczne przepływaniu prądu prze-

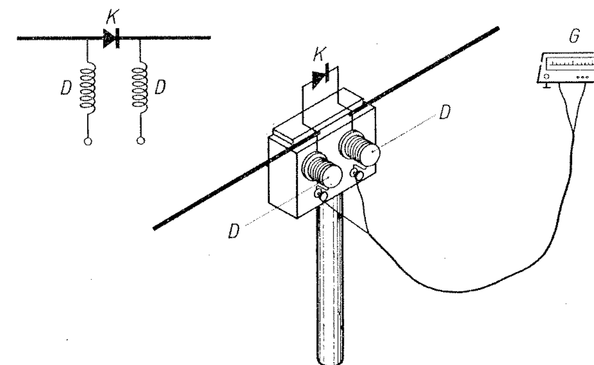


Rys. 5.20. a) Oscylator, z przerwą iskrową w nafcie (korzyść — wyższe napięcie, krótsza iskra). Jeszcze lepsze wyniki daje dipol niewygięty i całkowicie pogrążony w nafcie. b) Rezonator — zwykły pręt miedziany o długości kilkudziesięciu cm, ustawiony na podstawkach drewnianych, w odległości kilku lub kilkunastu cm od oscylatora. Żarówkę o małym prądzie żarzenia (0,04 A) dołącza się jednym biegunem do dipola: żarówka świeci w miejscach, gdzie są strzałki potencjału (*1* i *3*, patrz wykres b); prąd żarzący płynie wówczas przez pojemność drucik *d*—ziemia. c) Rezonator z trzema żarówkami, o małym prądzie żarzenia (patrz wykres c); środkowa żarówka świeci najsilniej, ujawniając tym samym strzałkę prądu

miennego przez pojemność drucik *d*—ziemia). W środku pręta (pozycja *2*) żarówka nie świeci, co dowodzi, iż w tym miejscu jest węzeł potencjału. Zupełnie odmienną sytuację przedstawia doświadczenie drugie (*c*), w którym żarówki włączone są szeregowo do rezonatora i świeceniem swoim ujawniają drgania prądu (a nie potencjału); żarówka środkowa świeci najsilniej, co dowodzi, że w środku dipola występuje strzałka prądu.

***§ 5.22 Promieniowanie elektromagnetyczne i jego właściwości.** Poprzednie doświadczenia pokazują, że oscylator drgając wypromieniowuje energię. Część tej energii odnajduje się w rezonatorze, gdzie zamienia się w znacznym stopniu na ciepło (w drucie, w żarówkach). O promieniowaniu tym na razie wiemy tylko tyle, że musi ono polegać na drganiach wektora elektrycznego i magnetycznego w przestrzeni otaczającej dipol drgający. Obecnie zapoznamy się z niektórymi właściwościami tego *promieniowania elektromagnetycznego*. Badać je będziemy, tak jak dotychczas, za pomocą zjawiska rezonansu; ale do wykrywania rezonansu musimy użyć detektora o większej czułości aniżeli żarówka.

Rysunek 5.21 przedstawia dipol-rezonator, który w środku zawiera detektor (prostownik) kryształkowy. Opór tego detektora jest większy dla prądu płynącego w jednym kierunku, zaś mniejszy dla prądu o przeciwnym kierunku.



Rys. 5.21. Widok i schemat rezonatora otwartego (dipola odbiorczego). K — detektor kryształkowy; *DD* — dławiki (kilkadziesiąt zwojów drutu w jednej warstwie, bez rdzenia); *G* — galwanometr zwierciadłowy o czułości ok. 10^{-9} (amperów na mm skali)

Dlatego prąd drgający w dipolu wytworzy na biegunach detektora większą różnicę potencjałów w jednym kierunku aniżeli w drugim. Tę różnicę potencjałów wykrywamy czułym galwanometrem, dołączonym do zacisków detektora poprzez dwa dławiki *DD*; mają one na celu niedopuszczenie prądów szybkoprzemiennych do przewodów łączących detektor z galwanometrem.

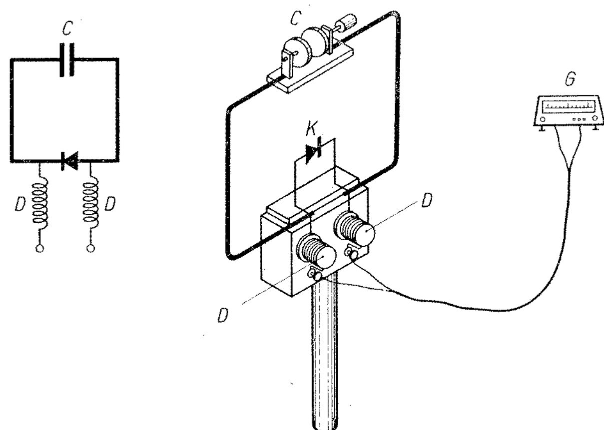
Oprócz powyższego rezonatora „otwartego" używać będziemy do niektórych doświadczeń rezonatora zamkniętego (rys. 5.22). Jest to obwód drgań niewielkich rozmiarów, w kształcie ramki z grubego drutu, zawierający kondensatorek regulowany *C* i detektor kryształkowy *K*. Pojemność kondensatora regulujemy tak, aby obwód odbiorczy był w rezonansie z dipolem nadawczym; wtedy galwanometr daje największe wychylenie.

Oto kilka właściwości promieniowania elektromagnetycznego:

1. Nieprzenikanie przez płyty metalowe. Między dwa dipole, nadawczy i odbiorczy, wstawiamy duży arkusz blachy. Wychylenie galwanometru spada do zera.

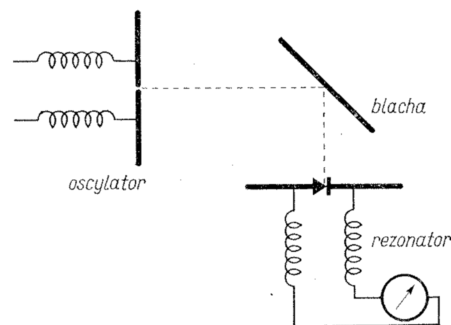
2. Odbijanie się od powierzchni metalowych. Oscylator i rezonator ustawiamy tak, jak to wskazuje rys. 5.23. W tym położeniu (dipole prostopadłe do siebie) galwanometr nie daje prawie żadnego wychylenia. Do dipola nadawczego — zbliżmy

ekran z blachy i obracajmy go dookoła osi pionowej. W położeniu zaznaczonym na rysunku wychylenie galwanometru jest największe. Promieniowanie elektromagnetyczne ulega zatem odbiciu; można przy tym stwierdzić, że — podobnie jak dla promieniowania świetlnego — kąt odbicia równy jest kątowi padania.



Rys. 5.22. Widok i schemat rezonatora zamkniętego. *C* — kondensatorek złożony z dwóch płytek, z których jedną przez przekręcanie można zbliżać do drugiej. *K*, *DD* i *G* — takie same, jak na rys. 5.21

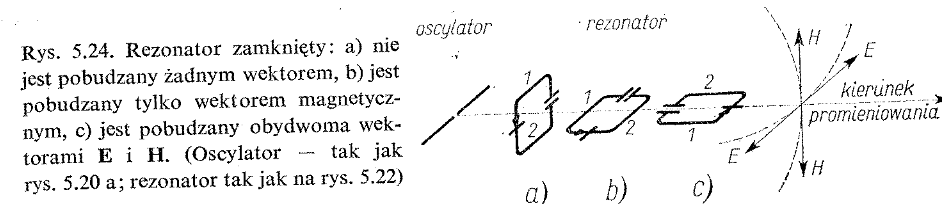
3. Załamanie w ciałach dielektrycznych. W drodze promieniowania elektromagnetycznego ustawiamy wielki pryzmat z parafiny lub smoły. Wychylenie galwanometru spada niemal do zera. Poszukujemy nowego położenia dipola odbiorczego, przy którym wychylenie galwanometru znów będzie największe. Stwierdzamy, że promieniowanie elektromagnetyczne załamało się ku podstawie pryzmatu, zupełnie tak jak promieniowanie świetlne w pryzmacie szklanym.



Rys. 5.23. Doświadczenie pokazujące odbijanie promieniowania elektromagnetycznego (widok z góry)

4. Wektor elektryczny w pobliżu płaszczyzny równikowej dipola drga równolegle do dipola. Płaszczyzną równikową dipola nazywamy płaszczyznę prostopadłą do dipola i przechodzącą przez jego środek. Już z poprzedniego paragrafu wiemy, że wektor elektryczny w pobliżu płaszczyzny równikowej jest równoległy do dipola. Wektor ten drgając wywoływać będzie w równoległym do niego dipolu odbiorczym ruch elektronów, a więc prąd, natomiast nie może wywołać prądu, jeśli dipol odbiorczy obrócić o kąt prosty. Istotnie, doświadczenie potwierdza to przewidywanie: jeśli dipole skrzyżować, prąd w rezonatorze spada do zera.

5. Wektor magnetyczny drga prostopadle do wektora elektrycznego. Aby się o tym przekonać, należy użyć rezonatora zamkniętego (rys. 5.22). Umieszczamy go w odległości 1—2 m od dipola nadawczego, w pobliżu jego płaszczyzny równikowej. Rezonatorowi nadajemy kilka położeń przedstawionych na rys. 5.24: a) Druty *1* i *2* obwodu rezonatora są równoległe do linii sił pola elektrycznego, a płaszczyzna obwodu jest prostopadła do kierunku promieniowania. Od razu widać, że pole elektryczne nie może wzbudzić drgań w rezonatorze, albowiem przesuwa w tym samym kierunku elektrony w drutach *1* i *2*, nie może więc wytworzyć różnicy potencjałów na zaciskach detektora. Drgania mogłyby zatem być wzbudzone tylko przez pole magnetyczne. Ale galwanometr w tym położeniu wskazuje 0. Zatem wektor magnetyczny jest styczny do płaszczyzny rezonatora (strumień indukcji = 0). b) Obróćmy rezonator o 90° dookoła osi przechodzącej przez detektor i kondensator; rezonator znalazł się teraz w płaszczyźnie „południkowej" oscylatora. Wektor elektryczny, z tych samych powodów co poprzednio, jest nadal nieczynny. A jednak galwanometr pokazuje wychylenie, które się zmniejsza, jeśli obwód wychylić z płaszczyzny południkowej. Stąd wniosek, że wektor magnetyczny **H** drga prostopadle do płaszczyzny południkowej, gdyż strumień indukcji przechodzący przez obwód rezonatora w położeniu b) jest największy. Wobec tego linie sił pola magnetycznego i elektrycznego są wzajemnie prostopadłe oraz są prostopadłe do kierunku promieniowania. c) Dodajmy do tego, że jeśli z położenia b) obrócimy rezonator o 90° dookoła wektora **H** jako osi obrotu, wówczas drgania, jak poprzednio, pobudza wektor magnetyczny, ale ponadto czynny jest jeszcze wektor elektryczny; przesuwa on bowiem elektrony wzdłuż drutu zawierającego detektor, wytwarzając na jego zaciskach różnicę potencjałów. W tym położeniu galwanometr daje jeszcze silniejsze wychylenie niż w położeniu poprzednim (zjawisko to jest bardziej złożone niż poprzednie i omawiać go bliżej nie będziemy). Zagadnienie. Jak ustawiać rezonator zamknięty, aby czynny był tylko wektor elektryczny?

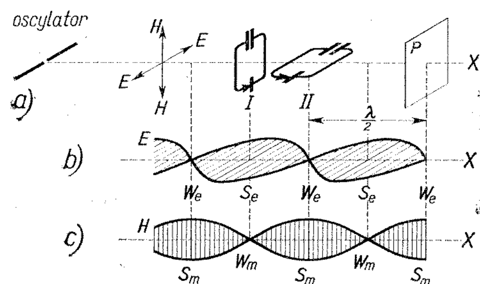


Rys. 5.24. Rezonator zamknięty: a) nie jest pobudzany żadnym wektorem, b) jest pobudzany tylko wektorem magnetycznym, c) jest pobudzany obydwoma wektorami **E** i **H**. (Oscylator — tak jak rys. 5.20 a; rezonator tak jak na rys. 5.22)

***§ 5.23. Promieniowanie elektromagnetyczne jest natury falowej.** Doświadczenia opisane w poprzednim paragrafie pozwoliły nam poznać pewne właściwości promieniowania elektromagnetycznego, lecz nie dostarczyły nam jeszcze przekonywającego dowodu na to, że oscylator wypromieniowuje *fale elektromagnetyczne*, biegnące ze skończoną prędkością, jak to wynika z teorii Maxwella. Hertz zrozumiał, że dowód na falową naturę

promieniowania elektromagnetycznego zdobędzie wtedy, jeśli uda mu się doprowadzić promieniowanie elektromagnetyczne do *interferencji*. Rzeczywiście udało mu się uzyskać interferencję dwóch wiązek promieniowania: padającego prostopadle na płytę metalową oraz odbitego od niej. Hertz otrzymał w ten sposób *fale stojące*. Tym samym fale elektromagnetyczne zostały odkryte. Poniżej powtórzymy niektóre doświadczenia Hertza, jednak w formie nieco zmodernizowanej; Hertz bowiem nie znał żadnego detektora fal elektromagnetycznych, nie mógł więc używać galwanometru. Drgania w rezonatorze wykrywał obserwując miniaturowej wielkości iskierki pomiędzy dwoma końcami rezonatora, niemal zetkniętymi ze sobą. Nie trzeba chyba dodawać, że doświadczenia te były bez porównania trudniejsze od opisanych poniżej.

Na rysunku 5.25 widzimy oscylator, którego promieniowanie odbija się od płaszczyzny przewodzącej *P*. Wzdłuż osi *x* (poziomej) promieniowanie odbite nakłada się na padające. Jeśli promieniowanie elektromagnetyczne jest istotnie promieniowaniem falowym, to wzdłuż osi *x* powinna utworzyć się fala stojąca. Spróbujemy wykryć jej węzły i strzałki.



Rys. 5.25. Badanie fal stojących; a) oscylator — jak na rys. 5.20 a, *P* — płytka metalowa, odbijająca fale, *I* i *II* — rezonator tak jak na rys. 5.22, w dwóch zasadniczych położeniach, do wykrywania drgań wektora elektrycznego i magnetycznego. Poniżej: wykres drgań wektora elektrycznego (b) i magnetycznego (c) w fali stojącej

W tym celu zamknięty rezonator ustawiamy w pozycji *I*, w której reaguje on tylko na drgania wektora elektrycznego. Z łatwością stwierdzamy, że tuż przy powierzchni płyty metalowej wychylenie galwanometru jest = 0. Oddalając rezonator od płyty, obserwujemy coraz większe wychylenie galwanometru, które znów zaczyna spadać do pewnego minimum, po czym znów wzrasta itd. (Nie należy zbliżać się zanadto z rezonatorem do dipolu nadawczego, gdyż wtedy promieniowanie jego jest zbyt silne, a promieniowanie odbite zbyt słabe, wskutek czego minima stają się niewyraźne.) Doświadczenia te pokazują, że w punktach, które oznaczyliśmy literą W_e (rys. 5.25b), nie ma drgań wektora elektrycznego; są to węzły wektora elektrycznego. Natomiast w punktach oznaczonych literą S_e drgania tego wektora są najżywsze; są to strzałki wektora elektrycznego. Ponieważ odległość między sąsiednimi węzłami wynosi połowę długości fali, przeto z łatwością możemy tym sposobem wyznaczyć długość fali (λ).

Jeśli teraz rezonator ustawimy w pozycji *II*, w której reaguje on tylko na drgania wektora magnetycznego, to analogiczne doświadczenia pozwolą nam ustalić położenia węzłów i strzałek drgań wektora magnetycznego. Stwierdzamy, że w miejscach, gdzie były węzły wektora elektrycznego (w szczególności na powierzchni płyty), znajdują się strzałki wektora magnetycznego (S_m na rys. 5.25c); i odwrotnie, w strzałkach wektora elektrycznego znajdują się węzły wektora magnetycznego (W_m).

Taka jest struktura fali elektromagnetycznej *stojącej*. W zwykłej fali elektromagnetycznej *postępującej* maksima wektora elektrycznego przypadają w tych samych miejscach co i maksima wektora magnetycznego (patrz rys. 5.16).

Doświadczenie powyższe, podobnie jak i doświadczenia z paragrafu poprzedniego (patrz 4 i 5), dowodzą, że fale elektromagnetyczne są *falami poprzecznymi*.

Hertz nie poprzestał tylko na wyznaczeniu długości fali elektromagnetycznej. Z rozmiarów rezonatora obliczył jego pojemność i współczynnik indukcji własnej (znane były już wówczas odpowiednie wzory), a stąd — okres drgań *T*, według wzoru Thomsona (patrz § 4.47). Do ruchu falowego jakiegokolwiek rodzaju (fale mechaniczne, akustyczne i świetlne) stosuje się związek

$$\lambda = cT, \tag{5.37}$$

albo

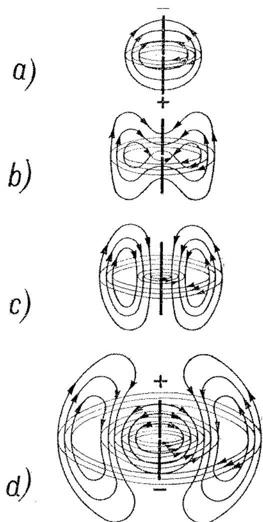
$$\lambda = \frac{c}{f}, \tag{5.37a}$$

który wyraża, że długość fali mierzy się długością drogi, jaką fala przebywa w ciągu jednego okresu. Z tego związku obliczył Hertz prędkość *c* rozchodzenia się fali elektromagnetycznej w powietrzu i otrzymał zgodnie z przewidywaniem teorii Maxwella $c = 3\cdot 10^8$ m/s, czyli tyle, ile wynosi prędkość rozchodzenia się fal świetlnych! Każdemu chyba nasuwa się przypuszczenie, że fale świetlne są, być może, falami elektromagnetycznymi, lecz znacznie krótszymi. Długość fal świetlnych wynosi bowiem 0,35—0,7 μm, podczas gdy długość fal Hertza jest rzędu 1 metra. Fizykom udało się rzeczywiście przeprowadzić ścisły dowód tej tezy.

***§ 5.24. Struktura fali elektromagnetycznej.** Wyobraźmy sobie dipol iskrowy ustawiony pionowo, w którym odbywają się drgania elektryczne. Uchwyćmy moment, w którym elektrony przesuwają się właśnie ku górze ładując górny koniec dipola ujemnie, dolny dodatnio (rys. 5.26a). Wytwarzają się jednocześnie linie magnetyczne, gdyż płynie prąd, oraz linie elektryczne, gdyż gromadzą się ładunki. Kierunek linii magnetycznych ustalamy za pomocą reguły śruby przyjmując, że ładunki dodatnie przesunęły się do dolnego końca dipola tworząc prąd. Po chwili jednak rozpoczyna się ruch ładunków w kierunku przeciwnym: elektrony pędzą ku dołowi, co jest równoważne przepływaniu ładunków dodatnich z dołu ku górze. Co się dzieje z liniami sił elektrycznych i magnetycznych? Linie elektryczne, które łączą ładunki dodatnie z ujemnymi, podążają za ładunkami i zbiegają się w środku dipola; zamykają się w ten sposób tworząc wydłużone wiry, a jednocześnie rozprzestrzeniają się (rys. 5.26b i c). Wiemy bowiem z § 5.19, że każde zaburzenie pola oscylatora spowodować musi rozchodzenie się linii elektrycznych i magnetycznych w przestrzeni. W tym czasie, kiedy prąd rozładowuje dipol, wytwarzają się linie magnetyczne, skierowane teraz przeciwnie do poprzednich, zgodnie z regułą śruby. Gdy dipol jest rozładowany (rys. 5.26c), prąd płynie dalej w tym samym kierunku (wskutek indukcji własnej) i ładuje oba ramiona dipola przeciwnie niż były naładowane poprzednio. Tworzą się nowe linie magnetyczne oraz powstają nowe linie elektryczne, skierowane od ładunków + do — (rys. 5.26d). Proces ten powtarza się ustawicznie, a podczas tego wszystkie linie oddalają się od oscylatora z prędkością światła. Już po

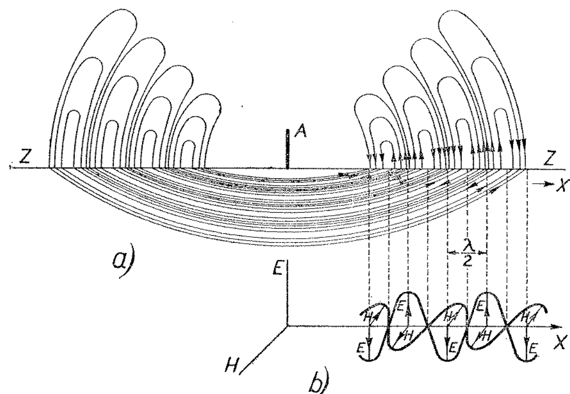
krótkim czasie obraz „migawkowy" fali będzie taki, jaki pokazuje rys. 5.27a, w rzucie na dwie prostopadłe płaszczyzny: południkową i równikową.

Wzdłuż jakiegokolwiek kierunku rozchodzenia się fali, np. wzdłuż kierunku x, spotykamy szereg maksimów natężeń pola elektrycznego i magnetycznego (linie najgęstsze)



Rys. 5.26. Przybliżony obraz linii sił pola elektrycznego i magnetycznego fali elektromagnetycznej wypromieniowanej przez dipol drgający (cztery kolejne stadia)

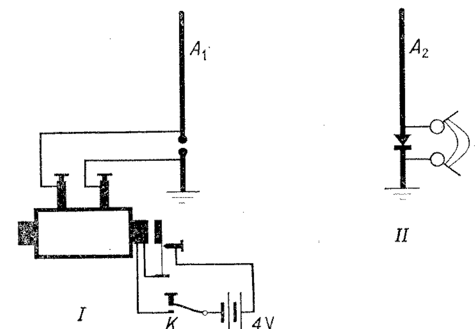
o kierunkach na przemian przeciwnych. Między tymi maksimami pole **E** i **H** przechodzi przez wartości zerowe. Ilustruje to wykres (rys. 5.27b). Obie sinusoidy, elektryczna i magnetyczna, odtwarzają stan fali w jednej tylko chwili. W rzeczywistości sinusoidy te prze-



Rys. 5.27. a) Linie elektryczne i magnetyczne fali elektromagnetycznej w przekroju płaszczyzną południkową i równikową dipola (anteny) A; b) wykres fali elektromagnetycznej postępującej w kierunku osi x. Jak wynika z mechanizmu powstawania fali elektromagnetycznej, przedstawionego na rys. 5.15 i 5.16, maksima wektorów E i H przypadają w tych samych miejscach, natomiast w fali stojącej przesunięte są względem siebie o $\lambda/4$ (patrz rys. 5.25)

suwają się wzdłuż osi x z prędkością światła. Jeśli spotkają dipol odbiorczy, wówczas doznaje on periodycznych podniet w postaci indukcji elektrostatycznej (wektor **E**) i magnetoelektrycznej (wektor **H**), wskutek czego powstają w nim prądy drgające, płynące wzdłuż dipola tam i z powrotem.

*§ **5.25. Radiotelegrafia.** Zasada radiotelegrafii jest bardzo prosta (rys. 5.28). Dipol iskrowy, wysyłający fale elektromagnetyczne w przestrzeń, służy do przesyłania na odległość sygnałów w postaci dłużej lub krócej trwającego ciągu fal. Dostrojony do niego



Rys. 5.28. Najprostsza stacja nadawcza (I) i odbiorcza (II) radiotelegrafu; A_1 i A_2 — anteny (do doświadczenia wystarczy 3-metrowej wysokości); T — słuchawki radiowe przyłączone równolegle do detektora kryształkowego (Doświadczenie bardzo łatwe do wykonania)

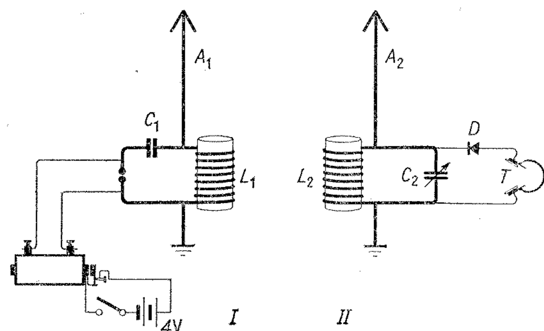
dipol-rezonator służy jako stacja odbiorcza. Sygnały stacji nadawczej wywołują w rezonatorze drgania, które można wykryć detektorem połączonym z galwanometrem, telefonem itp. Dłuższe lub krótsze sygnały odpowiadają kreskom i kropkom w alfabecie Morse'a. Taka jest zasada teoretyczna radiotelegrafii. W ten sposób jednak otrzymuje się zasięgi tak małe, że nie mają one żadnego praktycznego znaczenia. Właściwe rozwiązanie tego problemu zawdzięczamy fizykowi rosyjskiemu A. Popowowi, który w roku 1895 zrealizował pierwszy radiotelegraf. Okazało się, że największy zasięg otrzymuje się, jeśli górną część dipola w postaci drutu kilkunastometrowej długości zawiesić możliwie wysoko; jest to tzw. antena. Natomiast dolna część dipola powinna być zastąpiona przez uziemienie.

Falę elektromagnetyczną wypromieniowuje antena, która działa zupełnie tak samo, jak górna połowa dipola na rys. 5.26. Funkcję dolnej połowy dipola spełnia ziemia, w której antena indukuje ładunki przeciwnego znaku. Struktura pola elektromagnetycznego fali jest więc taka, jak pokazują górne połowy rysunków 5.26a–d, a więc taka sama, jak na rys. 5.27, przy czym ZZ oznacza powierzchnię ziemi.

Drgania anteny zarówno nadawczej, jak i odbiorczej są silnie tłumione: pierwszej — przez iskrę, drugiej — przez detektor. Lepsze wyniki uzyskuje się, jeśli zmniejszyć tłumienie przez usunięcie iskiernika i detektora z anteny. W tym celu stosuje się obwody drgające częściowo zamknięte, a częściowo otwarte. Przedstawia to rys. 5.29. Z łatwością dostrzegamy, że prąd w antenie, tzn. prąd drgający pomiędzy wierzchołkiem anteny a ziemią, przechodzi przez cewkę L_1 lub L_2 i w ten sposób omija tłumiące go przeszkody. Jednakże drgania pozostają tłumione, ale słabiej niż poprzednio.

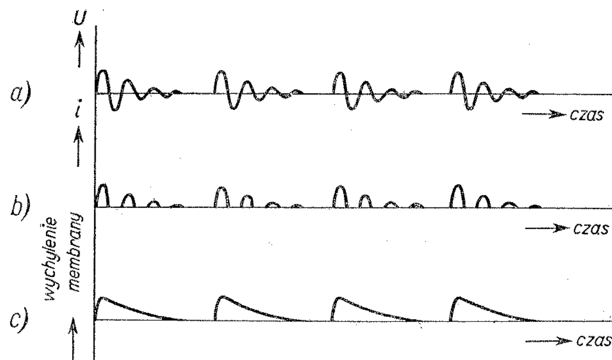
Parę słów objaśnienia należy się jeszcze stacji odbiorczej. Fale elektromagnetyczne wzbudzają w antenie A_2 drgania, które przechodząc przez cewkę L_2 wywołują na jej

końcach napięcie przemienne (wykres a, rys. 5.30). Część prądu odgałęzia się zatem i płynie przez słuchawki telefoniczne i przez detektor, który go prostuje (wykres b). Impulsy wyprostowane są zbyt częste (rzędu 10^6 Hz), aby każdy z nich oddzielnie mógł wychylić membranę słuchawki; ma ona na to zbyt dużą bezwładność; wychylają ją jednak wszystkie razem (wykres c). Takich wychyleń jest w ciągu sekundy tyle, ile iskier przeskakuje w iskierniku (kilkadziesiąt na sekundę). Wobec tego słuchawka wydaje ton.



Rys. 5.29. Stacja radiotelegraficzna nadawcza (*I*) i odbiorcza (*II*), dająca lepsze wyniki niż stacja na rys. 5.28; A_1 i A_2 — jak na rys. 5.28; L_1 i L_2 — cewki o kilkudziesięciu zwojach; C_2 — kondensator obrotowy, służący do dostrojenia stacji odbiorczej do rezonansu ze stacją nadawczą

Za pomocą opisanego tu radiotelegrafu, zwanego „iskrowym", można w słuchawce odbiornika wytwarzać dźwięki krótsze lub dłuższe, składające się na znaki Morse'a. Nie można natomiast odtwarzać dźwięków, np. głosu, tak jak to ma miejsce w zwykłym telefonie. Przyczyna tego leży w tym, że drgania, jakimi posługuje się radiotelegrafia iskrowa,

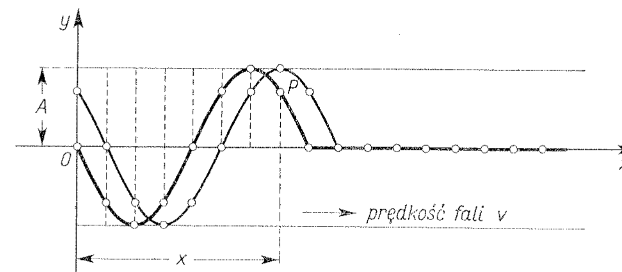


Rys. 5.30. a) Przebieg napięcia na końcach cewki L_2 stacji odbiorczej (drgania tłumione); b) przebieg prądu płynącego przez detektor i słuchawkę; c) drgania membrany w słuchawce

są drganiami tłumionymi. Antena stacji iskrowej wysyła fale słabnące w czasie, tak jak jej drgania; są to fale tłumione. W fali takiej amplituda drgań wektorów **E** i **H** nie jest stała, lecz malejąca w czasie. W drugiej części książki dowiemy się, że do przesyłania głosu konieczne są fale nietłumione. Fale takie można otrzymać wywołując w antenie drgania nietłumione. Od czasu wynalezienia lampy katodowej umiemy takie drgania wytwarzać. Od tego więc czasu mogła zacząć rozwijać się *radiofonia*.

D. Z teorii ruchu falowego

***§ 5.26. Ogólne wiadomości o ruchu falowym.** Wyobraźmy sobie ośrodek jednowymiarowy złożony z kulek połączonych ze sobą jakimikolwiek wiązaniami sprężystymi (rys. 5.31). Kulki te mogą również reprezentować poszczególne elementy ośrodka liniowego sprężystego, jak np. linki kauczukowej. W tych warunkach dowolna zmiana pozycji jakiejkolwiek kulki (elementu) przenosi się na inne kulki (elementy).



Rys. 5.31. Mechanizm wytwarzania fali wzdłuż szeregu kulek albo elementów sprężystego ośrodka liniowego

Rozważmy przypadek, w którym pierwsza kulka została wytrącona z położenia równowagi i wykonała jedno pełne drgnięcie: do góry, na dół, i z powrotem do położenia początkowego. Druga kulka nie pozostanie w spoczynku, gdyż działają na nią siły sprężyste wywołane odkształceniem ośrodka. Zatem, z pewnym opóźnieniem zależnym od swej masy i sił działających, kulka druga powtórzy ruch kulki pierwszej. Ten sam ruch, znów z pewnym opóźnieniem w stosunku do kulki drugiej, wykona kulka trzecia itd. W chwili gdy kulka pierwsza powróciła do punktu wyjścia, stan wszystkich kulek ośrodka wyobraża rysunek. W ten sposób wytwarza się fala w ośrodku liniowym. Kulki kontynuować będą swój ruch *poprzeczny* w kierunku osi y, zaś odkształcenie ośrodka rozchodzić się będzie coraz dalej wzdłuż osi x.

Niechaj ruch elementu początkowego, który znajduje się w początku układu współrzędnych (x, y), będzie ruchem harmonicznym prostym. Przesunięcie tego elementu w poprzek osi x wyrazi się wzorem

$$y = A \sin \omega t, \tag{5.38}$$

gdzie $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ jest częstotliwością kołową drgań (tj. liczbą pełnych drgań w ciągu 2π sekund), A — oznacza amplitudę drgań, t — czas. Fala rozchodzi się w ośrodku wzdłuż osi x. Zapytujemy, jakie jest przesunięcie elementu ośrodka liniowego w punkcie P, oddalonym od początku układu współrzędnych o x, w tej samej chwili t, dla której przesunięcie elementu początkowego wynosi $A \sin \omega t$? Odpowiedź jest prosta: przesunięcie tego elementu jest dokładnie takie samo jak elementu początkowego w chwili wcześniejszej o $\frac{x}{v}$, gdzie v jest prędkością rozchodzenia się zaburzenia w ośrodku, tzn. pręd-

kością fali. Odpowiedź ta wyrażona matematycznie ma postać równania:

$$y = A\sin\omega\left(t-\frac{x}{v}\right). \tag{5.39}$$

Równanie to wyraża przesunięcie y dowolnego punktu ośrodka, o współrzędnej x, w funkcji czasu i współrzędnej x. Jest to równanie ruchu falowego w ośrodku jednowymiarowym.

Równanie falowe pisze się zazwyczaj w innej postaci, mianowicie w postaci (5.42), którą otrzymuje się w następujący sposób. Przekształcamy równanie (5.39):

$$y = A\sin\left(\omega t-\frac{\omega x}{v}\right) = A\sin\left(\omega t-\frac{2\pi}{Tv}x\right) = A\sin\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x\right),$$

gdzie

$$\lambda = vT \tag{5.40}$$

jest długością fali, która wyraża drogę przebytą przez falę w ciągu jednego okresu. Wielkość $\frac{2\pi}{\lambda}$ jest liczbą fal mieszczącą się w 2π jednostkach długości; oznacza się liczbą k i nazywa się *stałą propagacji* (lub z pewnych powodów wartością *wektora falowego*):

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{5.41}$$

Wprowadzając tę definicję, otrzymujemy równanie falowe w postaci:

$$y = A\sin(\omega t-kx). \tag{5.42}$$

Równanie falowe wyraża podwójną periodyczność: periodyczność w czasie i w przestrzeni. Wyraźniej to widać, jeśli w równaniu falowym ω i k zastąpić odpowiednio wyrażeniami $2\pi/T$ i $2\pi/\lambda$:

$$y = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right). \tag{5.42a}$$

T wyraża okres periodyczności czasowej, zaś λ — okres periodyczności przestrzennej.

Funkcja $y = y(t, x)$ nazywa się *funkcją falową*. Nie musi to być przesunięcie elementów ośrodka, jak w dotychczasowym przykładzie. Funkcją falową może być skręcenie, zgęszczenie, ciśnienie, natężenie prądu, napięcie, natężenie pola elektrycznego, natężenie pola magnetycznego, a nawet tak abstrakcyjna wielkość, jak prawdopodobieństwo znalezienia elektronu w otoczeniu jądra atomowego. Jeśli funkcję falową oznaczymy literą Φ, a jej amplitudę symbolem Φ_0, równanie falowe przybierze postać:

$$\Phi = \Phi_0\sin(\omega t-kx). \tag{5.43}$$

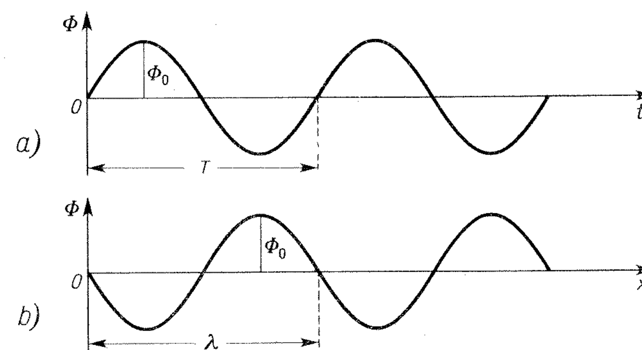
Wykres funkcji falowej w zależności od czasu i od współrzędnej przestrzennej przedstawia rys. 5.32.

Znak minus przed wyrażeniem $\frac{x}{v}$ w równaniu (5.39) oznacza, że równanie to reprezentuje falę poruszającą się w dodatnim kierunku osi x, a więc w prawo. Jeśli fala porusza się w ujemnym kierunku osi $-x$, czyli w lewo, znak przed wyrażeniem zawierającym x będzie dodatni. Oto równanie fali poruszającej się w lewo:

$$\Phi = \Phi_0\sin(\omega t+kx), \tag{5.44}$$

podczas gdy równanie (5.43) przedstawia falę poruszającą się w prawo.

Jak widać z omówionego tu mechanizmu rozchodzenie się fali [por. rys. 5.31, a także wzór (5.42)], ruch falowy polega na *naśladowaniu z opóźnieniem* ruchu elementu poprzedniego przez elementy dalsze. Jeśli naśladowanie ruchu odbywa się z wyprzedzeniem, oznacza to, że fala porusza się w ujemnym kierunku osi x.



Rys. 5.32. Wykres funkcji falowej $\Phi = \Phi_0 \sin(\omega t - kx)$ w zależności od czasu, dla $x = 0, \lambda; 2\lambda, \ldots$ (wykres *a*) oraz w zależności od współrzędnej przestrzennej x, dla $t = 0, T, 2T, \ldots$ (wykres *b*)

§ 5.27. Równanie różniczkowe ruchu falowego. W paragrafie poprzednim zajmowaliśmy się ruchem falowym, wynikającym z *periodycznego* ruchu pierwszego zaburzonego elementu ośrodka. Dało to początek periodycznemu ciągowi fal.

Fala może jednak wynikać z jakiegokolwiek zaburzenia, np. z jednorazowego odkształcenia, albo z ciągu nieperiodycznych lub periodycznych zaburzeń. Napiszmy ogólniej równanie wynikłej stąd fali. Będzie to, podobnie jak (5.39), funkcja zmiennej $\left(t-\frac{x}{v}\right)$, wyrażająca „naśladowanie z opóźnieniem", ale funkcja niekoniecznie periodyczna. Napiszemy ogólnie dla fali poruszającej się w prawo:

$$\Phi = f\left(t-\frac{x}{v}\right). \tag{5.45}$$

Podobnie równanie fali poruszającej się w lewo wyrażać będzie „naśladowanie z wyprzedzeniem":

$$\Phi = g\left(t+\frac{x}{v}\right), \tag{5.46}$$

gdzie funkcja g, zależnie od rodzaju zaburzenia, może być na ogół różna od funkcji f.

Zróżniczkujmy funkcję $\Phi = f\left(t-\frac{x}{v}\right) = f(u)$ dwukrotnie względem czasu i dwukrotnie względem współrzędnej x. Otrzymamy:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = f''(u) \text{ i } \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = f''(u)\cdot\left(\frac{1}{v^2}\right).$$

Rugując z tych równań $f''(u)$ otrzymamy:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}. \tag{5.47}$$

Równanie to spełnia *eo ipso* funkcja falowa $f\left(t-\frac{x}{v}\right)$, nietrudno jednak sprawdzić, że spełnia je także funkcja $g\left(t+\frac{x}{v}\right)$. Równanie (5.47) jest więc równaniem różniczkowym fali poruszającej się wzdłuż osi x w dowolną jej stronę. Równania fali periodycznej (5.43) i (5.44) spełniają także równanie różniczkowe (5.47). Jeśli w funkcjach Φ zamiast sinusów wystąpią cosinusy, są one również rozwiązaniem równania różniczkowego fali. Sprawdźmy także, że funkcje:

$$\Phi_1 = \Phi_0[\cos(\omega t - kx) + j\sin(\omega t - kx)]$$

oraz

$$\Phi_2 = \Phi_0[\cos(\omega t + kx) + j\sin(\omega t + kx)]$$

są również rozwiązaniami równania falowego (5.47). Zgodnie z twierdzeniem Eulera [patrz wzór (4.67)] rozwiązaniami są więc funkcje falowe wyrażone przy pomocy funkcji wykładniczej:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1 &= \Phi_0 e^{j(\omega t - kx)},\\ \Phi_2 &= \Phi_0 e^{j(\omega t + kx)}.\end{aligned}\right\} \tag{5.48}$$

Każda z tych funkcji reprezentuje — swoją częścią rzeczywistą lub urojoną — falę poruszającą się wzdłuż dodatniego (Φ_1) lub ujemnego (Φ_2) kierunku osi x.

Równanie różniczkowe fali można wyprowadzić bezpośrednio przez zastosowanie zasad dynamiki Newtona do elementu struny, przez którą przebiega fala zaburzenia. Czytelnik może znaleźć to wyprowadzenie w podręcznikach mechaniki teoretycznej.

§ 5.28. Fale stojące. Przede wszystkim sprawdźmy, że równanie różniczkowe fali (5.47) spełnione jest nie tylko przez funkcje $f\left(t-\frac{x}{v}\right)$ i $g\left(t+\frac{x}{v}\right)$ z osobna, ale również przez sumę obu tych funkcji:

$$\Phi = f\left(t-\frac{x}{v}\right) + g\left(t+\frac{x}{v}\right), \tag{5.49}$$

reprezentującą falę, będącą superpozycją obu fal poruszających się w przeciwne strony. Jeśli f i g są funkcjami periodycznymi, mamy wtedy do czynienia z nałożeniem się dwu periodycznych ciągów fal; przy tej samej częstotliwości obu fal powstaną fale stojące.

Przyjmijmy więc, że rozwiązanie różniczkowego równania falowego ma postać:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \Phi_0\left[e^{j(\omega t - kx)} + e^{j(\omega t + kx)}\right].$$

Inaczej

$$\Phi = \Phi_0 e^{j\omega t}(e^{-jkx} + e^{jkx}).$$

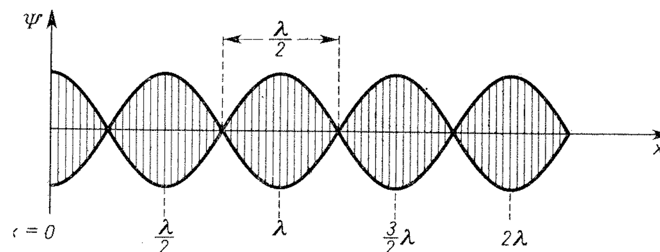
Zastosowawszy do obu wyrażeń w nawiasie wzór Eulera mamy:

$$\Phi = \Phi_0 e^{j\omega t}\cdot 2\cos kx.$$

Widzimy, że w wyrażeniu na funkcję falową występuje iloczyn dwóch wyrazów:

$$\Phi = 2\Phi_0 \cos kx \cdot e^{j\omega t}, \tag{5.50}$$

z których pierwszy zależy tylko od zmiennej przestrzennej, zaś nie zależy od czasu, natomiast drugi zależy wyłącznie od czasu, nie zależy zaś od zmiennej przestrzennej. Mówimy, że w funkcji falowej Φ *zmienne są rozdzielone*.



Rys. 5.33. Tak zmienia się w zależności od x amplituda fali stojącej [według wzoru (5.51a), patrz zagadnienie 5.22 i 5.29]. Widzimy węzły i strzałki. Linie pionowe oznaczają obszerność drgań wielkości Ψ

Według wzoru (5.50) w każdym punkcie osi mamy drganie o częstotliwości ω i o amplitudzie zależnej od x; tę amplitudę oznaczamy symbolem Ψ:

$$\Psi = 2\Phi_0 \cos kx. \tag{5.51}$$

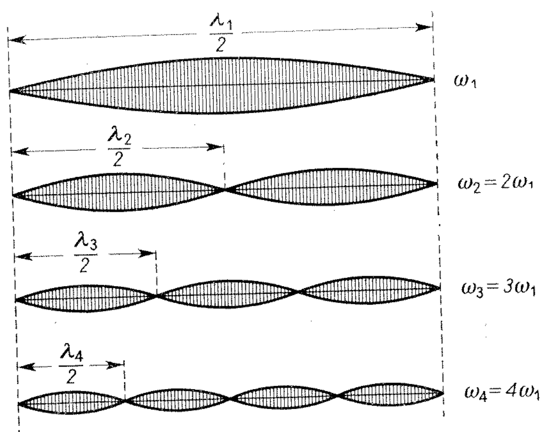
Ruch ośrodka, który jest wypadkową dwóch ciągów fal wyrażonych równaniami (5.48) nie stanowi normalnej fali bieżącej, gdyż funkcja falowa Φ nie zależy od zmiennej $(\omega t - kx)$ lub $(\omega t + kx)$. Natomiast jest drganiem, którego amplituda Ψ zmienia się periodycznie wzdłuż osi x; długość tego okresu przestrzennego wynosi λ, ponieważ

$$\Psi = 2\Phi_0 \cos 2\pi\frac{x}{\lambda}. \tag{5.51a}$$

Dla $x = 0, \frac{1}{2}\lambda, \lambda, \frac{2}{3}\lambda, \ldots$ amplituda Ψ staje się zerem, przechodząc w środku tych odcinków przez maksima. Poznajemy w tym ruchu falę stojącą, z jej węzłami i strzałkami (rys. 5.33).

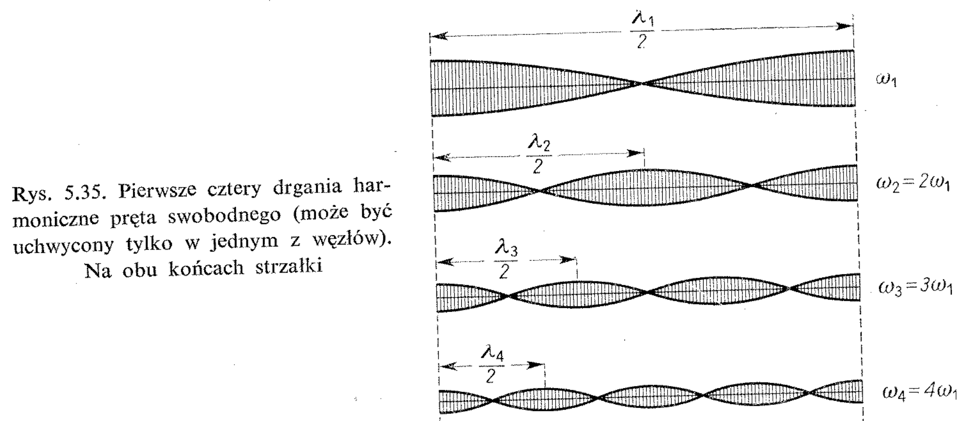
Fala stojąca w nieograniczonym ośrodku może mieć dowolną częstotliwość, a więc dowolną długość fali. Inaczej sprawa przedstawia się dla ośrodka ograniczonego. Na

przykład struna ograniczona jest na dwóch swoich końcach, na których jest zamocowana. W obu tych krańcowych punktach wytwarzają się oczywiście węzły. Tylko te częstotliwości są możliwe, przy których struna zostaje podzielona węzłami na równe odcinki. Wytwarzają się w ten sposób drgania harmoniczne: pierwsze, drugie, trzecie itd. Ilustruje to rys. 5.34.



Rys. 5.34. Pierwsze cztery drgania harmoniczne struny. Na końcach węzły

W odmienny sposób drga pręt swobodny na obu końcach. Na jego końcach wytwarzają się strzałki, wewnątrz zaś pręta tworzy się jeden, dwa lub więcej węzłów. Przedstawione jest to na rys. 5.35.



Rys. 5.35. Pierwsze cztery drgania harmoniczne pręta swobodnego (może być uchwycony tylko w jednym z węzłów). Na obu końcach strzałki

Porównując drgania struny i pręta z drganiami elektrycznymi dipola (rys. 5.19b i c), widzimy, że drganie prądu w dipolu przypomina drganie mechaniczne struny (na końcach — węzły), zaś drganie potencjału dipola przypomina drganie mechaniczne pręta unieruchomionego w środku (na końcach — strzałki).

E. Teoria Maxwella fal elektromagnetycznych

§ 5.29. Równanie płaskiej fali elektromagnetycznej. Niech w przestrzeni, wypełnionej ośrodkiem dielektrycznym, panuje zmienne w czasie pole elektryczne i magnetyczne. Napiszmy równania Maxwella, zakładając dla uproszczenia zagadnienia, że oba pola zmieniają się tylko w kierunku osi y, tzn. że operatory $\frac{\partial}{\partial x}$ i $\frac{\partial}{\partial z}$ zastosowane do obu pól **E** i **H** dają zero; symbolicznie: $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$. Natomiast operatory $\frac{\partial}{\partial y} \neq 0$ i $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$. W tych warunkach definicje obu operatorów przestrzennych, rot i div, występujących w równaniach Maxwella, dają: w równaniu pierwszym

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}\frac{\partial H_z}{\partial y} - \mathbf{k}\frac{\partial H_x}{\partial y},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\partial E_y}{\partial y},$$

w równaniu drugim

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}\frac{\partial E_z}{\partial y} - \mathbf{k}\frac{\partial E_x}{\partial y},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = \frac{\partial H_y}{\partial y}$$

(por. §§ 5.10 i 5.11). Każde z równań Maxwella (5.36) przybierze postać trzech równań skalarnych, wyrażających równość odpowiednich składowych wektorów. W rozważanym przypadku będziemy mieli

równanie I:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}, \tag{5.52a}$$

$$0 = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}, \tag{5.52b}$$

$$-\frac{\partial H_x}{\partial y} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}, \tag{5.52c}$$

równanie dodatkowe:

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0, \tag{5.53}$$

równanie II:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\mu_0 \mu \frac{\partial H_x}{\partial t}, \tag{5.54a}$$

$$0 = -\mu_0 \mu \frac{\partial H_y}{\partial t}, \tag{5.54b}$$

$$-\frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu_0 \mu \frac{\partial H_z}{\partial t}, \tag{5.54c}$$

równanie dodatkowe:

$$\frac{\partial H_y}{\partial y} = 0. \tag{5.55}$$

Z pary równań (5.52c) i (5.54a) wyeliminujmy H_x. Zrobimy to przez zróżniczkowanie pierwszego z tych równań względem czasu, zaś drugiego — względem y. Otrzymamy:

$$-\frac{\partial^2 H_x}{\partial y\, \partial t} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = -\mu_0 \mu \frac{\partial^2 H_x}{\partial y\, \partial t},$$

a stąd

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}. \tag{5.56}$$

Z tej samej pary równań wyeliminujmy E_z, różniczkując pierwsze wyrażenie względem y, zaś drugie — względem t. Otrzymamy:

$$-\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial y\, \partial t},$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial y\, \partial t} = -\mu_0 \mu \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2},$$

stąd

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2}. \tag{5.57}$$

Z porównania uzyskanych tutaj równań (5.56) i (5.57) z równaniem falowym (5.47) od razu widać, że równania nasze przedstawiają falę, w której funkcją falową jest pole elektryczne E_z i pole magnetyczne H_x. Są to *równania fali elektromagnetycznej*. Z porównania tego wynika od razu równość współczynników:

$$\frac{1}{v^2} = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu,$$

a stąd prędkość fali elektromagnetycznej w danym ośrodku:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}}. \tag{5.58}$$

W próżni ($\varepsilon = \mu = 1$) prędkość fali elektromagnetycznej wynosi:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{10^7}{4\pi c^2}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} 4\cdot\pi 10^{-7}\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}}} = \frac{c}{\sqrt{\frac{\mathrm{F\cdot H}}{\mathrm{m}^2}}} = c\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 3\cdot 10^8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{5.59}$$

Zgodność tej prędkości z prędkością światła nasunęła Maxwellowi myśl o elektromagnetycznej naturze fal świetlnych.

Równania (5.56) i (5.57) wyrażają *falę płaską*, tzn. falę, której wektory zależą wyłącznie od zmiennej przestrzennej w kierunku rozchodzenia się fali (w naszym przypadku od y), nie zależą zaś od obu zmiennych przestrzennych wzdłuż osi x i z. Powierzchnie falowe, na których wektory falowe są w tej samej fazie (np. przybierają wartości maksymalne), są wówczas płaszczyznami prostopadłymi do kierunku rozchodzenia się fali.

Fala elektromagnetyczna jest falą poprzeczną. Wynika to z równań (5.52b) i (5.53) dla wektora elektrycznego i równań (5.54b) i (5.55) dla wektora magnetycznego. Bowiem równania te mówią nam, że składowe podłużne obu pól, E_y i H_y, nie zmieniają się w czasie, ani nie zmieniają się wzdłuż kierunku rozchodzenia się fali. Są to pola statyczne, nakładające się na falę elektromagnetyczną, a pochodzące od jakichś ładunków elektrycznych i od jakichś magnesów. Można wyeliminować je z naszych równań przyjmując $E_y = H_y = 0$.

Fala elektromagnetyczna wyrażona równaniami (5.56) i (5.57) wywołana być może drganiami elektrycznymi w dipolu równoległym do osi z. Dipol ten musi być umieszczony bardzo daleko od rozważanego obszaru przestrzeni, inaczej bowiem fala nie będzie mogła być uważana za płaską.

Jeśli równania fali elektromagnetycznej wyprowadzić z równań (5.52a) i (5.54c), otrzyma się równania falowe odpowiadające promieniowaniu odległego dipola ustawionego równolegle do osi x.

W obu wypadkach fale są *spolaryzowane*, tzn., że wektory elektryczny i magnetyczny drgają w stałych określonych płaszczyznach, przechodzących przez kierunek rozchodzenia się fali (patrz zagadnienia 5.20 i 5.46).

§ 5.30. Związek między wektorem elektrycznym i magnetycznym w fali elektromagnetycznej. Opór falowy. Napiszmy rozwiązanie równań fali elektromagnetycznej (5.56) i (5.57), w postaci funkcji wykładniczej (5.48):

$$E_z = E_0\, e^{j(\omega t - ky)}, \tag{5.60}$$

$$H_x = H_0\, e^{j(\omega_1 t - k_1 y + \varphi)}. \tag{5.61}$$

Autor radzi czytelnikom sprawdzić, że funkcje powyższe spełniają równania falowe: pierwsza spełnia równanie (5.56), druga — równanie (5.57). Już intuicja i doświadczenie nam mówią, że funkcja H_x winna mieć tę samą częstotliwość i tę samą długość fali, co i E_z. Jednak należy matematycznie wykazać, że tak być musi. A poza tym musimy dowiedzieć się, czy istnieje różnica faz $\varphi \neq 0$ i jaki jest ilościowy związek pomiędzy E_z i H_x.

W tym celu zróżniczkujemy (5.60) względem czasu. Otrzymamy

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = j\omega E_0\, e^{j(\omega t - ky)}.$$

Podstawienie do równania (5.52c) daje

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} = -j\omega E_0 \varepsilon_0 \varepsilon \, e^{j(\omega t - ky)}.$$

Po scałkowaniu względem y mamy

$$H_x = \frac{\omega E_0 \varepsilon_0 \varepsilon}{k} e^{j(\omega t - ky)}.$$

$$\text{Ale } \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}},$$

zatem

$$H_x = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} E_0 e^{j(\omega t - ky)}. \tag{5.62}$$

Z równania powyższego widzimy, że wektor magnetyczny H_x w fali elektromagnetycznej ma nie tylko tę samą częstotliwość ($\omega_1 = \omega$) i tę samą stałą propagancji ($k_1 = k$), ale również tę samą fazę ($\varphi = 0$), co i wektor elektryczny E_z. Korzystając z równania (5.60) możemy napisać równanie (5.62) w postaci:

$$H_x = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} E_z.$$

Inaczej

$$\frac{E_z}{H_x} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon_0 \varepsilon}}. \tag{5.63}$$

Stosunek wartości obu wektorów fali, elektrycznego i magnetycznego, nosi nazwę oporu falowego ośrodka. Jeśli ośrodkiem jest próżnia ($\varepsilon = 1$, $\mu = 1$), otrzymujemy na opór falowy próżni wartość

$$\frac{E_z}{H_x} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}}{\frac{10^7}{4\pi c^2} \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}}} = 4\pi c \cdot 10^{-7}\,\Omega = 120\pi\Omega = 377\,\Omega. \tag{5.64}$$

Związek (5.63) piszemy również w takiej postaci:

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E_z = \sqrt{\mu_0 \mu} H_x. \tag{5.65}$$

§ 5.31. Współczynnik załamania dielektryka dla fal elektromagnetycznych. Fale elektromagnetyczne odbijają się i załamują się na granicy dwóch dielektryków dokładnie według tych samych praw odbicia i załamania, jakie rządzą zjawiskiem odbicia i załamania światła. Współczynnik załamania dielektryka względem próżni określa się tak samo jak dla światła:

$$n = \frac{c}{v}. \tag{5.66}$$

Współczynnik załamania jest więc stosunkiem prędkości fali elektromagnetycznej w próżni do jej prędkości w danym ośrodku. Korzystając ze związków (5.58) i (5.59) otrzymujemy słynną relację Maxwella:

$$n = \sqrt{\varepsilon \mu}. \tag{5.67}$$

Dielektryki są na ogół ciałami diamagnetycznymi. Ich względna przenikalność magnetyczna jest tak bardzo bliska jedności (por. tablicę 3.3), że możemy przyjąć $\mu = 1$. Współczynnik załamania wyrazi się więc wzorem:

$$n = \sqrt{\varepsilon}. \tag{5.68}$$

Podkreślić należy, że wzór ten wyraża współczynnik załamania n przy pomocy względnej przenikalności elektrycznej, mierzonej dla fal o tej samej częstotliwości, przy której mierzymy n. Jeśli zmierzyć ε przy częstotliwości radiowej, zaś n przy częstotliwości optycznej, to z powodu istnienia dyspersji, czyli zależności ε i n od częstotliwości, nie możemy się spodziewać, aby równość (5.68) była spełniona. Na przykład przenikalność dielektryczna wody dla częstotliwości radiowych wynosi $\varepsilon = 81$, zatem n dla tych częstotliwości wynosi: $n = \sqrt{81} = 9$. Potwierdza to doświadczenie. Natomiast współczynnik załamania wody dla fal świetlnych wynosi zaledwie 1,33. Tłumaczy się to różnym udziałem drobin wody w polaryzacji dielektrycznej przy częstotliwościach małych i dużych. Będzie o tym mowa w drugiej części tej książki. Teoria Maxwella rozpatruje fale elektromagnetyczne w ośrodkach ciągłych, natomiast nie zajmuje się oddziaływaniem tych fal z atomami i drobinami.

Od współczynnika załamania zależy długość fali elektromagnetycznej w danym ośrodku. Niech długość fali w próżni wynosi λ_0; możemy uważać, że w powietrzu $\lambda = \lambda_0$, ponieważ ε i n dla powietrza niewiele różnią się od jedności. Jednak w ośrodku ciekłym różnica jest bardzo znaczna. Wynika to ze znanych związków: dla próżni

$$\lambda_0 = cT,$$

i dla ośrodka

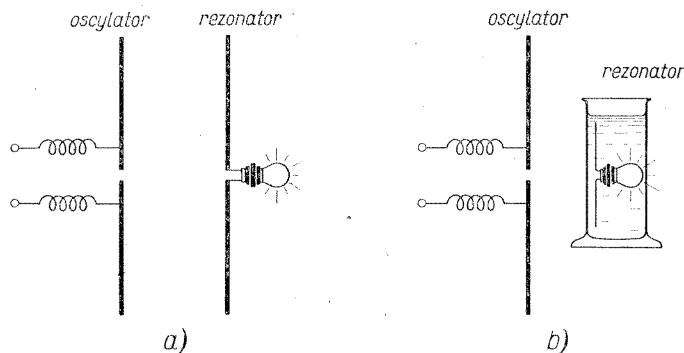
$$\lambda = vT.$$

Rugując stąd T mamy

$$\lambda = \frac{v\lambda_0}{c} = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon}}. \tag{5.69}$$

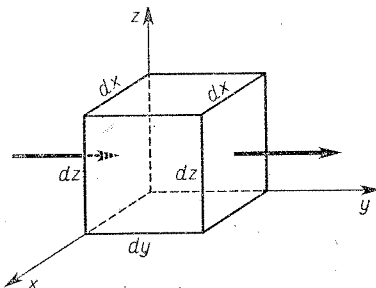
A więc w ośrodku o przenikalności elektrycznej ε długość fali zmniejsza się $\sqrt{\varepsilon}$ razy w stosunku do długości tej samej fali w próżni.

Wniosek ten potwierdza efektowne doświadczenie. Dipol-rezonator z żaróweczką w środku jest w rezonansie z dipolem-oscylatorem. Dipole są jednakowej długości równej $\frac{1}{2}\lambda$, ustawione obok siebie pionowo (rys. 5.36). Jeśli dipol-rezonator wstawić do cylindra szklanego z olejem ($\varepsilon = 2$) lub z wodą ($\varepsilon = 81$) (rys. 5.36), długość jego musi być zmniejszona $\sqrt{\varepsilon}$ razy, aby był on w rezonansie z dipolem-oscylatorem poprzedniej długości.



Rys. 5.36. a) Rezonans dwóch jednakowych dipoli w powietrzu. b) Rezonator w cieczy dielektrycznej; rezonans występuje dla dipola $\sqrt{\varepsilon}$ razy krótszego

§ **5.32. Wektor Poyntinga.** W fali elektromagnetycznej wektory pól **E** i **H** w jednych miejscach znikają, zaś w odleglejszych powstają; w ten sposób płynie w fali energia pola elektrycznego i magnetycznego. Wektor Poyntinga **S** wskazuje kierunek płynięcia energii w fali oraz reprezentuje wartość energii, która przepływa w ciągu jednostki czasu przez jednostkę powierzchni, ustawionej prostopadle do kierunku płynięcia energii. W jednostkach MKSA mierzy się ona w $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s{\cdot}m^2}}$, czyli $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}}$. W fali płaskiej, którą rozważaliśmy w § 5.29, wektorami pola są $\mathbf{E}_z$ i $\mathbf{H}_x$, zaś kierunkiem propagacji fali — dodatni kierunek osi y. W tym przypadku energia płynie w kierunku osi y. Jeśli wpływa ona do elementu



Rys. 5.37. Energia fali elektromagnetycznej wpływa do elementu objętościowego $dx\,dy\,dz$ lewą ścianą, a wypływa prawą

objętościowego $dx\ dy\ dz$ (rys. 5.37), wpływać może tylko lewą ścianą $dz\ dx$, a wypływać prawą; przez inne ściany nie płynie. Dopóki element nie napełni się całkowicie energią (gdy wejdzie do niego maksymalne pole fali), dopóty szybkość wzrostu energii $\mathcal{E}$ elementu objętościowego wyrazić można w sposób formalny zgodnie z definicją dywergencji [por. wzór (5.16)]:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = -\oint\!\!\oint S\,dA = -\mathrm{div}\,\mathbf{S}\cdot dx\,dy\,dz. \tag{5.70}$$

We wzorze tym A oznacza powierzchnię ograniczającą element objętościowy. Znak minus postawiliśmy dlatego, że div **S** oznacza wypływ strumienia wektora **S** z elementu $dx\ dy\ dz$,

więc $-\oint\!\!\oint S\,dA$ wyraża wpływ strumienia wektora **S** do tego elementu. Wobec tego, że **S** ma kierunek osi y, napiszemy:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{S} = \frac{\partial S_y}{\partial y}.$$

Prędkość wzrostu energii $\mathcal{E}$ w elemencie $dx\,dy\,dz$ będzie zatem:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{\partial S_y}{\partial y}\,dx\,dy\,dz. \tag{5.71}$$

Z drugiej strony energia pola elektromagnetycznego wyrazi się jako suma energii pola elektrycznego i energii pola magnetycznego. Korzystając ze wzoru (2.28) na gęstość energii pola elektrycznego i ze wzoru (4.16) na gęstość energii pola magnetycznego, napiszemy dla próżni:

$$\mathcal{E} = \left(\frac{\varepsilon_0 E_z^2}{2} + \frac{\mu_0 H_x^2}{2}\right) dx\,dy\,dz.$$

Po zróżniczkowaniu względem czasu mamy:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \left(\varepsilon_0 E_z \frac{\partial E_z}{\partial t} + \mu_0 H_x \frac{\partial H_x}{\partial t}\right) dx\,dy\,dz.$$

Z równań Maxwella (5.52c) i (5.54a) pochodne czasowe zastępujemy pochodnymi przestrzennymi. Otrzymamy

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = -\left(E_z \frac{\partial H_x}{\partial y} + H_x \frac{\partial E_z}{\partial y}\right) dx\,dy\,dz.$$

W nawiasie poznajemy pochodną iloczynu $E_z H_x$. Będziemy więc mieli:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}(E_z H_x)\,dx\,dy\,dz.$$

Porównanie tego wzoru ze wzorem (5.71) daje: $\frac{\partial S_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(E_z H_x)$. Po scałkowaniu otrzymuje się

$$S_y = E_z H_x. \tag{5.72}$$

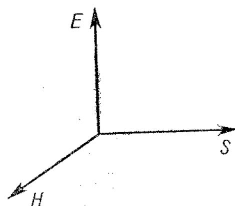
Stałą addytywną całkowania przyjęliśmy jako równą zeru, ponieważ zniknięcie fali musi spowodować zniknięcie przepływu energii.

Już z tego wzoru widać, że wartość i kierunek wektora Poyntinga wyraża się iloczynem wektorowym wektorów E_z i H_x. Istotnie, w ogólnym wypadku pola elektromagnetycznego dowolnego otrzymuje się wzór ogólniejszy:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}. \tag{5.73}$$

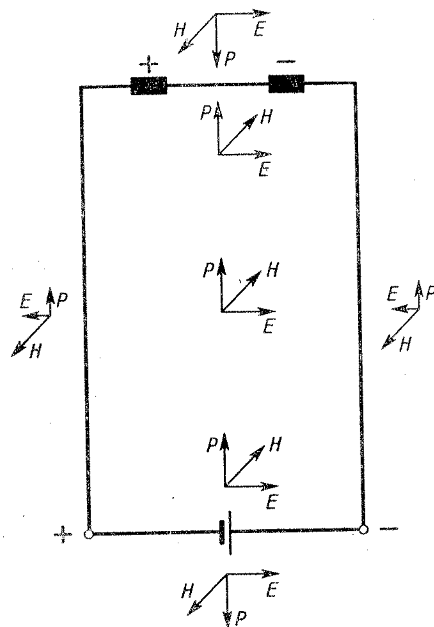
$$\left(\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}}\right)\left(\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right)\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right)$$

Jak widać wektor Poyntinga jest iloczynem wektorowym wektora pola elektrycznego **E** i magnetycznego **H**. Jego kierunek wyznacza reguła mnożenia wektorowego (rys. 5.38). W układzie jednostek MKSA mierzy się on, jak widać ze wzoru (5.72) lub (5.73), w watach na metr kwadratowy.



Rys. 5.38. Kierunek wektora Poyntinga **S** wyznacza reguła mnożenia wektorowego **E**×**H**: jeśli wektor elektryczny **E** obrócić tak, aby zakreślając mniejszy kąt pokrył się z wektorem **H**, wówczas kierunek posuwania się śruby prawoskrętnej, obracanej zgodnie z wektorem **E**, jest kierunkiem wektora **S**

Wzory (5.72) i (5.73) zawierają wartości chwilowe wektorów pola; dają więc chwilową wartość szybkości przepływu energii, czyli chwilową wartość przepływu mocy. Jeśli fala



Rys. 5.39. Kierunek wektora Poyntinga (na rysunku tym oznaczony literą *P*) w przestrzeni otaczającej obwód elektryczny, zawierający źródło prądu i kawałek drutu oporowego

jest sinusoidalną, możemy obliczyć średnią czasową wartość wektora Poyntinga **S**:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s, \tag{5.74}$$

gdzie $\mathbf{E}_s$ i $\mathbf{H}_s$ oznaczają wielkości skuteczne wektorów $\mathbf{E}_s$ i $\mathbf{H}_s$. Uśrednienie w czasie daje taki sam rezultat, jak dla prądu przemiennego [por. wzór (4.35)]:

$$\mathbf{E}_s = \frac{\mathbf{E}_0}{\sqrt{2}}, \qquad \mathbf{H}_s = \frac{\mathbf{H}_0}{\sqrt{2}}. \tag{5.75}$$

Zatem

$$\mathbf{S} = \tfrac{1}{2}\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0. \tag{5.76}$$

Wektor Poyntinga stosuje się nie tylko do przepływu energii fali elektromagnetycznej, ale również do przepływu energii wszędzie tam, gdzie zjawiska opisują równania Maxwella.

Zastosujmy wektor Poyntinga do zwykłego obwodu złożonego ze źródła prądu, przewodników praktycznie bezoporowych i odbiornika energii elektrycznej, jakim jest drut oporowy lub żarówka (rys. 5.39). W otoczeniu każdego obwodu istnieje pole elektromagnetyczne: pole elektryczne wytwarza się w pobliżu istniejących różnic potencjałów, zaś pole magnetyczne powstaje dookoła prądu. Wektor $\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}$ wskazuje wypływanie energii elektrycznej ze źródła prądu, jej przepływ między przewodami, a także — w mniejszym stopniu — w przestrzeni poza przewodami, wreszcie wskazuje wpływanie energii do opornika przez jego zewnętrzną powierzchnię. Widzimy, że chociaż ładunki elektryczne płyną przewodami, to jednak energia płynie w przestrzeni otaczającej przewodniki, skąd wpływa do odbiornika energii. Gdy naciskając kontakt zapalamy żarówkę elektryczną, w zjawisku tym bierze udział nieograniczona przestrzeń. Wniosek ten jest dość zaskakujący, lecz obliczenie mocy wpływającej w ten sposób do żarzącego się włókna daje zgodny z prawdą wynik: ri^2 (patrz zagadnienie 5.52).

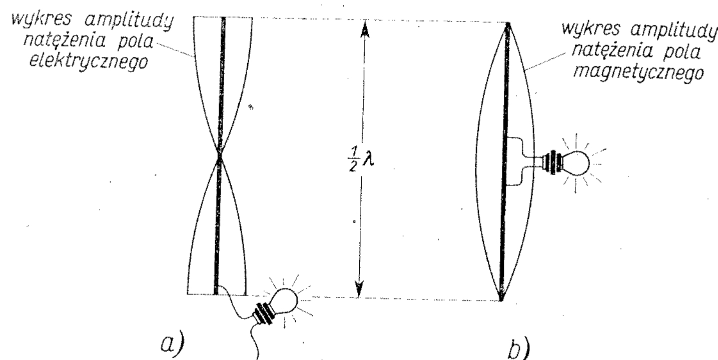
F. Fale elektromagnetyczne wzdłuż kabli i falowodów

***§ 5.33. Fale elektromagnetyczne wzdłuż drutu.** W § 5.28 dowiedzieliśmy się, że wzdłuż napiętej struny można wywołać falę stojącą mechaniczną nie tylko *podstawową*, czyli drganie *pierwsze harmoniczne*, z dwoma węzłami na końcach i jedną strzałką w środku, ale również drgania *wyższe harmoniczne* z wieloma węzłami w środku (patrz rys. 5.34). Harmoniczne drgania mechanicznie wywołać można i na pręcie sprężystym ze swobodnymi końcami, z tą różnicą, że zamiast węzłów występują strzałki i odwrotnie (patrz rys. 5.35).

Podobnie rzecz przedstawia się z falami elektromagnetycznymi stojącymi, czyli z drganiami elektrycznymi wzdłuż drutu. Wywoływaliśmy już w dipolu iskrowym i w dipolu-rezonatorze drgania elektryczne podstawowe, w których potencjał wykazywał dwie strzałki na końcach i jeden węzeł w środku, prąd zaś odwrotnie: dwa węzły na końcach i jedną strzałkę w środku (patrz rys. 5.19 i 5.20). Oznacza to, że w przestrzeni otaczającej końce dipola panuje najsilniejsze pole elektryczne, w środku zaś zerowe. Natomiast w przestrzeni dookoła środka dipola panuje najsilniejsze pole magnetyczne, które na końcach dipola spada do zera. Odległość od strzałki do strzałki lub od węzła do węzła wynosi pół długości fali, a zatem długość dipola wynosi $\frac{1}{2}\lambda$ (rys. 5.40).

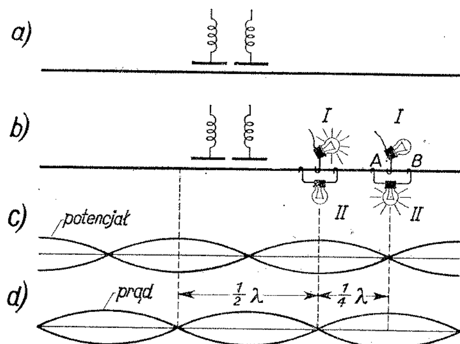
Do wzbudzenia drgań elektrycznych używaliśmy dotychczas dipola-rezonatora o długości $\frac{1}{2}\lambda$. Użyjmy obecnie do tego doświadczenia pręta, a raczej drutu, dwa, trzy lub więcej razy dłuższego. Wzbudźmy w nim drgania elektryczne tym samym generatorem co poprzednio (rys. 5.41a). Z łatwością stwierdzimy za pomocą żarówki *I* (jak na rys. 5.20 lub 5.41b), że drgania istotnie się odbywają i że strzałki potencjału znajdują się nie

tylko na końcach drutu, ale również i w środku, poprzedzielane od siebie węzłami. Jeśli natomiast żarówkę dołączymy do drutu w inny sposób, mianowicie obydwoma jej doprowadzeniami (*II* na rys. 5.41b) i będziemy przesuwać wzdłuż drutu, to zauważymy, że żarówka ta zaświeca się w tych miejscach, gdzie gaśnie żarówka *I* i odwrotnie. Nietrudno



Rys. 5.40. Dipol elektryczny jest w rezonansie z falą elektromagnetyczną o długości λ, jeśli jego długość wynosi $\lambda/2$. Wzdłuż dipola powstaje wtedy fala stojąca: na końcach dipola są strzałki pola elektrycznego z węzłami w środku (*a*), zaś w środku dipola jest strzałka pola magnetycznego z węzłami na końcach (*b*). Żarówka w *a*) pokazuje największy potencjał, żarówka w *b*) — największy prąd

zrozumieć, że żarówka *II* świeci tylko w tych miejscach, gdzie między punktami *A* i *B*, do których jest dołączona, płynie dość silny prąd (część tego prądu odgałęzia się bowiem do żarówki). A zatem żarówka ta, gdy świeci najsilniej, pokazuje nam strzałki prądu;



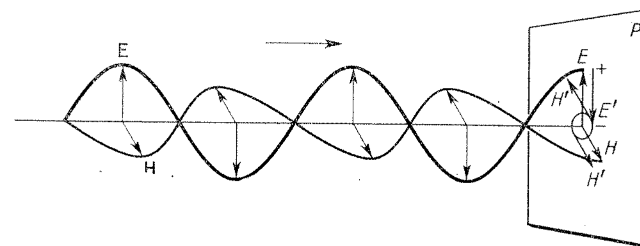
Rys. 5.41. a) Wytworzenie fali stojącej wzdłuż drutu; b) badanie rozkładu drgań potencjału (żarówką *I*) i prądu (żarówką *II*); c) wykres drgań potencjału i d) prądu w fali stojącej

natomiast przy zbliżaniu się do węzłów prądu — gaśnie. Tym sposobem znajdujemy, że rozkład drgań potencjału i prądu jest taki, jak pokazują krzywe na rys. 5.41c i d.

Rozkład ten świadczy wymownie o tym, że na drucie wytwarza się fala elektromagnetyczna stojąca. Zmierzmy jej długość, tzn. podwójną odległość pomiędzy dwoma sąsiednimi rozjaśnieniami żarówki. Okazuje się, że jest ona identyczna z długością fali, jaką wysyłał ten sam generator w wolną przestrzeń (por. doświadczenie na rys. 5.25).

Fale elektromagnetyczne mają tę samą długość, niezależnie od tego, czy rozchodzą się w wolnej przestrzeni, czy wzdłuż drutów. Ponieważ $c = \lambda f$ [por. wzór (5.37)], a w obu wypadkach częstotliwość drgań jest ta sama, przeto wnosimy stąd, że *fale elektromagnetyczne rozchodzą się z tą samą prędkością wzdłuż drutów, co i w wolnej przestrzeni.* Fakt ten przemawia za tym, że ośrodkiem, w którym przenosi się fala skierowana wzdłuż drutu, jest nie drut, lecz przestrzeń otaczająca. Jeśli drut zanurzyć np. w jakiejś cieczy, to prędkość fali będzie mniejsza niż 300 000 km/s: będzie ona właśnie taka sama, jak prędkość fali w przestrzeni wypełnionej tą cieczą.

Fala stojąca wytwarza się oczywiście na drucie w ten sposób, że fala postępująca nakłada się na falę odbitą od końców drutu. Przyjrzyjmy się wykresowi na rys. 5.41c. Na końcach drutu wytwarza się strzałka potencjału oraz węzeł prądu (oczywiście, bo przecież na końcu drutu natężenie prądu = 0). Zatem na końcach drutu istnieje strzałka



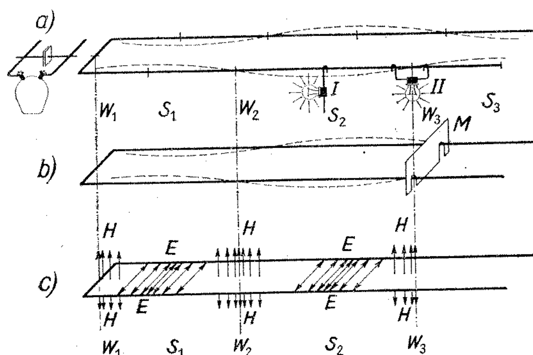
Rys. 5.42. Fala elektromagnetyczna pada na płytę przewodzącą *P*. Pole elektryczne fali *E* wywołuje w niej przesunięcie ładunków, które wytwarza przeciwnie skierowane pole *E'* i znosi pole fali. Przesunięcie ładunków — to prąd, który wytwarza wirowe pole magnetyczne *H'*: wzmacnia ono pole fali przed płytą i niszczy je za płytą (zastosujcie regułę śruby prawoskrętnej, jak na rysunku 3.17!). W ten sposób powstaje na płycie węzeł pola elektrycznego i strzałka pola magnetycznego

wektora elektrycznego i węzeł wektora magnetycznego. Widzimy więc, że fala zupełnie inaczej odbija się od końca drutu, aniżeli od płyty metalowej, gdyż na jej powierzchni wytwarzał się węzeł wektora elektrycznego i strzałka wektora magnetycznego (rys. 5.25). Przyczyna tego zjawiska leży w tym, że pole elektryczne fali wywołuje w płycie przesunięcie ładunków elektrycznych, a więc prąd (rys. 5.42). Przesunięte ładunki wywołują pole elektryczne własne przeciwnie skierowane aniżeli pole, które przesunięcie wywołało. Zatem pole wypadkowe w płycie i w jej pobliżu znika; powstaje węzeł pola elektrycznego. Tymczasem prąd w płycie wytwarza pole magnetyczne, które wzmacnia fale magnetyczne fali przed płytą, zaś niweczy je za płytą; przed płytą powstaje strzałka pola magnetycznego, zaś za płytą fala znika.

***§ 5.34. Fale wzdłuż linii dwuprzewodowej.** Wyobraźmy sobie, że drut, na którym wytwarza się fala stojąca, zostaje zgięty w środku w ten sposób, że obie jego połówki biegną do siebie równolegle w niewielkiej od siebie odległości. Przebieg drgań, a zatem rozkład węzłów i strzałek, pozostaje ten sam; sprawdzamy to za pomocą żarówek *I* i *II* w sposób wskazany na rys. 5.43a. Krzywa kropkowana wskazuje przebieg potencjału w pewnej chwili; widzimy, że naprzeciwko siebie znajdują się punkty, mające przeciwne potencjały. Dzięki temu pole elektryczne między drutami, w miejscach, gdzie są strzałki potencjału

(S_1, S_2, ...), ma znaczne natężenie (rys. 5.43c). Natomiast pomiędzy przeciwległymi węzłami potencjału (W_1, W_2, ...), tj. pomiędzy strzałkami prądu, wytwarza się silne pole magnetyczne. Sprawdzić to można za pomocą rezonatora zamkniętego z rys. 5.22.

Jeżeli na drutach, w miejscu gdzie się znajduje węzeł potencjału, umieścić niewielką blaszkę zwierającą oba druty („mostek" M na rys. 5.43b), przekonamy się, że przed blaszką nie zmienił się rozkład węzłów i strzałek, natomiast za blaszką — fali nie ma.



Rys. 5.43. Druty Lechera. Krzywa kropkowana przedstawia rozkład potencjału w danej chwili; W_1, W_2 i W_3 — węzły potencjału, a jednocześnie strzałki prądu; S_1, S_2 i S_3 — strzałki potencjału, a jednocześnie węzły prądu. Z lewej strony widać oscylator lampowy, opisany w drugiej części tej książki, który daje znacznie większą moc od dipola iskrowego

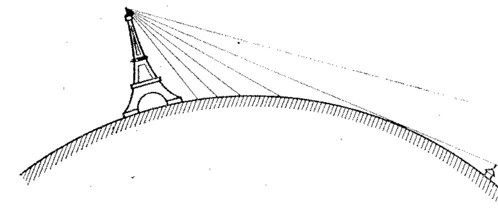
Interpretujemy to w ten sposób, że fala postępująca wzdłuż drutów odbija się od blaszki. Istotnie, na powierzchni blaszki znajduje się węzeł potencjału, a więc i węzeł pola elektrycznego, oraz strzałka prądu (sprawdzić żarówką *II*!), a więc i strzałka pola magnetycznego. Stosunki zatem są te same, jak przy odbiciu się fal swobodnych od ekranu metalowego (rys. 5.25 i 5.42).

Układ dwóch równoległych drutów, wyobrażony na rys. 5.43, nosi nazwę drutów Lechera. Używany jest m.in. do mierzenia długości fal elektromagnetycznych w rozmaitych cieczach, a zatem ich przenikalności elektrycznej. Do tego celu druty te należy umieścić w długim naczyniu, zawierającym badaną ciecz. (Jak zmierzyć długość fali w cieczy sposobem znacznie prostszym, choć mniej dokładnym — patrz § 5.31, rys. 5.36b).

***§ 5.35. Przegląd fal elektromagnetycznych.** Fale elektromagnetyczne stosowane w technice obejmują ogromny zakres długości fal: od wielu kilometrów do ułamka milimetra. Zakres ten dzieli się na wiele węższych zakresów. Oto ważniejsze z nich:

Długość fali	Nazwa	
10 000 m		
1 000 m	fale długie	
100 m	fale średnie	
10 m	fale krótkie	
1 m	fale ultrakrótkie	
1 dm	fale decymetrowe	
1 cm	fale centymetrowe	mikrofale
1 mm	fale milimetrowe	mikrofale
0,1 mm	fale submilimetrowe	mikrofale

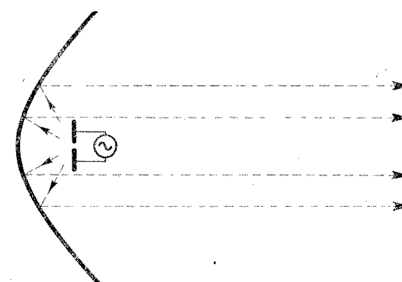
Fale długie, średnie, krótkie i ultrakrótkie stosowane są w radiotelegrafii i w radiofonii, w szczególności fale ultrakrótkie (6—7 m) stosuje się w telewizji; impulsy natężeniowe i synchronizacyjne przenosi się na jednej fali (około 6 m), a dźwięki — na drugiej (około 7 m). Fale ultrakrótkie nie mają w tym stopniu właściwości uginania się na przeszkodach, co fale dłuższe; nie mogą omijać przeszkód, rozchodzą się wzdłuż linii niemal prostych. Dlatego zasięg stacji ultrakrótkofalowych jest ograniczony krzywizną kuli ziemskiej (rys. 5.44). Żeby uczynić go jak największym, należy antenę umieścić jak najwyżej.



Rys. 5.44. Fale ultrakrótkie mają zasięg tym większy, im wyżej umieszczony jest dipol nadawczy oraz im wyżej umieszczony jest dipol odbiorczy

Fale decymetrowe, a szczególnie centymetrowe wykazują jeszcze większe podobieństwo do fal świetlnych. Można je wytwarzać w postaci smukłych wiązek, nawet równoległych, umieszczając dipol drgający w ognisku zwierciadła parabolicznego (rys. 5.45). Dzięki temu zasięg ich jest bardzo duży.

Ta właściwość fal centymetrowych sprawiła między innymi, że znalazły one zastosowanie w radarze, wynalazku, a raczej całej grupie wynalazków, które zostały rozwinięte w czasie ostatniej wojny.



Rys. 5.45. Wytworzenie smukłej wiązki fal centymetrowych

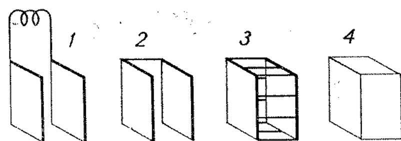
Od tej pory zainteresowanie nauki i techniki falami centymetrowymi i milimetrowymi, czyli *mikrofalami*, stale wzrasta. W nauce służą one bowiem do badania struktury materii, w technice znalazły i znajdują zastosowanie o wielkim znaczeniu. Wiązka mikrofal wysłana ze zwierciadła parabolicznego, natrafiając na przeszkody odbija się i wracając do urządzenia odbiorczego daje nam informacje o istnieniu przeszkody, o jej kierunku i odległości. Na tej zasadzie kontroluje się wysokość samolotu nad ziemią, odnajduje się samoloty obce i statki, bada się topografię i ukształtowanie terenu. W miarę skracania długości fal, trudności ich wytwarzania rosną. Przede wszystkim rosną trudności związane z generatorami mikrofal. Generatorami tymi są lampy elektronowe oparte na nowych zasadach (patrz część 2). Ponadto istnieją niezwykłe trudności w prze-

syłaniu mikrofal wzdłuż przewodów, a także w konstrukcji obwodów rezonansowych. W następnych paragrafach zapoznamy się tylko pobieżnie z najważniejszą z tych trudności oraz z nową techniką, która je pokonała.

*§ **5.36. Z techniki mikrofal: rezonatory wnękowe.** Obwód drgający składa się, jak już wiemy z elementu pojemnościowego i elementu indukcyjnego. Pomiędzy tymi dwoma elementami odbywają się wahania energii elektromagnetycznej: energia „przelewa się" z jednego elementu do drugiego (patrz rys. 4.84). Jednak każdy obwód drgający ma opór, który sprawia, że część energii oscylującej rozprasza się w postaci ciepła. Współczynnik „Q", jak wiemy z § 4.45, jest miarą *dobroci* obwodu

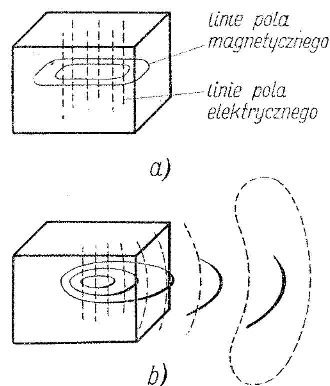
$$Q = \frac{\omega L}{R}. \tag{5.77}$$

Otóż dla fal coraz krótszych R katastrofalnie rośnie, głównie z powodu wzrastającego promieniowania obwodu. Mianowicie do energii traconej przez ciepło Joule'a dochodzi energia tracona przez promieniowanie, co się wyraża dodaniem do oporu omowego



Rys. 5.46. Od obwodu drgającego do komory rezonansowej. Przemiany te zmniejszają opór i uniemożliwiają wypromieniowanie: Q rośnie

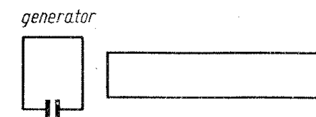
przyrostu zwanego „oporem promieniowania". Ażeby zwiększyć dobroć Q obwodu, należy więc zmniejszyć opór omowy i uniemożliwić wypromieniowywanie energii. Cel ten osiąga się przez transformację obwodu drgającego, którą w wystarczająco jasny sposób pokazuje rysunek 5.46. Obwód drgający zamienia się w zamkniętą „komorę rezo-



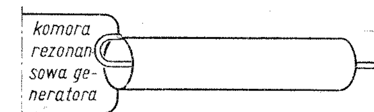
Rys. 5.47. a) Linie sił pola elektrycznego i magnetycznego przebiegają wewnątrz rezonatora wnękowego; b) gdy rezonator jest otwarty, zostaje wypromieniowana fala elektromagnetyczna

nansową", którą nazywamy także *rezonatorem wnękowym*. Na rysunku rezonator wnękowy na kształt prostopadłościanu. Pole elektryczne i magnetyczne nie wychodzi na zewnątrz rezonatora, promieniowania więc nie ma (rys. 5.47a); chyba, że zrobimy otwór w rezonatorze, wtedy energia zacznie z niego wypromieniowywać (rys. 5.47b).

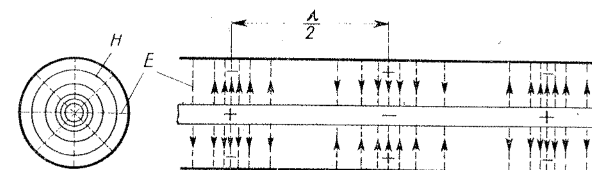
*§ **5.37. Z techniki mikrofal: linie współosiowe i falowody.** Jeśli komora rezonansowa jest zamknięta, nasuwa się pytanie, w jaki sposób doprowadza się do niej energię i w jaki sposób odprowadza się energię na zewnątrz (np. do anteny-dipola)? Gdyby chodziło



Rys. 5.48. Od linii dwuprzewodowej do linii współosiowej

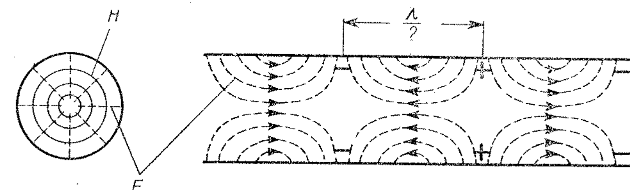


o fale ultrakrótkie, stosowałoby się linię dwuprzewodową. Lecz w dziedzinie mikrofal sposób ten nie prowadzi do celu, gdyż ze względu na silne promieniowanie, tłumienie fal byłoby zbyt silne. Linie sił pola elektrycznego i magnetycznego nie powinny wychodzić na zewnątrz. Linia dwuprzewodowa musi tedy ulec modyfikacji: jeden z przewodów



Rys. 5.49. Przebieg linii sił pola elektrycznego i magnetycznego wewnątrz linii współosiowej

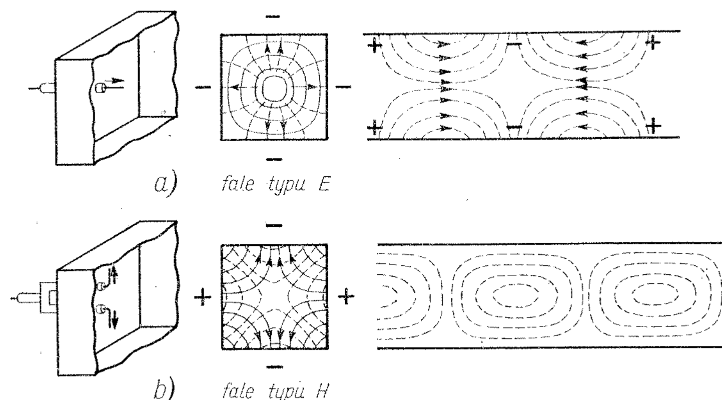
musi przemienić się w pancerz cylindryczny, obejmujący współosiowo drugi przewód. Powstanie w ten sposób tzw. *linia współosiowa* (rys. 5.48); strukturę pola elektromagnetycznego w przekroju poprzecznym i podłużnym przedstawia rys. 5.49.



Rys. 5.50. Przebieg linii sił pola elektrycznego i magnetycznego wewnątrz falowodu. Linie pola magnetycznego H tworzą pierścienie współśrodkowe

Jeśli długość fali jest dostatecznie mała w stosunku do średnicy cylindra zewnętrznego, przewód wewnętrzny staje się zbyteczny. Okazuje się, że fale mogą rozchodzić się wewnątrz pustej rury; nazywamy ją *falowodem*. W falowodzie linie sił pola elektrycznego łączą ze sobą ładunki różnoimienne, indukowane na wewnętrznej ściance (rys. 5.50). Natomiast linie magnetyczne przebiegają koncentrycznie. Struktura pola elektromagne-

tycznego może być w tym wypadku bardzo rozmaita: jedną z możliwych struktur przedstawia rys. 5.50. Zależy to od sposobu wprowadzenia drgań do falowodu i od jego profilu, który może być zarówno okrągły, jak prostokątny. Rysunek 5.51 pokazuje dwa sposoby wprowadzenia mikrofal do falowodu o przekroju prostokątnym. Fale wprowadzamy za pomocą kabla współosiowego. Na końcu ogołoconego przewodu wewnętrznego mamy drgania prądu elektrycznego, które wywołują rozkład pola elektrycz-



Rys. 5.51. Dwa sposoby (spośród wielu) wprowadzenia drgań elektromagnetycznych do falowodu; a) linie magnetyczne są poprzeczne, elektryczne zaś mają składową podłużną (typ E); b) linie magnetyczne mają składową podłużną, elektryczne są poprzeczne (typ H)

nego i magnetycznego, wskazany na rysunku. W pierwszym wypadku pole elektryczne ma składową wzdłuż osi, a pole magnetyczne jest wyłącznie poprzeczne; są to fale „typu E". W drugim wypadku pole magnetyczne ma składową podłużną, natomiast pole elektryczne drga tylko poprzecznie; są to fale „typu H".

Technika mikrofalowa rozwinęła się bardzo i doszła do wielkiej doskonałości w ostatnich dziesiątkach lat. Ma ona wielkie zastosowanie w nauce, szczególnie w fizyce, w radioastronomii i w chemii, jak również w technice, zwłaszcza w łączności radiowej i satelitarnej. Technice mikrofalowej poświęcono już wiele dzieł monograficznych. Czytelnik zainteresowany tą dziedziną powinien zapoznać się z literaturą*).

Zagadnienia do rozdziału 5

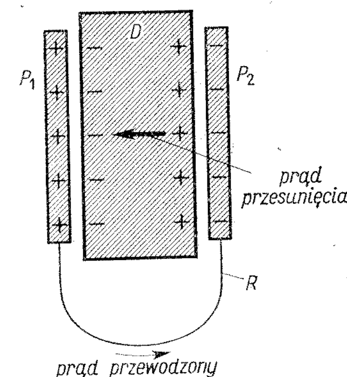
Do części A

5.1. Kondensator o pojemności C, złożony z dwóch płyt o powierzchni S równoległych do siebie, naładowany do napięcia U_0, zostaje rozładowany bezoscylacyjnie, czyli aperiodycznie, przez wielki opór R. Obliczyć gęstość prądu przesunięcia I w dielektryku wypełniającym kondensator, w funkcji czasu, biorąc za punkt wyjścia wzór (2.4), § 2.8.

*) Wstępem do studiów z dziedziny mikrofal jest książka monograficzna autora pt. *Mikrofale i spektroskopia mikrofalowa*, PWN, Warszawa 1953.

Odpowiedź. Ponieważ prąd przesunięcia wraz z prądem przewodzonym tworzą prąd zamknięty (patrz § 5.7), przeto oba te prądy mają przeciwne kierunki; objaśnia to rys. 5.52. Ze wzoru (2.4) dla prądu przewodzonego mamy

$$i = \frac{U_0}{R}\, e^{-t/RC}. \tag{5.78}$$



Rys. 5.52. Prąd przewodzony w drucie i prąd przesunięcia w dielektryku, w czasie rozładowania kondensatora przez opór R, stanowią jeden prąd zamknięty, P_1 i P_2 — płyty kondensatora, D — dielektryk. Ten sam proces, lecz w przeciwnym kierunku, odbywa się w czasie ładowania kondensatora

Prąd przesunięcia w dielektryku wyrazi się tym samym wzorem, lecz z przeciwnym znakiem:

$$i = -\frac{U_0}{R}\, e^{-t/RC}. \tag{5.79}$$

Dzieląc obie jego strony przez S otrzymamy wzór wyrażający gęstość prądu przesunięcia w dielektryku:

$$I = -\frac{U_0}{SR}\, e^{-t/RC}. \tag{5.80}$$

5.2. Rozwiązać zagadnienie poprzednie, korzystając ze wzoru (5.4a), § 5.3. Pokazać, że wynik jest identyczny z rozwiązaniem poprzednim.

Odpowiedź. Wzór (2.3) w § 2.8, po podzieleniu obu stron przez d (odległość płyt kondensatora), daje

$$E = E_0\, e^{-t/RC}, \tag{5.81}$$

gdzie $E = U/d$ jest natężeniem pola elektrycznego w dielektryku, zaś $E_0 = U_0/d$ — wartością początkową E. Korzystając ze wzoru (5.4a) otrzymamy:

$$I = \varepsilon_0\, \varepsilon \frac{dE}{dt} = \varepsilon_0\, \varepsilon\, E_0\, e^{-t/RC}\left(-\frac{1}{RC}\right) = -\frac{\varepsilon_0\, \varepsilon\, E_0}{RC}\, e^{-t/RC}.$$

Jeśli podstawimy znane wyrażenie (2.14a) na pojemność kondensatora płaskiego,

$$C = \varepsilon_0\, \varepsilon \frac{S}{d},$$

otrzymamy wzór

$$I = -\frac{U_0}{SR}\, e^{-t/RC}, \tag{5.82}$$

identyczny ze wzorem (5.80) z zagadnienia poprzedniego.

5.3. Sprawdzić, że charakterystyczne wyrażenie RC ma wymiar czasu. Obliczyć, do jakiej części wartości początkowej $I_0 = \frac{U_0}{SR}$ spadnie gęstość prądu przesunięcia, a zatem i natężenie prądu przewodzonego, po czasie $\tau = RC$.

Odpowiedź. Ponieważ $I = I_0 e^{-t/\tau}$, przeto dla $t = \tau$ mamy $\frac{I}{I_0} = \frac{1}{e}$; po czasie $\tau = RC$ prąd spada do (1/e)-tej wartości początkowej.

5.4. Przez długi przewodnik płynie prąd $i = 10$ A. Obliczyć siłę magnetomotoryczną $\oint H_s ds$ wzdłuż dowolnego konturu okrążającego przewodnik jeden raz a) w jednostkach MKSA, b) w jednostkach em CGS.

Odpowiedź. a) $\oint H_s ds = 10$ A; b) $\oint H_s ds = 4\pi i$ (j. em CGS) $= 4\pi$ j. em CGS.

5.5. W poprzednim zagadnieniu przyjąć, że kontur dookoła prądu ma postać okręgu o promieniu $r = 10$ cm. Obliczyć natężenie pola magnetycznego H w punkcie odległym o r od przewodnika (uważanego za nieograniczenie długi). Wyrazić H w jednostkach układu MKS i układu em CGS; porównać obie jednostki.

Odpowiedź. a) $\oint H_s ds = H \cdot 2\pi r = i$; $H = \frac{i}{2\pi r} = \frac{10 \text{ A}}{2\pi \cdot 0{,}1 \text{ m}} = 15{,}9155 \frac{\text{A}}{\text{m}}$. b) $\oint H_s ds = H \cdot 2\pi r = 4\pi i$ (j. em CGS); $H = \frac{2i}{r} = \frac{2 \text{ j. em CGS}}{10 \text{ cm}} = 0{,}2$ Oe; 0,2 Oe $= 15{,}9155 \frac{\text{A}}{\text{m}}$, stąd 1 Oe $= 79{,}577$ A/m.

5.6. W zagadnieniu 5.2 gęstość prądu przesunięcia w dielektryku kondensatora wyrażona została wzorem (5.82). Obliczyć na podstawie I równania Maxwella siłę magnetomotoryczną prądu przesunięcia.

Odpowiedź. Pole jest jednorodne na całej powierzchni S, wobec tego równanie (5.7c) daje:

$$\oint H_s ds = \iint \dot{D}_n ds = \dot{D}_n S,$$

a ponieważ gęstość prądu przesunięcia $\dot{D}_n$ wyraża się wzorem (5.82), przeto

$$\oint H_s ds = -\frac{U_0}{R} e^{-t/RC},$$

co jest identyczne z siłą magnetomotoryczną prądu w przewodniku łączącym płyty kondensatora, z przeciwnym znakiem [por. wzór (5.78)].

5.7. Operator ∇ określa wzór (5.19):

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Jest to operator wektorowy. Stosowaliśmy go do wektorów pola elektromagnetycznego mnożąc formalnie operator przez wektor, zarówno wektorowo jak i skalarnie. Otrzymaliśmy w ten sposób wektor rot **H** (§5.12) i skalar div **D** (§ 5.13). Operator ∇ zastosowany do skalara (np. φ) nazywa się „gradientem" i pisze się tak:

$$\text{grad}\,\varphi = \nabla\varphi = \mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{5.83}$$

Jeżeli φ oznacza np. potencjał w polu elektrostatycznym w funkcji współrzędnych (x, y, z), to $-$grad φ wyraża wektor pola **E**:

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\,\varphi = -\nabla\varphi = -\left(\mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) \tag{5.84}$$

(wzór ten wprowadziliśmy już w § 2.39; patrz także A. Piekara, *Mechanika ogólna*, § 103, PWN, 1961). Mówimy, że pole elektrostatyczne ma potencjał. Udowodnić, że zawsze jest spełniony związek

$$\text{rot}\,\nabla\varphi = 0, \tag{5.85}$$

czyli, że pole mające potencjał jest bezwirowe.

Odpowiedź. Zastosować definicję operatora rot wyrażoną wzorem (5.20) do składowych wektora (5.84).

5.8. Obliczyć dywergencję wektora pola mającego potencjał: div $\nabla\varphi$, czyli div grad φ, czyli $\nabla^2\varphi$.

Odpowiedź. Zastosować wzór (5.83) i pomnożyć go skalarnie przez operator ∇ według wzoru (5.22). Otrzymamy

$$\text{div grad}\,\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}. \tag{5.86}$$

Operator div grad nazywa się *operatorem Laplace'a* albo *laplasjanem*; oznacza się go symbolem Δ (delta) albo ∇^2:

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{5.87}$$

5.9. Operator Laplace'a stosowaliśmy do skalaru φ. Można go zastosować do składowych dowolnego wektora **A**:

$$\left.\begin{aligned} \Delta A_x &= \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}, \\ \Delta A_y &= \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}, \\ \Delta A_z &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}, \end{aligned}\right\} \tag{5.88}$$

Wektor, którego składowymi są ΔA_x, ΔA_y, ΔA_z nazywa się laplasjanem wektora **A**:

$$\Delta\mathbf{A} = \mathbf{i}\Delta A_x + \mathbf{j}\Delta A_y + \mathbf{k}\Delta A_z. \tag{5.89}$$

Udowodnić, że

$$\text{rot rot}\,\mathbf{A} = \text{grad div}\,\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A}. \tag{5.90}$$

Odpowiedź. Zastosować operację rot wyrażoną wzorem (5.20) do wektora **A**, wyrażonego analogicznym wzorem do (5.18). Zastosować operację grad (5.19) do skalara div **A**, utworzonego według wzoru (5.22) (nie mylić z div grad!). Po podstawieniu otrzymanych wyrażeń wraz z (5.89) (5.88) do wzoru (5.90) uzyskujemy tożsamość, co dowodzi słuszności twierdzenia (5.90).

Do części B

5.10. Z jaką szybkością musi zmieniać się strumień indukcji magnetycznej przechodzący przez kontur zamknięty, aby indukować w nim siłę elektromagnetyczną 1 V? Szybkość zmian strumienia indukcji, $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, wyrazić w jednostkach układu MKSA i układu em CGS.

Odpowiedź. Na podstawie prawa Faradaya (5.23) wartość siły elektromotorycznej $\oint E_s ds = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ równa jest poszukiwanej szybkości, czyli $-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 1$ V $= 1\frac{\text{Wb}}{\text{s}} = 10^8 \frac{\text{Mx}}{\text{s}}$.

5.11. W zagadnieniu poprzednim kontur jest okręgiem koła o promieniu $r = 0{,}1$ m. Obliczyć w jednostkach układu MKSA natężenie pola elektrycznego na obwodzie koła.

Odpowiedź.

$$E = \frac{1 \text{ V}}{2\pi r} = 1{,}59155 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

5.12. W zagadnieniu 5.10 obliczyć w jednostkach układów MKSA i em CGS szybkość zmian wektora indukcji magnetycznej **B**, jeśli promień r konturu ma stałą wartość 0,1 m i jeśli pole w obszarze konturu jest jednorodne, a płaszczyzna konturu prostopadła do wektora **B**.

Odpowiedź. Z równania (5.24) mamy $-\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{1 \text{ V}}{\pi r^2} = 31{,}831 \frac{\text{V}}{\text{m}^2} = 31{,}831 \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} = 31{,}831 \frac{\text{Gs}}{\text{s}}$.

Do części C

***5.13.** (P). Zrealizować połączenie radiotelegraficzne między dwoma oddalonymi od siebie pokojami według schematu na rys. 5.28 i 5.29.

***5.14.** Radiostacje Polskiego Radia nadają na falach o wymienionych długościach: Warszawa 1322 m i 367 m, Katowice 407 m, Wrocław 278 m, Poznań 249 m, Szczecin 238 m, Gdańsk 230 m, Toruń i Bydgoszcz 219 m, Łódź 202 m, i Kraków 200 m. Niektóre typy radioodbiorników mają skale wyskalowane nie według długości fal w metrach, lecz według częstotliwości drgań, wyrażonej w kilohercach. Obliczyć częstotliwość drgań wymienionych radiostacji w kHz.

Odpowiedź. Według tej samej kolejności: $f = 227$, 818, 737, 1079, 1205, 1260, 1304, 1370, 1484 i 1500 kHz.

***5.15.** Dipol iskrowy wysyła fale o długości 2 m. Obliczyć częstotliwość drgań prądu w dipolu.

Odpowiedź. $f = c/\lambda = 150$ MHz.

***5.16.** Najkrótsze fale Hertza, jakie otrzymała Arkadiewa-Głagolewa przy użyciu mikroskopijnych dipoli (zawiesina opiłek metalowych w oleju) miały długość około 0,2 mm. Obliczyć częstotliwość drgań.

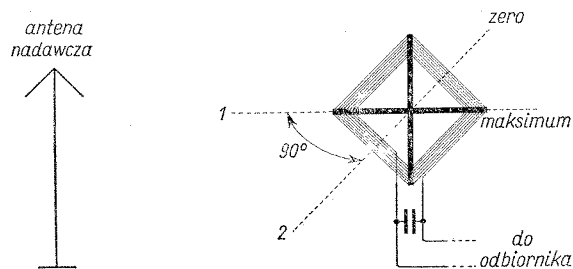
Odpowiedź. $f = c/\lambda = 1{,}5 \cdot 10^6$ MHz $= 1500$ GHz (gigaherców).

***5.17.** Stacja nadawcza przedstawiona na rys. 5.29 zawiera w obwodzie drgającym pojemność wynoszącą 555,6 pF = 500 cm (łącznie z krótką anteną) oraz samoindukcję 0,0002 H $= 2 \cdot 10^5$ cm. Obliczyć długość fali wypromieniowanej.

Odpowiedź. $\lambda = 2\pi c\sqrt{L\,(\text{henrów}) \cdot C\,(\text{faradów})} = 2\pi\sqrt{L\,(\text{cm}) \cdot C\,(\text{cm})} = 628$ m.

***5.18.** Każdemu słuchaczowi radia znany jest tzw. „fading", czyli zanikanie fali, polegające na tym, że odbiór pewnej stacji staje się chwilowo słabszy, niekiedy nawet zanika, po czym wraca znów do normalnej siły. Wytłumaczyć to zjawisko biorąc pod uwagę następujące okoliczności: a) stacja nadawcza wysyła zawsze falę „przyziemną", posuwającą się tuż nad powierzchnią ziemi oraz falę wybiegającą na znaczne wysokości; b) jonosfera (patrz § 2.35) składająca się z warstw powietrza zjonizowanego jest przewodząca i jako przewodnik odbija fale elektromagnetyczne (interferencja z falą przyziemną!). Poprzeć objaśnienie odpowiednim rysunkiem.

***5.19.** Antena ramowa jest to kilkadziesiąt zwojów drutu nawiniętego na krzyżaku drewnianym w ten sposób, że uzwojenie ma kształt kwadratu, o boku długości kilku decymetrów. Do końców uzwojenia dołącza się kondensator obrotowy w celu dostrajania odbiornika do danej stacji nadawczej.

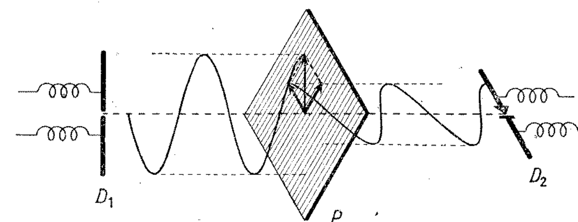


Rys. 5.53. Antena ramowa w pozycji (*1*), przy której odbiór jest najsilniejszy; (*2*) — pozycja, przy której odbiór zanika

Antenę ramową ustawiamy w płaszczyźnie pionowej i obracamy dookoła osi pionowej. Wytłumaczyć: 1. Dlaczego odbiór stacji jest najsilniejszy, gdy antena ramowa jest w takim położeniu, że przedłużenie płaszczyzny ramy przechodzi przez antenę stacji nadawczej (rys. 5.53)? 2. Dlaczego odbiór zupełnie zanika, gdy antenę ramową z poprzedniego położenia obrócić o 90 stopni? Dzięki tej właściwości antena ramowa znalazła doniosłe zastosowanie. Obmyślić: a) w jaki sposób dwie stacje nadbrzeżne mogą wyznaczyć (na mapie) położenie statku dającego sygnały radiowe SOS? b) W jaki sposób samolot może lądować „na ślepo" (na przykład we mgle), według sygnałów odbieranych ze stacji nadawczej na lotnisku.

Nowoczesne „anteny ferrytowe" działają jako anteny odbiorcze na tej samej zasadzie. Mają one postać cewki nasadzonej na pręcie z ferrytu (o ferrytach znajdzie czytelnik informacje na końcu § 3.29). Ferryty odznaczają się bardzo dużą opornością właściwą, a tym samym znikomymi stratami na prądy Foucaulta. Z tego względu ferryty stosowane są w radiotechnice, jako rdzenie cewek wysokiej częstotliwości. Dzięki tym nowoczesnym materiałom dawne anteny ramowe przekształciły się w małe anteny ferrytowe. Dla uzyskania maksymalnego natężenia sygnału (tj. prądu w cewce), antenę ferrytową należy ustawić w takiej pozycji, aby rdzeń jej skierowany był swoją osią podłużną wzdłuż linii magnetycznych odbieranej fali elektromagnetycznej.

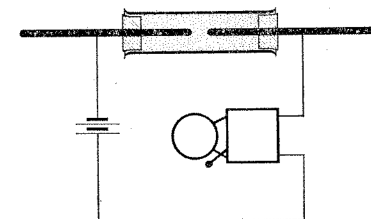
***5.20.** (P). Zmiana płaszczyzny drgań fali elektromagnetycznej. Między dipolem nadawczym a odbiorczym ustawiamy ramkę drewnianą, na której rozpięte są druty miedziane, równolegle do siebie, w odstępach centymetrowych. Stwierdzamy, że gdy druty są prostopadłe do wektora



Rys. 5.54. Przegroda z drutów (*P*) ma właściwość przepuszczania tylko tej składowej wektora elektrycznego, która jest prostopadła do drutów. D_1 i D_2 — dipole iskrowe: nadawczy i odbiorczy

elektrycznego fali, wówczas fala przez nie przechodzi; natomiast gdy są równoległe do wektora elektrycznego, wówczas ramka zachowuje się jak płyta metalowa (dlaczego?) i nie przepuszcza promieniowania. Dipol odbiorczy skrzyżować z nadawczym; galwanometr nie daje wychylenia. Wstawić między nie przegrodę z drutów tak, jak to wskazuje rys. 5.54. W położeniu, w którym druty tworzą kąt 45° z płaszczyzną drgań wektora elektrycznego, wychylenie galwanometru jest największe. Wytłumaczyć to zjawisko, rozłożywszy wektor elektryczny fali na dwa wektory składowe: równoległy i prostopadły do drutów.

***5.21.** (P). Koherer. Rurka szklana napełniona opiłkami metalowymi stawia prądowi bardzo wielki opór. Umieśćmy taką rurkę w środku dipola odbiorczego, tak aby obie połówki dipola oddzielone były od siebie warstwą opiłek. Gdy tylko na dipol padnie fala elektromagnetyczna, rurka zaczyna



Rys. 5.55. Koherer w połączeniu z dzwonkiem. Gdy na dipol elektryczny padną fale Hertza, dzwonek dzwoni

dobrze przewodzić prąd. Dzwonek włączony wraz z baterią, tak jak wskazuje rys. 5.55, zaczyna dzwonić. Gdy fala zniknie, dzwonek dzwoni nadal; dopiero po lekkim wstrząśnięciu rurki — zamilknie. Rurka ta, zwana „kohererem", odegrała znaczną rolę przy pierwszych próbach z radiotelegrafią w końcu ubiegłego stulecia. Wytłumaczenie działania: wielki opór koherera spowodowany jest oporem kontaktowym warstewek tlenków pokrywających opiłki; fala elektromagnetyczna wywołuje drgania elektryczne w dipolu i powoduje powstanie mikroskopijnych iskierek między opiłkami, które wzdłuż pewnej drogi zostają spojone; wytwarza się swego rodzaju „pomost" o małym oporze, który dopiero przez wstrząśnięcie zostaje zniszczony.

Do części D

5.22. Szczególnym rozwiązaniem równania falowego (5.47),

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \tag{5.91}$$

jest funkcja falowa o rozdzielonych zmiennych (5.50), przedstawiająca falę stojącą sinusoidalną. Dana jest ogólniejsza funkcja o rozdzielonych zmiennych:

$$\Phi(x) = \Psi(x)\, e^{j\omega t}, \tag{5.92}$$

przedstawiająca drganie harmoniczne jednowymiarowego ośrodka o rozkładzie amplitudy wyrażającym się funkcją $\Psi(x)$. Jakie równanie musi spełniać amplituda $\Psi(x)$, aby funkcja (5.92) była rozwiązaniem równania falowego (5.91)?

Odpowiedź. Korzystając ze wzoru (5.92) należy obliczyć kolejne pochodne cząstkowe $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ i $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$ oraz $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ i $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$. Na drugie pochodne otrzymujemy wyrażenia:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{d^2 \Psi}{dx^2} e^{j\omega t},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\Psi(x)\, e^{j\omega t}\omega^2.$$

Podstawienie do równania (5.91) daje:

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + k^2 \Psi = 0, \tag{5.93}$$

ponieważ $\frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{Tv} = \frac{2\pi}{\lambda} = k$. Równanie (5.93) jest równaniem różniczkowym o pochodnych cząstkowych; określa ono rozkład amplitudy $\Psi(x)$ fali stojącej wzdłuż osi x. Jest to więc równanie fali *nie zawierające czasu*, a że zawiera amplitudę, nazywane jest *równaniem amplitudowym*. Odgrywa ono ważną rolę w strukturze atomu i jądra atomowego.

5.23. Dotychczas poznaliśmy równanie ruchu falowego w jednym wymiarze; ma ono postać

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}. \tag{5.94}$$

Stosuje się do fal rozchodzących się wzdłuż sprężystej liny, struny, słupa powietrza itp.; nazywają je często „równaniem struny drgającej". Równanie

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \tag{5.95}$$

opisuje ruch fal na powierzchni, a więc nieraz bardzo skomplikowane drgania membran, płyt itp. (figury Chladniego dają obraz linii węzłowych), nazywa się ono „równaniem drgającej membrany". Wreszcie równanie

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \tag{5.96}$$

opisuje ruch fal w przestrzeni trójwymiarowej, np. w powietrzu, w wodzie, w bryle ciała stałego. Lewa strona tego równania jest laplasjanem funkcji trzech zmiennych (przestrzennych):

$$\Delta\Phi(x, y, z) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}. \tag{5.97}$$

Równanie falowe ma nieskończenie wiele rozwiązań szczególnych, zwanych *funkcjami harmonicznymi*. Zależnie od charakteru zjawiska i powierzchni ograniczających ośrodek, wygodnie jest obrać inny układ współrzędnych aniżeli kartezjański. Obliczyć laplasjan $\Delta\Phi(x, y, z)$ we współrzędnych sferycznych (rys. 5.56).

Odpowiedź. Z przedstawionego rysunku od razu wynikają następujące transformacje:

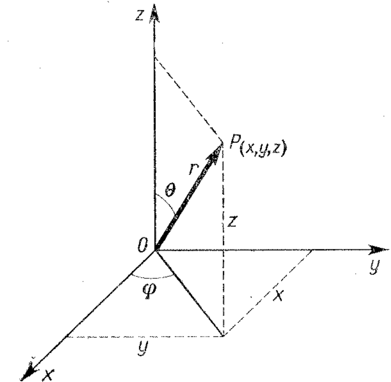
$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta. \tag{5.98}$$

Obliczamy według reguły łańcuchowej

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

a następnie, stosując ponownie tę samą regułę i korzystając z odwrotnych transformacji (5.98), obliczamy $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$. Podobnie należy obliczyć $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$ i $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$. Dodając do siebie otrzymane wyrażenia obliczamy laplasjan funkcji Φ we współrzędnych sferycznych:

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}. \tag{5.99}$$



Rys. 5.56. Współrzędne sferyczne: r, θ, φ. Z rysunku tego i ze znanych reguł trygonometrycznych wynikają transformacje (5.98)

5.24. Rachunki zagadnienia poprzedniego są dość skomplikowane. W niektórych jednak zagadnieniach (patrz zagadnienie 5.25) poszukuje się funkcji kulisto symetrycznej, tzn. zależnej tylko od r. Przeprowadzić obliczenie laplasjana funkcji $\Phi(x, y, z)$ w tym szczególnym wypadku.

Odpowiedź. Otrzymamy

$$\Delta\Phi = \frac{\partial \Phi^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r}; \tag{5.100}$$

jest to oczywiście szczególny przypadek wyrażenia (5.99) dla $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0$.

5.25. Funkcja falowa

$$\Phi = \frac{\Phi_0}{r} e^{j(\omega t - kr)} \tag{5.101}$$

reprezentują falę kulistą, rozchodzącą się we wszystkich kierunkach (dowolne r) z tą samą prędkością $\frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = v$. Amplituda tej fali, Φ_0/r, maleje z pierwszą potęgą odległości. Pokazać, że funkcja ta jest rozwiązaniem szczególnym równania falowego w trzech wymiarach (5.97):

$$\Delta\Phi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}.$$

Odpowiedź. Laplasjan $\Delta\Phi$ wyrazić we współrzędnych sferycznych. Ponieważ Φ (5.101) zależy jedynie od r i t, zastosować wzór (5.100):

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}. \tag{5.102}$$

Obliczyć ze wzoru (5.101) $\frac{\partial\Phi}{\partial r}$, $\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}$ i $\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$ oraz podstawić do równania (5.102). Otrzymujemy tożsamość.

5.26. Funkcję falową kulisto symetryczną (5.101) można napisać w postaci

$$\Phi_1=\frac{\Phi_0}{r}e^{-jk(r-vt)}.$$

Funkcja ta przedstawia falę kulistą biegnącą od środka układu. Natomiast funkcja

$$\Phi_2=\frac{\Phi_0}{r}e^{-jk(r+vt)}$$

reprezentuje falę biegnącą ku środkowi układu (np. odbitą od powierzchni kulistej o środku w początku układu, ograniczającej ośrodek). Obie fale nakładając się na siebie dają falę kulistą stojącą:

$$\Phi=\Phi_1+\Phi_2=\frac{\Phi_0}{r}[e^{-jk(r-vt)}+e^{-jk(r+vt)}]. \tag{5.103}$$

Udowodnić, że fala stojąca wyrażona powyższym równaniem jest również rozwiązaniem (szczególnym) równania falowego w trzech wymiarach (5.97) lub (5.102).

Odpowiedź. Z równania (5.103) obliczamy $\frac{\partial\Phi}{\partial r}$ i $\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}$ oraz $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ i $\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$; stwierdzamy, że równanie falowe (5.102) jest spełnione.

5.27. Ogólne rozwiązanie równania falowego w trzech wymiarach wyrazić można w postaci sumy dwóch dowolnych funkcji zmiennych $r-vt$ i $r+vt$:

$$\Phi=\frac{1}{r}[f(r-vt)+g(r+vt)]. \tag{5.104}$$

Sprawdzić, że funkcja Φ tej postaci spełnia równanie falowe (5.102).

Odpowiedź. Obliczamy te same pochodne cząstkowe jak w zagadnieniu poprzednim. Funkcja (5.104) przedstawia dwie fale kuliste, na ogół nieperiodyczne, biegnące *od* i *do* środka układu. Jeśli $f=\sin k(r-vt)$ i $g=\sin k(r+vt)$, wówczas obie fale, nakładając się, dadzą falę stojącą periodyczną.

5.28. Załóżmy, że szczególne rozwiązanie równania falowego (5.97) ma postać funkcji o rozdzielonych zmiennych:

$$\Phi(x,y,z,t)=\Psi(x,y,z)\,\psi(t). \tag{5.105}$$

Funkcja ta przedstawia falę stojącą w przestrzeni o amplitudzie $\Psi(x,y,z)$, określonej dla każdego punktu przestrzeni (x,y,z) i niezależnej od czasu. Aby funkcja $\Phi(x,y,z,t)$ spełniała równanie falowe, tzn. aby rzeczywiście przedstawiała ruch falowy ośrodka, funkcja $\Psi(x,y,z)$ musi spełniać pewne równanie nie zawierające czasu. Napisać to równanie. Określić, jakie równanie musi spełniać funkcja czasowa $\psi(t)$.

Odpowiedź. Obliczamy pochodne cząstkowe $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$ i $\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$ z równości (5.105):

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\psi(t),$$

....

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=\Psi(x,y,z)\frac{d^2\psi}{dt^2}.$$

Podstawmy te wyrażenia do równania falowego (5.97):

$$v^2\frac{\Delta\Psi}{\Psi}=\frac{\frac{d^2\psi}{dt^2}}{\psi}.$$

Licznik i mianownik lewej strony zależą tylko od współrzędnych przestrzennych, zaś prawej strony — tylko od czasu. Zatem obie strony muszą być równe tej samej stałej; oznaczmy ją (dla wygody) przez $-\omega^2$. Prawa strona daje równanie ruchu drgającego

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2}+\omega^2\psi(t)=0, \tag{5.106}$$

którego rozwiązanie ogólne jest

$$\psi(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t \tag{5.107}$$

(sprawdzić!). Stąd widać sens fizyczny stałej ω: jest to częstotliwość kołowa drgań. Lewa strona daje równanie

$$\Delta\Psi+k^2\Psi=0. \tag{5.108}$$

gdzie $k=\frac{\omega}{v}=\frac{2\pi}{\lambda}$ jest tzw. *liczbą falową*. Jest to niezależne od czasu równanie falowe, zwane *równaniem amplitudowym*. Szczególnym jego przypadkiem jest równanie (5.93).

Uwaga. Równanie (5.108) określa rozkład amplitudy w przestrzeni wypełnionej falami stojącymi. Odgrywa ono niezwykle ważną rolę w teorii budowy atomu. Równanie to, ze współczynnikiem k określonym warunkami kwantowymi, nosi nazwę *równania Schrödingera*.

5.29. Zagadnienie 5.28 rozwiązać dla ośrodka jednowymiarowego. Na tej podstawie pokazać, że struna unieruchomiona na obu końcach może wykonywać drgania z dowolną liczbą węzłów.

Odpowiedź. Założenie separacji zmiennych daje

$$\Phi(x,t)=\Psi(x)\,\psi(t). \tag{5.109}$$

Obie funkcje $\Psi(x)$ i $\psi(t)$ spełniają równania różniczkowe zwyczajne:

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2}+k^2\Psi(x)=0, \tag{5.110}$$

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2}+\omega^2\psi(t)=0, \tag{5.111}$$

gdzie k^2 i ω^2 są stałymi o znanym sensie fizycznym. Rozwiązanie ogólne równania (5.110) jest

$$\Psi(x)=A\cos kx+B\sin kx. \tag{5.112}$$

Warunki brzegowe dają: 1) dla $x=0$: $\Psi(0)=0$, stąd $A=0$, 2) dla $x=l$ (l — długość struny): $\Psi(l)=0$, stąd (ponieważ B jest dowolną stałą $\neq 0$)

$$\sin kl=0.$$

Równość powyższa spełniona jest wówczas, gdy $kl=n\pi$ (n — liczba całkowita), czyli gdy

$$k=\frac{n\pi}{l}. \tag{5.113}$$

Dla stałej B obierzmy wartość 1. Wtedy $\Psi(x)$, jak widać ze wzoru (5.112), przybiera n wartości:

$$\Psi_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x. \tag{5.114}$$

Wartości te odpowiadają n różnym długościom fali, gdyż $k=\frac{2\pi}{\lambda_n}$, a zatem $\frac{2\pi}{\lambda_n}=\frac{n\pi}{l}$, stąd

$$\lambda_n=\frac{2l}{n}. \tag{5.115}$$

Każdej z tych długości fal odpowiada częstotliwość $f_n = \frac{v}{\lambda_n}$, zatem

$$f_n = \frac{vn}{2l} \tag{5.116}$$

lub

$$\omega_n = \frac{vn\pi}{l}. \tag{5.117}$$

W ten sposób pokazaliśmy, że struna drgając dzieli się na n odcinków, każdy o długości

$$\frac{l}{n} = \frac{1}{2}\lambda_n.$$

Każde z tych drgań, dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ ma częstotliwość wyrażoną wzorem (5.116) lub (5.117). Jeśli częstotliwość podstawową (albo „pierwszą harmoniczną") dla $n = 1$ oznaczymy przez f_1, to kolejne częstotliwości harmoniczne będą:

druga harmoniczna: $f_2 = 2f_1$,
trzecia harmoniczna: $f_3 = 3f_1$,
czwarta harmoniczna: $f_4 = 4f_1$ itp.

Uwaga. Pisząc rozwiązanie równania (5.111) analogicznie do (5.107), dla częstotliwości ω_n:

$$\Psi(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t,$$

możemy wyrazić rozwiązanie równania falowego jednowymiarowego (5.91), dla warunków brzegowych $\Psi(0) = \Psi(l) = 0$, w postaci:

$$\Phi_n(x, t) = (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin \frac{n\pi}{l} x. \tag{5.118}$$

Funkcji takich jest n; nazywają się one *funkcjami charakterystycznymi*. Wartości $\omega_n = \frac{vn\pi}{l}$, dla których istnieją rozwiązania, nazywają się *wartościami charakterystycznymi* albo *wartościami własnymi* (w tym przypadku: drgającej struny). Zespół wartości własnych, $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$, nazywa się *widmem* (w tym zagadnieniu: drgającej struny). Każdej funkcji charakterystycznej odpowiada więc mniej lub więcej złożone drganie struny (patrz rys. 5.33). Drgania te nazywają się *normalnymi modami* struny. Mamy więc *mod podstawowy* ($n = 1$) i *wyższe mody normalne* ($n = 2, 3, \ldots$); w akustyce nazywają się one *tonami harmonicznymi*. Mody podstawowe drgającej membrany są bardziej złożone i określają się nie jedną liczbą całkowitą n, lecz dwiema liczbami całkowitymi n, m (dla dwóch współrzędnych, np. x i y lub φ i r); podobnie mody drgającej bryły wymagają do określenia trzech liczb całkowitych. W ten sposób do zagadnienia ruchu falowego wkroczyły poprzez warunki brzegowe liczby całkowite, odpowiadające zbiorowi określonych, dozwolonych częstotliwości. W ten sam sposób w zagadnieniu struktury atomu pojawiają się liczby całkowite, *kwanty*. Będzie o nich mowa w drugiej części tej książki, „Elektryczność i materia".

Do części E

5.30. Z równań Maxwella dla dielektryka nieprzewodzącego, jednorodnego, izotropowego i nienaelektryzowanego:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{5.119a}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{5.119b}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E} = 0, \tag{5.119c}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0, \tag{5.119d}$$

wyprowadzić równania fali elektromagnetycznej w trzech wymiarach. Skorzystać z wyniku zagadnienia 5.9, tzn. ze wzoru (5.90), zastosowanego do wektora **E** i do wektora **H**.

Odpowiedź. a) Dla obu stron I równania Maxwella obliczamy pochodną względem czasu, zaś dla obu stron II równania Maxwella obliczamy rotację:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2},$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\mu_0 \mu\, \mathrm{rot} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

Ponieważ zmienne przestrzenne i czasowe są niezależne, operacje rot i $\frac{\partial}{\partial t}$ są przemienne: $\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot} = \mathrm{rot}\frac{\partial}{\partial t}$. Na tej podstawie z pierwszych równań eliminujemy $\mathrm{rot}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ i otrzymujemy

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Według wzoru (5.90) mamy:

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{E} - \Delta\mathbf{E}.$$

Ponieważ z założenia dla wszystkich punktów ośrodka $\mathrm{div}\,\mathbf{E} = 0$, przeto otrzymamy

$$\Delta\mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \tag{5.120a}$$

b) Podobnie obliczając pochodną $\frac{\partial}{\partial t}$ obu stron równania II i rotację obu stron równania I oraz stosując wzór (5.90) do wektora **H** wraz z $\mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0$, otrzymamy:

$$\Delta\mathbf{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \tag{5.120b}$$

Widzimy, że wektory pola elektromagnetycznego **E** i **H** spełniają równanie falowe w trzech wymiarach (5.120a i b) oraz że prędkość rozchodzenia się fali elektromagnetycznej wyznacza się ze związku

$$\frac{1}{v^2} = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu,$$

czyli v wynosi

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}}.$$

Uwaga. Oba równania (5.120) fali elektromagnetycznej mają postać równania (5.97). Ich szczególnym rozwiązaniem mogą być funkcje typu (5.101), w których Φ przedstawia składowe wektorów **E** i **H** i których amplituda jest odwrotnie proporcjonalna do r, tj. do odległości od źródeł fal. Źródłem fal elektromagnetycznych jest na ogół dipol elektryczny, w którym odbywają się drgania elektryczne. Fala elektromagnetyczna nie będzie więc miała symetrii kulistej, lecz symetrię osiową, tzn. że jeżeli dipol ma kierunek osi z, amplituda fali będzie zależna zarówno od r, jak i od θ. Jednak równania (5.120a i b) nie wiążą ze sobą wektorów **E** i **H**. Hertz znalazł metodę, za pomocą której oba wektory pola mogą być obliczone przy pomocy wektora **Z**, który spełnia równania falowe.

5.31. Metoda Hertza. Zgodnie z rozumowaniem Hertza obieramy taki wektor **Z** („*wektor Hertza*"), aby

$$\mathbf{H} = \varepsilon_0 \varepsilon\, \mathrm{rot} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t}. \tag{5.121}$$

W ten sposób równanie (5.119d) jest spełnione. Jakie warunki musi spełnić wektor Hertza, aby pozostałe równania maxwellowskie (5.119a—c) były również spełnione? Jak za pomocą wektora Hertza oblicza się **E**?

Odpowiedź. Najłatwiej odpowiedzieć na pytanie drugie. Należy wektor Hertza (5.121) wprowadzić do I równania Maxwella (5.119a); otrzymujemy

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t}=\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

a stąd, po scałkowaniu względem t,

$$\mathbf{E}=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{Z} \tag{5.122}$$

plus wektor stały, niezależny od czasu, opisujący pole elektrostatyczne, które tu pomijamy. Dla spełnienia II równania Maxwella obliczamy $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ z równania (5.121) i podstawiamy do (5.119b):

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\mu_0\,\mu\,\varepsilon_0\,\varepsilon\operatorname{rot}\frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2},$$

stąd

$$\mathbf{E}=-\mu_0\,\mu\,\varepsilon_0\,\varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2}+\text{dowolny wektor bezwirowy},$$

bowiem rotacja wektora bezwirowego jest *ex definitione* równa zeru. Takim wektorem bezwirowym, zależnym od $\mathbf{Z}(x, y, z, t)$ jest gradient skalara $\operatorname{div}\mathbf{Z}$. Zatem

$$\mathbf{E}=-\mu_0\,\mu\,\varepsilon_0\,\varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2}+\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{Z}.$$

Wprowadzając zamiast **E** wyrażenie (5.122) i uwzględniając dla wektora **Z** wzór (5.90) otrzymujemy:

$$\left.\begin{aligned}\Delta\mathbf{Z}&=\mu_0\,\mu\,\varepsilon_0\,\varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2},\\ &\text{albo inaczej}\\ \Delta\mathbf{Z}&=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2}.\end{aligned}\right\} \tag{5.123}$$

A zatem wektor Hertza musi spełniać równanie falowe, tzn. trzy składowe wektora Hertza muszą spełniać trzy równania (5.123) napisane dla każdej ze składowych Z_x, Z_y, Z_z wektora **Z**. Znając te składowe obliczamy składowe wektorów pola **H** i **E** przy pomocy równań (5.121) i (5.122).

Uwaga. Konkretny przykład takiego obliczenia będziemy mieli w zagadnieniach 5.34 i 5.37. Autor radzi jednak czytelnikowi, aby rozwiązał wszystkie dalsze zagadnienia rozpoczynając od następnego.

5.32. Sprawdzić przez podstawienie, że szczególną całką równania falowego (5.123) jest funkcja

$$\mathbf{Z}=\frac{1}{r}\mathbf{f}\left(t-\frac{r}{v}\right) \tag{5.124}$$

określona i ciągła w całym obszarze r, z wyjątkiem punktu $r=0$.

Odpowiedź. Przede wszystkim stwierdzimy, że funkcja skalarna

$$Z=\frac{1}{r}f(\tau),\qquad \tau=t-\frac{r}{v}$$

spełnia równanie

$$\Delta\left(\frac{1}{r}f(\tau)\right)=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{1}{r}f(t)\right). \tag{5.125}$$

W tym celu należy obliczyć pierwsze, a potem drugie pochodne cząstkowe Z:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}f(\tau)\right)=\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}f(\tau)-\frac{x}{vr^2}\dot f(\tau),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}f(\tau)\right)=\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}f(\tau)+\frac{3x^2-r^2}{vr^4}\dot f(\tau)+\frac{x^2}{v^2r^3}\ddot f(\tau)$$

i podobnie względem zmiennych y i z. Po dodaniu do siebie drugich pochodnych otrzymujemy wyrażenie na laplasjan Z i stwierdzamy, że równanie (5.125) jest spełnione. Stosuje się to zatem dla wszystkich trzech składowych wektora **Z**:

$$\Delta\mathbf{Z}_x=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 Z_x}{\partial t^2}$$

i to samo dla składowej Z_y i Z_z. A zatem wektor Hertza w postaci (5.124) spełnia równanie falowe (5.123).

5.33. Dane jest pole skalarne $a(x, y, z)$ i pole wektorowe $\mathbf{A}(x, y, z)$. Obliczyć rotację iloczynu $a\,\mathbf{A}$.

Odpowiedź. Zastosować do wektorowe $a\,\mathbf{A}$ definicję rotacji za pomocą wyznacznika (5.20). Ponieważ $\frac{\partial(aA_y)}{\partial x}=a\frac{\partial A_y}{\partial x}+\frac{\partial a}{\partial x}A_y$ itp., wyznacznik stanie się sumą dwóch wyznaczników, z których drugi jest iloczynem wektorowym $\operatorname{grad} a$ i **A**. Otrzymamy:

$$\operatorname{rot} a\,\mathbf{A}=a\operatorname{rot}\mathbf{A}+\operatorname{grad} a\times\mathbf{A}. \tag{5.126}$$

5.34. Korzystając ze wzorów (5.121), (5.124) i (5.126) obliczyć wektor pola magnetycznego. Będzie to rozwiązanie dla fali elektromagnetycznej, wynikającej z wektora Hertza (5.124).

Odpowiedź. Pole magnetyczne obliczamy na podstawie wzorów (5.121) i (5.124):

$$\mathbf{H}=\varepsilon_0\,\varepsilon\operatorname{rot}\left(\frac{1}{r}\dot{\mathbf{f}}(\tau)\right),$$

gdzie $\tau=t-\frac{r}{v}$, zaś $\dot{\mathbf{f}}$ oznacza pochodną wektora **f** względem zmiennej τ lub t, co na jedno wychodzi.

Rotację obliczymy podstawiając we wzorze (5.126) $a=\frac{1}{r}$ i $\mathbf{A}=\dot{\mathbf{f}}(\tau)$:

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{r}\dot{\mathbf{f}}\right)=\frac{1}{r}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{f}}+\operatorname{grad}\frac{1}{r}\times\dot{\mathbf{f}}.$$

Korzystając z wyznacznikowej definicji operatora rot otrzymujemy po obliczeniu pochodnych cząstkowych $\dot{\mathbf{f}}$ względem x, y, z:

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{f}}=-\frac{1}{vr}\mathbf{r}\times\ddot{\mathbf{f}},$$

zaś na podstawie definicji grad, pamiętając, że $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}$ itd., mamy

$$\operatorname{grad}\frac{1}{r}=-\frac{\mathbf{r}}{r^3}=-\frac{1}{r^2}\mathbf{r}_1,$$

gdzie $\mathbf{r}_1$ oznacza wektor jednostkowy w kierunku **r**. W rezultacie

$$\mathbf{H}=\frac{\varepsilon_0\,\varepsilon}{r^2}\dot{\mathbf{f}}(\tau)\times\mathbf{r}_1+\frac{\varepsilon_0\,\varepsilon}{vr}\ddot{\mathbf{f}}(\tau)\times\mathbf{r}_1. \tag{5.127}$$

Uwaga. Przyjmując całkę szczególną postaci (5.124) otrzymaliśmy w wyniku obliczenia wektora **H** fali elektromagnetycznej wyrażenie (5.127), złożone z dwóch wyrazów; pierwszy wyraz zależy od pierwszej pochodnej wektora **f** względem czasu, drugi — od drugiej. Jeśli weźmiemy pod uwagę, że $\frac{\mathbf{r}}{r}=\mathbf{r}_1$ jest wektorem jednostkowym w kierunku **r**, to pierwszy wyraz maleje z drugą potęgą odległości

od początku układu, drugi zaś — z pierwszą. Wszystko to wskazuje, że w początku układu odniesienia ($r = 0$) znajduje się źródło fali elektromagnetycznej. Dla bardzo małych r w stosunku do λ przeważające znaczenie ma wyraz pierwszy, natomiast dla bardzo dużych odległości r — wyraz pierwszy jest znikomo mały wobec drugiego. W następujących dwóch zagadnieniach zajmiemy się obydwoma tymi przypadkami.

5.35. Pole magnetyczne w pobliżu źródła fali elektromagnetycznej. Dipol drgający. Jak wiemy z zagadnienia 5.34, wektor **H** pola elektromagnetycznego wyraża w tym przypadku pierwszy wyraz równości (5.127):

$$\mathbf{H} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{r^2} \dot{\mathbf{f}} \times \mathbf{r}_1 . \tag{5.128}$$

Pokazać, że wzór ten ma postać prawa Biota i Savarta, jeśli f jest proporcjonalne do natężenia prądu.

Odpowiedź. Prawo Biota i Savarta wyraża wzór (3.9), który, jeśli wszystkie wielkości (a więc także i) wyrazimy w jednostkach em CGS, przybiera postać:

$$H = \frac{1}{r^2} il \sin\alpha \tag{5.129}$$

(l oznacza tu długość przewodnika, przez który płynie chwilowy prąd i wytwarzając pole H). Spójrzmy na rysunek 3.24: odcinkowi r nadajemy właściwości wektora prowadzącego od środka odcinka l do punktu obserwacji O. Prąd płynąc w przewodniku l wytwarza na jego końcach ładunki $+e$ i $-e$. Poznajemy w nim *dipol elektryczny*. Nazywamy iloczyn e i l *momentem elektrycznym* dipola:

$$p = el . \tag{5.132}$$

Jest to wartość wektora o kierunku zgodnym z kierunkiem prądu. Pochodna p względem czasu jest iloczynem natężenia prądu i długości:

$$\dot{p} = \frac{de}{dt} l = il . \tag{5.133}$$

Zgodnie z rysunkiem 3.24 stwierdzamy, że wzór (5.129) wyraża wartości iloczynu wektorowego wektora $\mathbf{p}$ i wektora jednostkowego $\mathbf{r}_1 = \frac{\mathbf{r}}{r}$. Zatem prawo Biota i Savarta możemy napisać w postaci wektorowej:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{r^2} \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{r}_1 , \tag{5.130}$$

$$(\mathrm{Oe}) \quad (\mathrm{cm}^{-2}) \quad \left(\begin{matrix}\text{j.em CGS} \\ \text{natęż. prądu} \cdot 1\ \mathrm{cm}\end{matrix}\right)$$

zaś $\mathbf{r}_1 = \frac{\mathbf{r}}{r}$ jest wielkością bezwymiarową.

W jednostkach układu MKSA (zracjonalizowanego) będzie:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi r^2} \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{r}_1 . \tag{5.131}$$

$$\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right) \quad (\mathrm{m}^{-2}) \quad (\mathrm{A} \cdot \mathrm{m})$$

Porównajmy ten wzór ze wzorem (5.128): widzimy istotnie, że wzór ostatni ma postać prawa Biota i Savarta; funkcja $\dot{f}$ ma postać:

$$\dot{f} = \frac{\dot{p}}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon}$$

albo (pomijając stałą całkowania)

$$f = \frac{p}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon} . \tag{5.134}$$

Uwaga. Jak z rozwiązania tego zagadnienia wynika, źródłem fali elektromagnetycznej jest prąd płynący w dipolu i ładujący jego końce. Prąd ten nie może być stały, gdyż wtedy byłoby $\ddot{p} = 0$ i nie byłoby fali elektromagnetycznej [por. wzór (5.127)]. Aby fala periodyczna była wypromieniowywana stale, prąd musi być przemienny, drgający. Wzór (5.127) stosuje się zarówno do dowolnej zależności prądu w dipolu od czasu, jak i do dipola drgającego.

5.36. Pole magnetyczne w dużej odległości od dipola drgającego. Pole to opisuje drugi wyraz wzoru (5.127):

$$\mathbf{H} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{vr} \ddot{\mathbf{f}}(\tau) \times \mathbf{r}_1 . \tag{5.135}$$

Wyrazić je za pomocą momentu elektrycznego dipola w jednostkach MKSA.

Odpowiedź. Według wzoru (5.134) mamy

$$\ddot{f} = \frac{\ddot{p}}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon} ,$$

stąd

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi vr} \ddot{\mathbf{p}}(\tau) \times \mathbf{r}_1 . \tag{5.136}$$

Uwaga. Wzór (5.127) stosuje się ogólnie dla źródła fali elektromagnetycznej umieszczonego w początku układu współrzędnych ($r = 0$). Dla dipola elektrycznego o momencie p będącym funkcją czasu wektor **H** fali wyraża się ogólnie wzorem

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi r^2} \dot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{v}\right) \times \mathbf{r}_1 + \frac{1}{4\pi vr} \ddot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{v}\right) \times \mathbf{r}_1 . \tag{5.137}$$

Pierwszy wyraz opisuje pole w pobliżu dipola drgającego, drugi zaś — w dużej odległości od niego, czyli w tzw. *strefie falowej*.

5.37. Pole elektryczne dipola drgającego. W zagadnieniach 5.34—5.36 obliczyliśmy metodą Hertza wektor pola magnetycznego fali elektromagnetycznej przez zmieniający się w czasie moment dipola elektrycznego. Obliczyć tą samą metodą wektor pola elektrycznego.

Odpowiedź. **E** oblicza się na podstawie wzoru (5.122):

$$\mathbf{E} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{Z} ,$$

Przyjmując za wektor Hertza **Z** tę samą całkę szczególną równania falowego (5.123), jak dotychczas, tzn.

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{r} \mathbf{f}\left(t - \frac{r}{v}\right) ,$$

gdzie [patrz wzór (5.134)]:

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{p}}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon} ,$$

otrzymujemy:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \frac{1}{r} \mathbf{p}\left(t - \frac{r}{v}\right) . \tag{5.138a}$$

Analogiczny wzór dla pola magnetycznego (patrz zagadnienie 5.34) jest:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \frac{1}{v} \dot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{v}\right) . \tag{5.138b}$$

5.38. Korzystając z faktu, że we wzorze (5.138a) $\frac{1}{r}\mathbf{p}\left(t - \frac{r}{v}\right)$ jest funkcją tylko jednej zmiennej przestrzennej r, wzór ten uprościć w taki sposób, aby **E** wyraziło się pojedynczą rotacją.

Odpowiedź. 1. Pisząc ogólnie zamiast $\frac{1}{r}\mathbf{p}\left(t-\frac{r}{v}\right)$ symbol $\mathbf{F}(r)$ i korzystając z różniczkowych definicji $\operatorname{div}\mathbf{F}$ i $\operatorname{rot}\mathbf{F}$, stwierdzić słuszność następujących wzorów:

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(r)=\mathbf{F}'\operatorname{grad}r, \tag{5.139}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}(r)=\operatorname{grad}r\times\mathbf{F}', \tag{5.140}$$

gdzie „prim" oznacza pochodną względem r. Dla przykładu podamy dowód twierdzenia (5.140):

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}(r)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=\mathbf{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)+\ldots=\mathbf{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}\right)+\ldots=$$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z}\\ \frac{\partial F_x}{\partial r} & \frac{\partial F_y}{\partial r} & \frac{\partial F_z}{\partial r}\end{vmatrix}=(\operatorname{grad}r)\times\mathbf{F}', \text{ c.b.d.o. Ponieważ } \frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=$$

$$=\frac{x}{r}\ \text{ i podobnie }\ \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r},$$

przeto

$$\operatorname{grad}r=\frac{x}{r}\mathbf{i}+\frac{y}{r}\mathbf{j}+\frac{z}{r}\mathbf{k};$$

a zatem

$$\operatorname{grad}r=\frac{\mathbf{r}}{r} \tag{5.141}$$

jest to wektor jednostkowy, który oznaczaliśmy również przez $\mathbf{r}_1$. Wobec tego wzory (5.139) i (5.140) przybierają postać

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(r)=\frac{\mathbf{r}}{r}\mathbf{F}', \tag{5.142}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}(r)=\frac{\mathbf{r}}{r}\times\mathbf{F}'. \tag{5.143}$$

2. Obliczamy według (5.140) kładąc $\mathbf{F}(r)=\frac{1}{r}\mathbf{p}\left(t-\frac{r}{v}\right)$:

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{r}\mathbf{p}\right)=(\operatorname{grad}r)\times\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\mathbf{p}\right)=\frac{\mathbf{r}}{r}\times\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial r}-\frac{\mathbf{p}}{r^2}\right)=\left(\mathbf{r}\times\frac{1}{r^2}\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial r}\right)-\left(\mathbf{r}\times\frac{\mathbf{p}}{r^3}\right).$$

Stąd i ze wzoru (5.138a) otrzymujemy poszukiwane wyrażenie:

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left\{-\operatorname{rot}\left(\mathbf{r}\times\frac{\mathbf{p}}{r^3}\right)+\operatorname{rot}\left(\mathbf{r}\times\frac{1}{r^2}\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial r}\right)\right\}. \tag{5.144}$$

Uwaga. Widzimy, że $\mathbf{E}$ składa się z dwóch wyrazów: pierwszy maleje z kwadratem odległości i ma znaczenie tylko dla małych odległości r od dipola, drugi zaś maleje z pierwszą potęgą odległości r i ma znaczenie tylko dla dużych odległości od dipola. Ten daleki obszar od dipola nazywamy *strefą falową*.

5.39. Opierając się na wyznacznikowej definicji iloczynu wektorowego $\mathbf{r}\times\mathbf{F}(r)$:

$$\mathbf{r}\times\mathbf{F}(r)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x & y & z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix} \tag{a}$$

oraz rotacji tegoż iloczynu:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{r}\times\mathbf{F}(r))=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ (\mathbf{r}\times\mathbf{F})_x & (\mathbf{r}\times\mathbf{F})_y & (\mathbf{r}\times\mathbf{F})_z\end{vmatrix} \tag{b}$$

a także na wzorach (5.141) i (5.142), wykazać słuszność ważnego wzoru:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{r}\times\mathbf{F}(r))=-2\mathbf{F}+\mathbf{r}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\mathbf{F}'\right)-r\mathbf{F}'. \tag{5.145}$$

Odpowiedź. Podstawiając składowe na osie x, y, z iloczynu wektorowego (a) do wyznacznika (b) i rozwijając go, otrzymamy:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{r}\times\mathbf{F})=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial_z}\\ yF_z-zF_y & zF_x-xF_z & xF_y-yF_x\end{vmatrix}=\mathbf{i}\left(x\frac{\partial F_y}{\partial y}-y\frac{\partial F_x}{\partial y}-F_x-z\frac{\partial F_x}{\partial z}-F_x+x\frac{\partial F_z}{\partial z}\right)+\ldots$$

Dodając do pierwszego nawiasu $x\frac{\partial F_x}{\partial x}-x\frac{\partial F_x}{\partial x}$ i zbierając odpowiednio wyrazy, otrzymujemy następnie

$$\operatorname{rot}(\mathbf{r}\times\mathbf{F})=\mathbf{i}(-2\mathbf{F}+\mathbf{r}\operatorname{div}\mathbf{F}-r\mathbf{F}')+\ldots$$

gdzie $\mathbf{F}'$ oznacza $\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial r}$. Stosując związek (5.142) od razu otrzymujemy wzór (5.145).

5.40. Pole elektryczne w pobliżu drgającego dipola. Zastosować wzór (5.145) do pierwszego wyrazu wzoru (5.144). Obliczyć wektor pola elektrycznego w najbliższym otoczeniu dipola.

Odpowiedź. Kładąc $\mathbf{F}(r)=\frac{\mathbf{p}\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r^3}$ otrzymamy: $\operatorname{rot}\left(\mathbf{r}\times\frac{\mathbf{p}}{r^3}\right)=-\frac{2\mathbf{p}}{r^3}+\frac{\mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{p}')}{r^4}-\frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{p})}{r^5}+$ $-\frac{\mathbf{p}'}{r^2}+\frac{3\mathbf{p}}{r^3}$; pomijając wyrazy, w których r występuje w potędze większej niż -3, mamy:

$$\operatorname{rot}\left(\mathbf{r}\times\frac{\mathbf{p}}{r^3}\right)\cong\frac{\mathbf{p}}{r^3}-\frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{p})}{r^5}=\operatorname{grad}\frac{\mathbf{p}\mathbf{r}}{r^3}.$$

Tę ostatnią równość sprawdzić obliczając składową gradientu, np. $\frac{\partial}{\partial x}$, funkcji $\frac{\mathbf{p}\mathbf{r}}{r^3}=\frac{xp_x+yp_y+zp_z}{r^3}$.

Ostatecznie z (5.144) otrzymujemy:

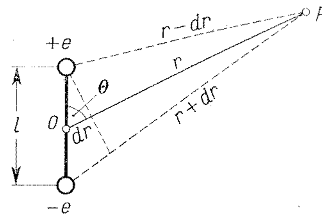
$$\mathbf{E}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\operatorname{rot}\left(\mathbf{r}\times\frac{\mathbf{p}}{r^3}\right)=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\operatorname{grad}\frac{\mathbf{p}\mathbf{r}}{r^3}. \tag{5.146}$$

Jak z tego wynika, pole elektryczne ma potencjał

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{\mathbf{p}\mathbf{r}}{r^3}. \tag{5.147}$$

Czytelnik z łatwością przekona się rozwiązując następne zagadnienie, że jest to potencjał dipola, a więc linie sił pola elektrycznego zaczynają się na ładunku $+e$, zaś kończą się na ładunku $-e$, nie są one jeszcze wirowe; wirowymi będą dopiero w strefie falowej.

5.41. Obliczyć potencjał dipola elektrycznego o momencie $\mathbf{p}=e\mathbf{l}$ w odległości r od środka dipola (rys. 5.57).



Rys. 5.57. Obliczenie potencjału w otoczeniu dipola elektrycznego; $-e$, $+e$ — ładunki dipola, l — długość dipola, r — odległość środka dipola od punktu obserwacji P

Odpowiedź. W jednostkach es CGS potencjał ładunku $+e$: $U_+ = \frac{e}{r-dr}$, potencjał ładunku $-e$: $U_- = -\frac{e}{r+dr}$, potencjał dipola $U = U_+ + U_- = \frac{e}{r-dr} - \frac{e}{r+dr} \cong e\frac{2dr}{r^2} = e\frac{2\frac{l}{2}\cos\theta}{r^2} = \frac{el\cos\theta}{r^2} =$

$$= \frac{p\cos\theta}{r^2} = \frac{pr\cos\theta}{r^3} = \frac{\mathbf{pr}}{r^3}.$$

W jednostkach MKSA:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\,\frac{\mathbf{pr}}{r^3}.$$

Widzimy, że jest on identyczny (w granicach zastosowanych tu przybliżeń) z potencjałem (5.147) pola elektrycznego w pobliżu dipola wypromieniowującego falę elektromagnetyczną.

5.42. Pole elektryczne w strefie falowej. Podobnie jak w zagadnieniu 5.40 obliczyć pole elektryczne dla r dużych w stosunku do rozmiarów dipola. Oprzeć się na drugim wyrazie wzoru (5.144).

Odpowiedź. Do wzoru (5.145) należy podstawić

$$\mathbf{F}(r) = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial\mathbf{p}\left(t-\frac{r}{v}\right)}{\partial r}.$$

Otrzymujemy: $\operatorname{rot}\left(\mathbf{r}\times\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\mathbf{r}}\right) = -2\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial r} + \frac{\mathbf{r}}{r}\left[\mathbf{r}\left(\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2\mathbf{p}}{\partial r^2} - \frac{2}{r^3}\,\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial r}\right)\right] - \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2\mathbf{p}}{\partial r^2} + \frac{2}{r^2}\,\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial r}$,

co po należytej redukcji i pominięciu wyrazu, w którym r występuje w potędze mniejszej od -1, daje:

$$\operatorname{rot}\left(\mathbf{r}\times\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial r}\right) = \frac{\mathbf{r}}{r}\left(\frac{\mathbf{r}}{r^2}\,\frac{\partial^2\mathbf{p}}{\partial r^2}\right) - \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2\mathbf{p}}{\partial r^2}.$$

W rezultacie **E** wyraża się wzorem:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}\left[\frac{\mathbf{r}}{r}\left(\mathbf{r}\,\frac{\partial^2\mathbf{p}}{\partial r^2}\right) - r\,\frac{\partial^2\mathbf{p}}{\partial r^2}\right]. \tag{5.148}$$

Uwaga. We wzorze tym nie widać *explicite* zależności pola elektrycznego od pochodnych momentu dipola **p** względem czasu, czyli od faktu czasowej zmienności **p**. Zależność tę ujawnimy w następnym zagadnieniu.

5.43. Pole elektryczne w strefie falowej wyrazić za pomocą pochodnych czasowych momentu elektrycznego dipola **p**.

Odpowiedź. Moment dipola jest funkcją zmiennej $\tau = t - \frac{r}{v}$. Zatem $\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial r}$ możemy obliczyć jako pochodną funkcji złożonej:

$$\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial r} = \frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\tau}\,\frac{\partial\tau}{\partial r} = \frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\tau}\left(-\frac{1}{v}\right);$$

$$\frac{\partial^2\mathbf{p}}{\partial r^2} = -\frac{1}{v}\,\frac{\partial^2\mathbf{p}}{\partial\tau^2}\,\frac{\partial\tau}{\partial r} = \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2\mathbf{p}}{\partial\tau^2};$$

z drugiej strony $\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial t} = \frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\tau}\,\frac{\partial\tau}{\partial t} = \frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\tau}$, $\frac{\partial^2\mathbf{p}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\mathbf{p}}{\partial\tau^2}$.

Zatem

$$\frac{\partial^2\mathbf{p}}{\partial\mathbf{r}^2} = \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2\mathbf{p}}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}\,\ddot{\mathbf{p}}.$$

Ostatecznie

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\,\varepsilon v^2 r^2}\left[\frac{\mathbf{r}}{r}(\mathbf{r}\ddot{\mathbf{p}}) - r\ddot{\mathbf{p}}\right],$$

albo prościej

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0\,\varepsilon\,v^2\,r}\left[\frac{\mathbf{r}}{r}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\,\ddot{\mathbf{p}}\right) - \ddot{\mathbf{p}}\right]. \tag{5.149}$$

Uwaga. Wzór ten da się przedstawić jeszcze prościej. Musimy jednak w zagadnieniu 5.44 zapoznać się ze wzorem pomocniczym z zakresu rachunku wektorowego.

5.44. Pokazać, że iloczyn wektorowy wektora i iloczynu wektorowego dwóch innych wektorów da się wyrazić jako różnica następujących iloczynów skalarnych:

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) - \mathbf{C}(\mathbf{AB}). \tag{5.150}$$

Odpowiedź. Według definicji iloczynu wektorowego jest

$$\mathbf{B}\times\mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(B_yC_z - B_zC_y) + \ldots$$

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_yC_z - B_zC_y & B_zC_x - B_xC_z & B_xC_y - B_yC_x \end{vmatrix} = \mathbf{i}[A_y(B_xC_y - B_yC_x) - A_z(B_zC_x - B_xC_z)] + \ldots =$$

$$= \mathbf{i}[B_x(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z) - C_x(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)] + \ldots = \mathbf{i}[B_x(\mathbf{AC}) - C_x(\mathbf{AB}) + \ldots$$

Stąd od razu wynika związek (5.150).

5.45. Zastosować przekształcenie (5.150) do wzoru (5.149), wyrażającego pole elektryczne w strefie falowej.

Odpowiedź. Położyć $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \frac{\mathbf{r}}{r}$, $\mathbf{C} = \ddot{\mathbf{p}}$; ponieważ $\frac{\mathbf{r}}{r}\,\frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{r^2}{r^2} = 1$, w nawiasie kwadratowym wzoru (5.149) otrzymamy: $\frac{\mathbf{r}}{r}\times\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\times\ddot{\mathbf{p}}\right) = \left(\ddot{\mathbf{p}}\times\frac{\mathbf{r}}{r}\right)\times\frac{\mathbf{r}}{r}$. Zatem pole elektryczne w strefie falowej wyrazi się wzorem:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0\,\varepsilon\,v^2\,r}\left(\ddot{\mathbf{p}}\times\frac{\mathbf{r}}{r}\right)\times\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{5.151}$$

Przypomnijmy sobie, że wzór na wektor pola magnetycznego w sferze falowej (5.136) ma postać:

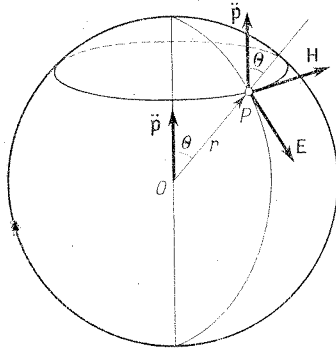
$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi vr}\,\ddot{\mathbf{p}}\times\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{5.152}$$

Przypomnijmy też sobie, że moment elektryczny p elementu ośrodka jest funkcją czasu t z opóźnieniem $\frac{r}{v}$, równym czasowi przejścia fali od dipola do danego punktu przestrzeni: $p = p\left(t-\frac{r}{v}\right)$.

5.46. Narysować wzajemne położenie wektorów $\ddot{\mathbf{p}}$, **r**, **E** i **H** w strefie falowej.

Odpowiedź. Niech wektor **r** tworzy z wektorem $\ddot{\mathbf{p}}$ kąt θ (rys. 5.58). Oba wektory wychodzą z początku układu 0. Wektor **r** jest promieniem wodzącym punktu P. Do tego punktu przesuwamy wektor $\ddot{\mathbf{p}}$ i w kierunku $\ddot{\mathbf{p}}\times\mathbf{r}$, tzn. prostopadłym do $\ddot{\mathbf{p}}$ i do **r**, rysujemy, zgodnie ze wzorem (5.152), wektor **H**. Stosownie do wzoru (5.151), w kierunku $(\ddot{\mathbf{p}}\times\mathbf{r})\times\mathbf{r}$, czyli $\mathbf{H}\times\mathbf{r}$, rysujemy wektor **E**; jest on więc

prostopadły do **H** i do **r**. Jak z tego widać, fala elektromagnetyczna w dużej odległości od dipola jest poprzeczna, gdyż wektory **E** i **H** są prostopadłe do **r**, tzn. do kierunku rozchodzenia się fali; są one również wzajemnie prostopadłe. Zwroty wektorów **r**, **E** i **H** wynikają ze związków (5.151) i (5.152); dla drgającego dipola rozkład ich w przestrzeni przedstawia rys. 5.59. Amplituda maleje wraz z odwrotnością r. Energia płynie w kierunku wektora Poyntinga $\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}$, a zarazem w kierunku **r**. Fala jest kulista, ale nie ma symetrii kulistej, lecz symetrię osiową (por. rys. 5.25, który pokazuje linie sił pola **E** i **H**, zarówno w najbliższym otoczeniu dipola, jak i w większej od niego odległości).



Rys. 5.58. Pole elektromagnetyczne w strefie falowej dipola; $\ddot{\mathbf{p}} = \dfrac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2}$, $\mathbf{p} = e\mathbf{l}$ — moment elektryczny dipola, **E** — wektor pola elektrycznego, **H** — wektor pola magnetycznego, r — kierunek ruchu fali elektromagnetycznej

5.47. Obliczyć bezwzględne wartości wektorów pola elektrycznego i magnetycznego w strefie falowej promieniowania dipola.

Odpowiedź. Z równania (5.152) mamy od razu:

$$H = \frac{\sin\theta}{4\pi v r}\ddot{p}\left(t-\frac{r}{v}\right). \tag{5.153}$$

Według wzoru (5.151) wektor **E** powstaje z wektora **H** przez pomnożenie przez $\dfrac{1}{v\,\varepsilon_0\,\varepsilon}$ oraz przez pomnożenie przez prostopadły do niego wektor jednostkowy $\dfrac{\mathbf{r}}{r}$; ta ostatnia czynność nie ma wpływu na jego wartość, lecz tylko na kierunek. Zatem

$$E = \frac{\sin\theta}{4\pi\,\varepsilon_0\,\varepsilon\,v^2 r}\ddot{p}\left(t-\frac{r}{v}\right). \tag{5.154}$$

5.48. Sprawdzić, że opór falowy w strefie falowej jest taki sam jak dla fali płaskiej.

Odpowiedź. Przez podzielenie równości (5.154) przez (5.153) otrzymujemy:

$$\frac{E}{H} = \frac{1}{v\varepsilon_0\,\varepsilon} = \frac{\sqrt{\varepsilon_0\,\varepsilon\,\mu_0\,\mu}}{\varepsilon_0\,\varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu_0\,\mu}{\varepsilon_0\,\varepsilon}},$$

co jest zgodne ze wzorem (5.63).

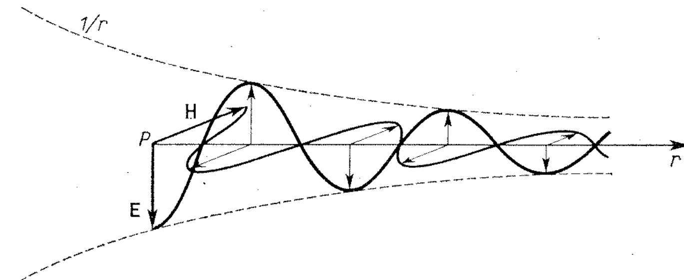
5.49. Obliczyć wartość wektora Poyntinga w dowolnym punkcie strefy falowej dipola.

Odpowiedź. Ze wzoru $\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}$ mamy $S = EH\sin(\mathbf{E},\mathbf{H}) = EH$, a stąd i ze wzorów (5.153) i (5.154) wynika

$$S = \frac{\sin^2\theta}{16\pi^2\,\varepsilon_0\,\varepsilon\,v^3 r^2}\ddot{p}^2\left(t-\frac{r}{v}\right). \tag{5.155}$$

Uwaga: Jak z rozwiązania tego widać, dipol elektryczny wypromieniowuje największą moc w płaszczyźnie równikowej ($\theta = 90°$, patrz rys. 5.58), natomiast w kierunku osi biegunowej ($\theta = 0$) nie promieniuje wcale.

5.50. Obliczyć całkowity strumień mocy M przepływającej przez powierzchnię kulistą, otaczającą dipol elektryczny.

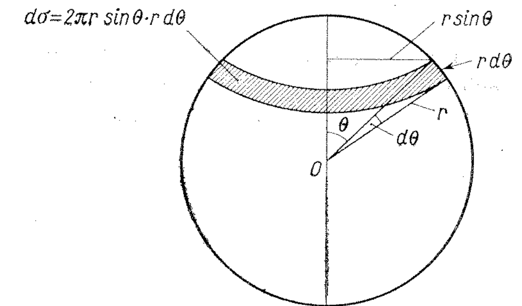


Rys. 5.59. Wykres zmian pola elektrycznego **E** i magnetycznego **H** w kulistej fali elektromagnetycznej; r — kierunek rozchodzenia się fali; amplituda fali maleje z rosnącą odległością

Odpowiedź. $M = \oint\!\!\oint S\,d\sigma = \dfrac{\ddot{p}^2\left(t-\frac{r}{v}\right)}{16\pi^2\,\varepsilon_0\,\varepsilon v^3 r^2}\oint\!\!\oint \sin^2\theta\,d\sigma.$

Element powierzchniowy, ze względu na symetrię pola dookoła osi dipola można przedstawić, stosownie do rys. 5.60, w postaci pierścienia:

$$d\sigma = 2\pi r\sin\theta\, r\,d\theta = 2\pi r^2\sin\theta\,d\theta\,.$$



Rys. 5.60. Obliczenie powierzchni elementu powierzchniowego $d\sigma = 2\pi r^2\sin\theta d\theta$, potrzebnej do obliczenia całki, rozciągniętej na powierzchnię kuli, w zagadnieniu 5.50

Ponieważ r jest stałe, wynosimy je przed znak całki; całkowanie na powierzchnię kuli sprowadza się do całkowania względem θ

$$M = \frac{\ddot{p}^2\left(t-\frac{r}{v}\right)}{8\pi\,\varepsilon_0\,\varepsilon v^3}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta.$$

Wartość całki wynosi:

$$\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta = \int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta = -\int_1^{-1}(1-u^2)\,du = \int_{-1}^{1}(1-u^2)\,du = 2-\frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Ostatecznie

$$M = \frac{\ddot{p}^2\left(t-\frac{r}{v}\right)}{6\pi\,\varepsilon_0\,\varepsilon v^3}. \tag{5.156}$$

5.51. Dipol drga z częstotliwością kołową ω:

$$p = p_0 \cos\omega\left(t-\frac{r}{v}\right).$$

Obliczyć średnią wartość $\overline{M}$ mocy wypromieniowywanej przez dipol.

Odpowiedź. Ze wzoru (5.156) widzimy, że całkowity strumień mocy wypromieniowywanej przez dipol drgający jest pulsujący. Obliczamy

$$\ddot{p} = -p_0\,\omega^2\cos\omega\left(t-\frac{r}{v}\right),\quad \ddot{p}^2 = p_0^2\,\omega^4\cos^2\omega\left(t-\frac{r}{v}\right);$$

średnia wartość $\overline{\ddot{p}^2}$ w czasie wynosi $\overline{\ddot{p}^2} = p_0^2\,\omega^4\,\overline{\cos^2\omega\left(t-\frac{r}{v}\right)}$ (średniowanie w czasie oznacza się kreską poziomą nad wielkością uśrednianą). Średnią wartość $\cos^2(\omega t+\varphi)$ oblicza się za pomocą całki względem czasu, rozciągniętej na cały okres T:

$$\overline{\cos^2(\omega t+\varphi)} = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t+\varphi)\,dt = \frac{1}{\omega T}\int_{\varphi}^{\varphi+T}\cos^2\alpha\,d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi}^{\varphi+T}\cos^2\alpha\,d\alpha \left(\text{ponieważ } \omega T = \frac{1}{2\pi}\right).$$

Należy obliczyć całkę i stwierdzić, że niezależnie od wartości fazy φ, wartość całki wynosi π; stąd

$$\overline{\cos^2(\omega t+\varphi)} = \frac{1}{2}.$$

Zatem

$$\overline{\ddot{p}^2} = \frac{p_0^2\,\omega^4}{2}$$

i ostatecznie

$$\overline{M} = \frac{p_0^2\,\omega^4}{12\pi\,\varepsilon_0\,\varepsilon v^3}. \tag{5.157}$$

Uwaga. Zwróćmy uwagę na fakt, że moc $\overline{M}$ jest proporcjonalna do czwartej potęgi częstotliwości. Był to jeszcze jeden powód, dla którego Hertz stosował krótkie dipole iskrowe (małe λ, duże ω).

5.52. Przez drut o promieniu r, długości l i oporze R płynie stały prąd i. Obliczyć moc, jaka wpływa do tego drutu przez jego powierzchnię boczną z przestrzeni zewnętrznej, gdzie panuje pole elektryczne i magnetyczne.

Odpowiedź. Pole elektryczne na powierzchni drutu jest skierowane wzdłuż długości drutu i wynosi $E = \frac{U}{l} = \frac{iR}{l}$. Pole magnetyczne jest prostopadłe do E; oblicza się je z siły magnetomotorycznej: $2\pi rH = i$, stąd $H = \frac{i}{2\pi r}$. Wartość wektora Poyntinga $S = EH = \frac{i^2R}{2\pi rl}$. Powierzchnia boczna drutu wynosi $2\pi rl$, zatem moc $M = 2\pi rlS = i^2R$.

Uwaga. Moc M wydzielana w oporze jest mocą pola elektromagnetycznego. Wypływa ona ze źródła prądu (por. zakończenie § 5.32), płynie głównie między przewodami (por. rys. 5.39) i wpływa do drutu oporowego przez powierzchnię boczną, *wzdłuż promienia drutu*. Energia nie płynie wewnątrz drutów wraz z nośnikami prądu. Nie jest więc przekazywana ze źródła prądu nośnikom, które oddawałyby ją odbiornikowi energii elektrycznej (drutowi oporowemu). Inaczej mówiąc, energia, jaką prąd przenosi, nie jest energią nośników prądu, lecz energią pola elektromagnetycznego. Przewodami płyną ładunki, natomiast energia płynie w przestrzeni otaczającej przewody.

Do części F

5.53. Określić składowe pola elektromagnetycznego w układzie Kartezjusza z danego wektora Hertza. Dany jest wektor Hertza **Z** skierowany wzdłuż osi z:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{i}\cdot 0+\mathbf{j}\cdot 0+\mathbf{k}Z.$$

Na podstawie wzorów (5.121) i (5.122):

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{H} &= \varepsilon_0\,\varepsilon\,\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{Z}},\\ \mathbf{E} &= \mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{Z},\end{aligned}\right\} \tag{5.158}$$

obliczyć składowe H_x, H_y, H_z, E_x, E_y, E_z.

Odpowiedź. Składowe **H** obliczamy ze wzoru określającego operator rot:

$$\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{Z}} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & \dot{Z}\end{vmatrix}.$$

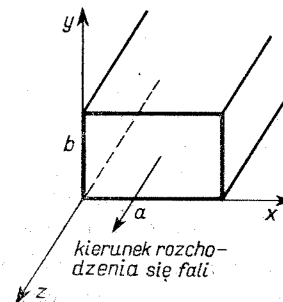
Ze składowych rot **Z** należy obliczyć składowe rot rot **Z**:

$$\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{Z} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial x} & 0\end{vmatrix}.$$

W rezultacie otrzymujemy:

$$\left.\begin{aligned} H_x &= \varepsilon_0\,\varepsilon\frac{\partial\dot{Z}}{\partial y}, & E_x &= \frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial z},\\ H_y &= -\varepsilon_0\,\varepsilon\frac{\partial\dot{Z}}{\partial x}, & E_y &= \frac{\partial^2 Z}{\partial y\,\partial z},\\ H_z &= 0, & E_z &= -\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}.\end{aligned}\right\} \tag{5.159}$$

5.54. Wektor Hertza dla falowodu prostokątnego. Wektor Hertza z zagadnienia 5.53 zastosujmy do falowodu prostokątnego, skierowanego swoją długością wzdłuż osi z (rys. 5.61). Dłuższy bok a przekroju poprzecznego leży wzdłuż osi x, zaś krótszy bok b — wzdłuż osi y. Wewnątrz



Rys. 5.61. Falowód prostokątny o bokach a i b. Układ współrzędnych (x, y, z) służy do rozwiązania zagadnień 5.54, 5.64.

tego falowodu rozchodzi się fala elektromagnetyczna w kierunku dodatnim osi z. Zależność wektorów pola **E** i **H** od współrzędnych t i z przedstawić można za pomocą funkcji $\cos\omega\left(t-\frac{z}{v}\right) = \cos(\omega t-k'z)$, co — jak wiemy — oznacza rozchodzenie się fali w kierunku dodatnim osi z. Stała propagacji tej fali

$$k' = \frac{2\pi}{\lambda'}, \tag{5.160}$$

gdzie λ' jest nieznaną długością fali w falowodzie. Ogólniej możemy wyrazić ruch tej fali za pomocą funkcji wykładniczej $e^{j(\omega t-k'z)}$, której część rzeczywista opisuje falę za pomocą funkcji cos. Z rów-

nań (5.159) widać, że zależność wektora Hertza od czasu i z musi wyrażać się za pomocą tej samej funkcji. Przyjmijmy zatem postać zespoloną

$$Z = Z_0(x, y)\, e^{j(\omega t - k'z)}. \tag{5.161}$$

Wiemy, że wektor Hertza spełnia równanie falowe (5.123), które tutaj, stosując tylko składową $Z_3 \equiv Z$, możemy napisać w postaci skalarnej:

$$\Delta Z = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}, \tag{5.162}$$

gdzie $\frac{1}{v^2} = \mu_0\mu\varepsilon_0\varepsilon$ oznacza prędkość fali w nieograniczonym ośrodku. Napisać równanie, jakie musi spełniać amplituda Z_0 wektora Hertza.

Odpowiedź. Z równania (5.161) obliczamy drugie pochodne Z względem x, y, z i t, i podstawiamy je do równania falowego (5.162). Otrzymamy

$$\frac{\partial^2 Z_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z_0}{\partial y^2} + (k^2 - k'^2) Z_0 = 0, \tag{5.163}$$

gdzie $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ i $k' = \frac{2\pi}{\lambda'}$ są stałymi propagacji fali odpowiednio w nieograniczonym ośrodku i w falowodzie.

5.55. Sprawdzić, że funkcja

$$Z_0 = \sin k_1 x \cdot \sin k_2 y, \tag{5.164}$$

gdzie

$$k_1^2 + k_2^2 = k^2 - k'^2 \tag{5.165}$$

jest szczególnym rozwiązaniem równania (5.163).

Odpowiedź. Obliczamy $\frac{\partial^2 Z_0}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 Z_0}{\partial y^2}$ i podstawiamy do (5.163); otrzymujemy wzór (5.165).

5.56. Obliczenie wektora Hertza dla falowodu prostokątnego. Z równości (5.161 i (5.164) wynika postać wektora Hertza:

$$Z = \sin k_1 x \sin k_2 y\, e^{j(\omega t - k'z)}, \tag{5.166}$$

z którego za pomocą wzorów (5.159) obliczyć można wszystkie składowe pola elektromagnetycznego wewnątrz falowodu. Zakładamy, że falowód jest wykonany z metalu doskonale przewodzącego. Zatem składowe styczne pola elektrycznego na ścianach falowodu muszą znikać. Jak wynika z (5.159), wektor elektryczny wewnątrz falowodu ma składową podłużną, tzn. skierowaną wzdłuż osi z. Składowa ta na ścianach falowodu musi być równa zeru. Od razu widać z (5.166), że dla obu ścian $x = 0$ oraz $y = 0$ jest stale $Z = 0$, zatem $E_z = 0$. Jaki warunek muszą spełniać liczby k_1 i k_2, aby składowa styczna E_z znikała również na ścianach $x = a$ i $y = b$? Jaka jest ostateczna postać wektora Hertza?

Odpowiedź. Dla $x = a$ i $y = b$ musi być: $\sin k_1 a = 0$, $\sin k_2 b = 0$, a zatem kąty obu sinusów muszą być całkowitą wielokrotnością π: $k_1 a = m\pi$, $k_2 b = n\pi$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi. Stąd

$$k_1 = \frac{m\pi}{a}, \quad k_2 = \frac{n\pi}{b}. \tag{5.167}$$

Wektor Hertza wyraża się wzorem:

$$Z = \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\, e^{j(\omega t - k'z)}. \tag{5.168}$$

5.57. Obliczenie składowych wektorów pola elektromagnetycznego w falowodzie prostokątnym. Stosując wektor Hertza (5.168), wyznaczony w zagadnieniu poprzednim, obliczyć składowe wektorów **H** i **E** wewnątrz falowodu prostokątnego w funkcji współrzędnych x i y.

Odpowiedź. Korzystamy z ogólnych wzorów (5.159), w których zamiast Z i $\dot{Z}$ podstawiamy wyrażenie zespolone (5.168) i jego pochodną względem czasu. Obliczając ponadto pochodne cząstkowe odpowiednio względem x, y i z, otrzymujemy:

$$\left.\begin{aligned}
H_x &= j\omega\varepsilon_0\varepsilon\frac{n\pi}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\, e^{j(\omega t - k'z)},\\
H_y &= -j\omega\varepsilon_0\varepsilon\frac{m\pi}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\, e^{j(\omega t - k'z)},\\
H_z &= 0,\\
E_x &= -jk'\frac{m\pi}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\, e^{j(\omega t - k'z)},\\
E_y &= -jk'\frac{n\pi}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\, e^{j(\omega t - k'z)},\\
E_z &= \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\, e^{j(\omega t - k'z)}.
\end{aligned}\right\} \tag{5.169}$$

Uwagi. 1. Wyniki dla H_z i E_z wskazują, że fala w falowodzie nie jest całkowicie poprzeczna, bo chociaż składowa podłużna pola magnetycznego nie istnieje, to jednak składowa podłużna pola elektrycznego jest różna od zera. Fala tego rodzaju nosi nazwę fali typu E lub też fali *TM* (*transvers magnetic*).

2. Gdybyśmy wektor Hertza określili ze związku odmiennego niż (5.121), mianowicie

$$\mathbf{E} = -\mu_0\mu \operatorname{rot}\dot{\mathbf{Z}}, \tag{5.170}$$

otrzymalibyśmy w wyniku grupę sześciu składowych, analogiczną do (5.169), w której byłoby $H_z \neq 0$, $E_z = 0$. Byłaby to fala typu H, czyli *TE* (*transvers electric*). Oba typy fal rzeczywiście występują w falowodach, zależnie od sposobu wprowadzenia fali do falowodu.

3. Jak widać ze wzorów (5.169), amplituda wektorów pola **E** i pola **H** zmienia się periodycznie wzdłuż boków a i b, w zależności od współrzędnej x i y. Liczba m wskazuje, ile razy amplituda **E** lub **H** przechodzi przez maksimum wzdłuż boku a, zaś liczba n wskazuje, ile razy amplituda przechodzi przez maksimum wzdłuż boku b. Wzdłuż obu tych kierunków x i y fala jest stojąca, natomiast w kierunku osi z — bieżąca. Falę określoną liczbami m i n oznacza się literą E (ewentualnie *TM*) albo też H (ewentualnie *TE*) ze wskaźnikami mn: E_{mn} (lub TM_{mn}), H_{mn} (lub TE_{mn}). Każdy taki rodzaj drgania w falowodzie nazywa się *modem*. Na przykład na rysunku 5.51, w środku, widzimy dwa kwadraty wyobrażające przekroje falowodu z wyrysowanymi liniami sił pól **E** i **H**: górny kwadrat przedstawia mod E_{11}, dolny — mod H_{11}.

5.58. Falowód obcina długie fale. Obliczenie krytycznej długości fali λ_c. W zagadnieniu 5.55 udowodniliśmy słuszność związku (5.165):

$$k_1^2 + k_2^2 = k^2 - k'^2.$$

Współczynniki k_1 i k_2 wyrażają się wzorami (5.167); stałe propagacji są:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

gdzie λ jest długością fali w ośrodku nieograniczonym, oraz

$$k' = \frac{2\pi}{\lambda'},$$

gdzie λ' jest długością fali w falowodzie. Obliczyć odwrotność λ' i określić warunek, przy którym rozchodzenie się fali w falowodzie jest niemożliwe.

Odpowiedź. Ze wzorów (5.165) oraz (5.167) otrzymujemy:

$$\frac{1}{\lambda'} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \left[\left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2\right]}. \tag{5.171}$$

Od razu widać, że dla zbyt wielkich λ wyrażenie podpierwiastkowe jest ujemne i rzeczywistej wartości dla λ' nie otrzymamy. Oznaczmy

$$\frac{1}{\lambda_c} = \sqrt{\left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2}. \quad (5.172)$$

Nazwijmy λ_c *długością krytyczną* fali. Mamy

$$\frac{1}{\lambda'} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_c^2}}. \quad (5.173)$$

Widzimy, że dla $\lambda > \lambda_c$ nie istnieje rzeczywiste λ': *fala elektromagnetyczna o długości większej od krytycznej nie może rozchodzić się w falowodzie.* Falowód zatem z wprowadzonych do niego fal wybiera mody odpowiadające wzorowi (5.171), zaś zatrzymuje wszystkie fale dłuższe od długości krytycznej λ_c, wyrażonej wzorem (5.172).

5.59. Obliczyć krytyczną długość fali dla falowodu o przekroju kwadratowym. Długość boku kwadratu równa się a. Uwzględnić następujące mody: a) H_{10}, b) H_{20}, c) H_{11} i E_{11}, d) H_{12} i E_{12}.

Odpowiedź $\lambda_c = \frac{2a}{\sqrt{m^2+n^2}}$; a) $\lambda_c = 2a$, b) $\lambda_c = a$, c) $\lambda_c = 1{,}414a$, d) $\lambda_c = 0{,}894a$.

5.60. Falowód prostokątny na tzw. „pasmo" S (długość fali rzędu 10 cm) ma rozmiary poprzeczne: $a = 7{,}62$ cm, $b = 3{,}81$ cm. Jakie najdłuższe fale falowód ten „obcina"?

Odpowiedź. Wszystkie fale o długości $\lambda > \lambda_c$; najbardziej długofalowy mod H_{10}; dla tego modu, niezależnie od b $\lambda_c = 2a = 15{,}24$ cm.

5.61. W tym samym falowodzie rozchodzi się fala dająca mod E_{11}. Obliczyć λ_c.

Odpowiedź

$$\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}} = 6{,}815 \text{ cm}.$$

5.62. Fale o długości 5 cm zostały wprowadzone do powyższego falowodu sposobem pokazanym na rysunku 5.51a. Wytworzył się zatem mod E_{11}. Obliczyć długość fali bieżącej wewnątrz falowodu (λ').

Odpowiedź. Z poprzedniego zagadnienia mamy $\lambda_c = 6{,}815$ cm. Ze wzoru (5.173) otrzymujemy

$$\lambda' = \frac{\lambda\lambda_c}{\sqrt{\lambda_c^2-\lambda^2}} = 7{,}406 \text{ cm}.$$

5.63. W poprzednim zagadnieniu zwiększyć długość fali wprowadzającej do falowodu do wartości bliskiej λ_c, mianowicie do $\lambda = 6{,}8$ cm. Ile wyniesie długość fali w falowodzie? Co się stanie, gdy λ zrówna się z λ_c? Co ten wynik oznacza?

Odpowiedź. $\lambda' = 101{,}1$ cm! Gdy $\lambda = \lambda_c$, wówczas $\lambda' = \infty$. Oznacza to, że w ciągu jednego okresu drgań (T) faza fali przemieszcza się od grzbietu do następnego grzbietu, na nieskończenie wielką odległość. W tym przypadku *prędkość fazowa* fali jest nieskończenie wielka!

Uwaga. Nie należy przypuszczać, że energia fali przenosi się z taką samą prędkością, jak faza. Przeciwnie, falowód począwszy od wartości $\lambda = \lambda_c$ przestaje przepuszczać energię fali, a zatem prędkość energii fali w falowodzie równa jest zeru! Fale odbijające się od ścian falowodu tworząc stojące grupy fal, nie poruszające się wcale w kierunku osi z (długości falowodu). Dlatego prędkość energii fal nazywa się *prędkością grupową*, a ta w naszym przypadku (tj. $\lambda = \lambda_c$) równa jest zeru.

5.64. Czy możliwe jest wytworzenie w falowodzie prostokątnym fali E_{01} lub E_{10}?

Odpowiedź. W celu uzyskania odpowiedzi na to pytanie, zanalizujemy wzory (5.169), określające składowe obu wektorów fali, **H** i **E**. Widzimy, że jeśli albo m, albo n równe jest zeru, wówczas *wszystkie* składowe wektorów pola znikają: istnienie fal E_{0n} i E_{n0} jest niemożliwe.

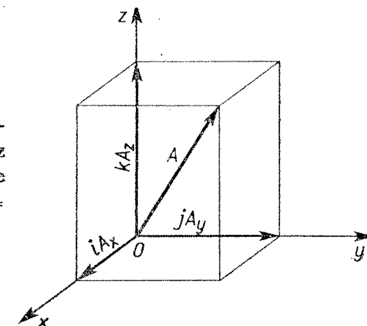
Aneks. Zestawienie podstawowych wzorów rachunku wektorowego

Wektory

A1. Składowe wektora w układzie Kartezjusza (rys. 5.62):

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z,$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{i}B_x + \mathbf{j}B_y + \mathbf{k}B_z,$$

i, **j**, **k** — wektory jednostkowe wzdłuż osi x, y, z prostokątnego układu współrzędnych.



Rys. 5.62. Składowymi wektora **A** na osie układu prostokątnego są: $\mathbf{i}A_x$, $\mathbf{j}A_y$, $\mathbf{k}A_z$. Składowe te są wektorami, lecz ich wartości A_x, A_y, A_z są skalarami. Wektory jednostkowe **i**, **j**, **k** wzdłuż osi x, y, z mają długość jednostkową: $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$

A2. Suma dwóch wektorów:

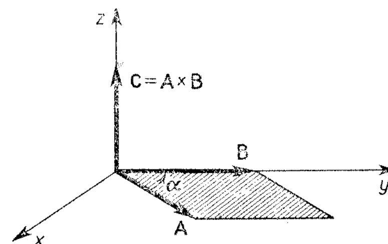
$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{i}(A_x+B_x)+\mathbf{j}(A_y+B_y)+\mathbf{k}(A_z+B_z).$$

A3. Iloczyn skalarny dwóch wektorów:

$$\mathbf{AB} = AB\cos(\mathbf{A},\mathbf{B}),$$

stąd dla wektorów jednostkowych: $\mathbf{ii} = \mathbf{jj} = \mathbf{kk} = 1$, $\mathbf{ij} = \mathbf{ji} = \mathbf{jk} = \mathbf{kj} = \mathbf{ki} = \mathbf{ik} = 0$. Mnożąc przez siebie oba wektory **A** i **B** rozłożone na składowe według A1 otrzymujemy:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z.$$



Rys. 5.63. Iloczyn wektorowy **A**×**B** jest wektorem **C** prostopadłym do płaszczyzny wektorów **A** i **B** o zwrocie wyznaczonym regułą śruby prawoskrętnej: obrót wektora **A** do pokrycia się z wektorem **B** poprzez najkrótszą drogę kątową powoduje ruch postępowy śruby w kierunku dodatnim wektora **C**. Wartość iloczynu $AB \sin\alpha$ równa jest polu powierzchni równoległoboku zbudowanego na obu wektorach **A** i **B**

A4. Iloczyn wektorowy dwóch wektorów

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{C},$$

gdzie $|\mathbf{C}| = C = AB\sin(\mathbf{A},\mathbf{B})$, zaś kierunek i zwrot wektora **C** pokazuje rysunek 5.63. Dla wektorów jednostkowych:

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{i}\times\mathbf{j} = -\mathbf{j}\times\mathbf{i} = \mathbf{k},\ \mathbf{j}\times\mathbf{k} = -\mathbf{k}\times\mathbf{j} = \mathbf{i},\ \mathbf{k}\times\mathbf{i} = -\mathbf{i}\times\mathbf{k} = \mathbf{j}.$$

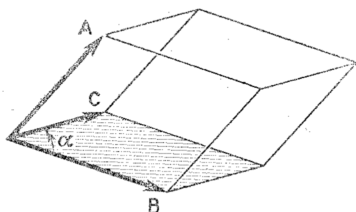
Stąd przemnożenie obu wektorów **A** i **B** rozłożonych na składowe (A1) daje:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(A_yB_z - A_zB_y) + \mathbf{j}(A_zB_x - A_xB_z) + \mathbf{k}(A_xB_y + A_yB_x).$$

A5. Iloczyn skalarny wektora i iloczynu wektorowego dwóch wektorów:

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

Wartość bezwzględna tego iloczynu **A** ($\mathbf{B}\times\mathbf{C}$) równa jest objętości równoległościanu zbudowanego na wektorach **A**, **B** i **C** (rys. 5.64).



Rys. 5.64. Objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach A, B i C równa jest iloczynowi wektorowemu $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ (pole zakreskowanej podstawy) pomnożonemu skalarnie przez A, gdyż $A \cos\beta$ jest wysokością równoległościanu (na rysunku nie zaznaczono kąta β pomiędzy wektorem A i wektorem $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$, prostopadłym do podstawy)

A6. Iloczyn wektorowy trzech wektorów:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}\times\mathbf{C} = \mathbf{B}\times\mathbf{C}\times\mathbf{A} = \mathbf{C}\times\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{C}\times\mathbf{B}\times\mathbf{A} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A}\times\mathbf{C} = -\mathbf{A}\times\mathbf{C}\times\mathbf{B} =$$
$$= \mathbf{B}(\mathbf{AC}) - \mathbf{C}(\mathbf{AB}).$$

A7. Pochodna wektora względem czasu:

$$\dot{\mathbf{A}} \equiv \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\mathbf{A}(t+\Delta t)-\mathbf{A}(t)}{\Delta t},$$
$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{i}\dot{A}_x + \mathbf{j}\dot{A}_y + \mathbf{k}\dot{A}_z.$$

A8. Pochodna sumy i iloczynu wektorów:

$$\frac{d(\mathbf{A}+\mathbf{B})}{dt} = \dot{\mathbf{A}} + \dot{\mathbf{B}},$$
$$\frac{d(\mathbf{AB})}{dt} = \mathbf{A}\dot{\mathbf{B}} + \dot{\mathbf{A}}\mathbf{B},$$
$$\frac{d(\mathbf{A}\times\mathbf{B})}{dt} = \mathbf{A}\times\dot{\mathbf{B}} + \dot{\mathbf{A}}\times\mathbf{B}.$$

Pola wektorowe

A9. Gradient w polu skalarnym. Funkcja $\varphi(x, y, z)$ reprezentuje wartość skalarną φ dla każdego punktu przestrzeni, w określonych przedziałach zmiennych x, y, z.

Opisuje pole skalarne. Przyrost φ w odniesieniu do jednostki długości, w najbliższym otoczeniu danego punktu i w kierunku osi współrzędnych wynosi: $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$. Pochodne te stanowią składowe wektora, zwanego *gradientem* (symbol grad lub ∇):

$$\operatorname{grad}\varphi \equiv \nabla\varphi = \mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Wektor grad φ (będąc funkcją współrzędnych x, y, z) stanowi pole wektorowe. O polu takim mówimy, że ma *potencjał* (skalarny), albo że jest potencjalne. Pole potencjalne jest bezwirowe (patrz A14). Przykład: pole elektryczne **E** jest wektorowe: wyprowadza się z potencjału $-\varphi$: $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$.

A10. Operator „nabla", tzn. ∇ jest symbolicznym wektorem:

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z};$$

pomnożony przez skalar φ daje grad φ. Można mnożyć go również przez wektor, zarówno skalarnie (A11), jak i wektorowo (A14).

A11. Dywergencja. Iloczyn skalarny ∇ i wektora **A** jest skalarem zwanym *dywergencją* (div):

$$\operatorname{div}\mathbf{A} \equiv \nabla\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

A12. Twierdzenie Gaussa, które posłużyło nam do definicji dywergencji [patrz § 5.9, wzór (5.16)]:

$$\iiint_\tau \operatorname{div}\mathbf{A}\, d\tau = \oint\!\!\oint A_n\, dS.$$

Lewa całka rozciągnięta jest na objętość τ, prawa zaś — na ograniczającą ją powierzchnię zamkniętą S. Definicję div **A** uzyskaliśmy podstawiając $\tau = \Delta\tau \to 0$:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \lim_{\Delta\tau\to 0} \frac{\oint\!\!\oint A_n\, dS}{\Delta\tau}.$$

Wzór ten daje pojęcie o div **A**, jako o wielkości określającej wydajność źródła wektora **A**, którego strumień $\oint\!\!\oint A_n dS$ wypływa z elementu $\Delta\tau$.

div $\mathbf{A} = \varrho$ oznacza, że w danym obszarze pola wektora **A** rozmieszczone są źródła, o gęstości wydajności (np. ładunku elektrycznego) równej ϱ.

div $\mathbf{A} = 0$ oznacza, że pole jest w danym obszarze bezźródłowe (np. ośrodek wypełniający przestrzeń jest nienaelektryzowany).

A13. Operator Laplace'a, czyli *laplasjan*, jest dywergencją gradientu w polu skalarnym:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi \equiv \nabla^2\varphi \equiv \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Laplasjan $\Delta\varphi$ jest miarą wydajności źródła wektora $\mathbf{A} = \operatorname{grad}\varphi$; $\Delta\varphi = 0$ oznacza, że pole wektora **A** w danym obszarze nie ma źródeł.

A14. Rotacja. Iloczyn wektorowy operatora ∇ i wektora **A** nazywa się rotacją wektora **A** (rot **A**):

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} \equiv \nabla\times\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right).$$

Przykład: pole magnetyczne **H** wywołane przez prąd o gęstości **I** jest wirowe: rot **H** = **I**.

A15. Twierdzenie Stokesa, które posłużyło nam do definicji rotacji [patrz § 5.8, wzór (5.12)]:

$$\iint_S \operatorname{rot}_n \mathbf{A}\, dS = \oint A_s\, ds.$$

Lewa całka rozciągnięta jest na powierzchnię S, prawa zaś — rozciągnięta jest na krzywą zamkniętą s, na której powierzchnia S jest rozpięta. Definicję rot **A** uzyskaliśmy zakładając, że $S = dS \to 0$:

$$\operatorname{rot}_n \mathbf{A} = \lim_{\Delta S\to 0} \frac{\oint A_s\, ds}{dS}.$$

Wektor rot**A** daje nam pojęcie o tym, czy pole wektorowe ma charakter wirów, okalających pewną rurkę w przestrzeni, która, gdy jej przekrój poprzeczny $dS \to 0$, staje się linią wirową (otoczoną przez pole wirowe).

A16. Pole wirowe nie ma źródeł:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A} = 0.$$

A17. Pole potencjalne (wywodzące się z potencjału) nie ma wirów:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0.$$

A18. Dywergencja iloczynu skalara i wektora:

$$\operatorname{div}\varphi\mathbf{A} = \varphi\operatorname{div}\mathbf{A} + \mathbf{A}\operatorname{grad}\varphi.$$

A19. Rotacja iloczynu skalara i wektora:

$$\operatorname{rot}\varphi\mathbf{A} = \varphi\operatorname{rot}\mathbf{A} + \operatorname{grad}\varphi\times\mathbf{A}.$$

A20. Rotacja rotacji wektora:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A},$$

gdzie $\Delta\mathbf{A}$ oznacza wektor, którego składowe są laplasjanami kolejnych składowych wektora **A**:

$$\Delta\mathbf{A} = \mathbf{i}\Delta A_x + \mathbf{j}\Delta A_y + \mathbf{k}\Delta A$$

SKOROWIDZ

W nawiasach podano po literze Z numer zagadnienia